ОБЩИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ СЛУЧАЙНОГО ДОСТУПА С ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОТОКОЛОМ В УСЛОВИЯХ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

А. Назаров, С. Цой

Томский государственный университет
Томск, Россия
nazarov@fpmk.tsu.ru, s_tsoy@mail.ru

В работе представлены результаты исследования математических моделей сети связи с динамическим протоколом в условиях большой загрузки.

Ключевые слова: массовое обслуживание, математическое моделирование, диффузионные процессы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В наше время сети связи нашли широкое применение во многих отраслях человеческой деятельности, большую их часть составляют компьютерные сети с протоколом случайного множественного доступа. Вместе с широким распространением таких сетей растет и актуальность их исследования. Достаточно удобным и распространенным методом таких исследований является метод математического моделирования, который позволяет эффективно исследовать сложные реальные системы. Но, несмотря на достаточную действенность данного метода, аналитическое исследование большого числа математических моделей превращается в довольно трудоемкий и малопродуктивный процесс вследствие громоздкости записей систем уравнений, определяющих функционирование сети связи.

В данной статье рассматривается метод, позволяющий унифицировать асимптотический анализ марковских моделей сетей передачи данных случайного множественного доступа с бесконечным числом станций и динамическим протоколом доступа [1, 2]. Этот подход позволяет получить основные вероятностно-временные характеристики сети и построить аппроксимирующий диффузионный процесс, который описывает процесс изменения состояний системы. Для иллюстрации данного метода рассматривается одноканальная сеть передачи данных с динамическим протоколом случайного множественного доступа.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В качестве математической модели сети связи, управляемой динамическим протоколом случайного множественного доступа с оповещением о конфликте, рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания. Прибор может находиться в одном из трех состояний: $k = 0$, когда прибор свободен; $k = 1$, когда прибор занят обслуживанием заявки; и $k = 2$, когда на приборе реализуется этап оповещения о конфликте. Заявка, поступившая на свободный прибор, начинает немедленно обслуживаться. Если за время ее обслуживания другие заявки не поступали, то она после окончания обслуживания покидает систему. Если же во время ее обслуживания поступает другая заявка, то возникает конфликтная ситуация и начинается этап оповещения о конфликте. Заявки, попавшие в конфликт, а также поступившие на этапе оповещения о нем, переходят в источник повторных вызовов. Из него они вновь обращаются к прибору с попыткой повторного обслуживания через случайный интервал времени, длительность ξ которого зависит от количества заявок в ИПВ и который обладает следующим свойством: $P(\xi < a + \Delta t/\xi > a, j(t) = j) = \frac{\sigma}{j}\Delta t + o(\Delta t)$ – вероятность того, что за интервал времени Δt закончится интервал задержки перед повторной попыткой передачи искаженной заявки из ИПВ, здесь $j(t)$ – количество заявок в ИПВ в момент времени t. Положим, что на вход системы поступает простейший поток заявок с параметром λ. Время обслуживания и продолжительность этапа оповещения о конфликте случайные и имеют функции распределения $B(s)$ и $A(s)$.

Состояние рассматриваемой системы определим вектором $\{k, i\}$, где k – состояние прибора, а i – число заявок в системе. Его изменение во времени образует дискретный двумерный однородный процесс $\{k(t), i(t)\}$ с бесконечным числом состояний.

Модель будем называть марковской, если функции распределения $B(s)$ и $A(s)$ экспоненциальные, с параметром μ для обслуживания и $1/a$ для оповещения о конфликте, в этом случае процесс $\{k(t), i(t)\}$ является двумерной цепью Маркова.

Можно рассмотреть аналогичные модели и для других сетей случайного доступа.

Для исследования модели обозначим

$$P_k(i,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\},\ k = \overline{0,2},\ i = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Используя Δt-метод, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\sigma)P_0(i,t) + \mu P_1(i+1,t) + \frac{1}{a}P_2(i,t),\\
\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} &= -(\lambda+\sigma+\mu)P_1(i,t) + \lambda P_0(i-1,t) + \sigma P_0(i,t),\\
\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} &= -\left(\lambda+\frac{1}{a}\right)P_2(i,t) + \lambda P_2(i-1,t) + \lambda P_1(i-1,t) + \sigma P_1(i,t),
\end{aligned} \tag{2}$$

определяющую распределение вероятностей $P_k(i,t)$, которая имеет вид системы трех дифференциально-конечноразностных уравнений.

Для исследования системы перейдем к матричной форме записи. Для этого введем следующий ряд обозначений:

$P(i,t) = \{P_0(i,t), P_1(i,t), \ldots, P_{M-1}(i,t)\}^T$ – вектор-столбец состояний системы в момент времени t, где M – число возможных состояний прибора или приборов;

$A_0(x), A_1(x), \ldots, A_{L-1}(x)$ – квадратные матрицы коэффициентов размерности $M \times M$, где L конечно и меняется в зависимости от рассматриваемой системы.

Для случая одноканальной сети с оповещением о конфликте обозначения (3) и (4) приобретут вид

$$P(i,t) = \{P_0(i,t), P_1(i,t), P_2(i,t)\}^T,\ M = 3,\ L = 3. \tag{3}$$

В этом случае систему (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial P(i,t)}{\partial t} = A_0(\lambda)P(i,t) + A_1 P(i+1,t) + A_2(\lambda)P(i-1,t), \tag{4}$$

где

$$A_0(\lambda) = \begin{pmatrix} -(\lambda+\sigma) & 0 & 1/a \\ \sigma & -(\lambda+\sigma+\mu) & 0 \\ 0 & \sigma & -(\lambda+1/a) \end{pmatrix},$$
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Аналогичные системы уравнений можно получить для марковских моделей и других сетей случайного доступа. Различия этих систем не носят принципиального характера, а определяются лишь видом и количеством матриц A_l, входящих в уравнения. Для наглядности дальнейшего изложения этот подход реализуем для более простой системы (6). Совершенно аналогично он применяется к анализу и других математических моделей данного класса.

3. МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИЯХ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

Рассмотрим систему массового обслуживания, моделирующую некоторую сеть случайного доступа, состояния которой описываются некоторым двумерным марковским процессом $\{k(t), i(t)\}$, где k описывает состояние канала, а i – количество заявок в системе.

Пусть система дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей имеет вид (6), т. е.

$$\frac{\partial P(i,t)}{\partial t} = A_0(\lambda)P(i,t) + A_1 P(i+1,t) + A_2(\lambda)P(i-1,t),$$

где $P(i,t) = \{P_0(i,t), P_1(i,t), P_2(i,t)\}^T$, а A_l – соответствующие матрицы, конкретный вид которых определяется рассматриваемой математической моделью, в частности, их вид может совпадать с приведенным в предыдущем разделе (7).

Применим метод асимптотического анализа системы (6) в условиях большой загрузки, т. е. $\lambda \uparrow S$ или $\lambda = S - \varepsilon$, где S – величина пропускной способности сети, ее значение будет определено ниже, а ε – малый положительный параметр.

Определим S – пропускную способность сети связи как точную верхнюю грань множества тех значений интенсивности входящего потока, для которых в сети существует стационарный режим.

В системе (6) выполним замены

$$t\varepsilon^2 = \tau,\ i\varepsilon = x,\ \frac{1}{\varepsilon}P(i,t) = \pi(x,\tau,\varepsilon). \qquad (6)$$

Покажем, что процесс $x(\tau) = \varepsilon i(\tau/\varepsilon^2)$ является однородным диффузионным процессом, и найдем его коэффициенты переноса и диффузии.

Сформулированные результаты получим с помощью исследования системы (6).

Систему (6), учитывая замену (8), перепишем следующим образом:

$$\varepsilon^2\frac{\partial\pi(x,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = A_0(S-\varepsilon)\pi(x,\tau,\varepsilon) + A_1\pi(x+\varepsilon,\tau,\varepsilon) + A_2(S-\varepsilon)\pi(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon). \qquad (7)$$

Полученную систему будем исследовать в четыре этапа. В связи с ограниченным объемом публикации опустим доказательства теорем.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

На первом этапе найдем распределения вероятностей значений процесса $k(\tau)$ – вектор-столбец вероятностей состояний каналов. Для этого в системе (9) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ или $\lambda \to S$, обозначив $\pi(x,\tau,\varepsilon) \to \pi(x,\tau,0) = \pi(x,\tau)$, получим относительно вектора $\pi(x,\tau)$ однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$K(S)\pi(x,\tau) = 0, \qquad (8)$$

где матрица $K(S)$ имеет вид

$$K(S) = \sum_{l=0}^{2} A_l(S) \qquad (9)$$

и является инфинитезимальной матрицей интенсивностей переходов случайного процесса $k(\tau)$. Из свойств таких матриц следует, что их строки линейно зависимы, так как

$$E^T K(S) = 0, \qquad (10)$$

где E – единичный вектор-столбец, следовательно, система (10) имеет нетривиальное решение, которое представим в виде

$$\pi(x,\tau) = R(S)H(x,\tau), \qquad (11)$$

где $H(x,\tau)$ – скалярная функция, а вектор $R(S)$ определяется аналогично (10) однородной системой линейных алгебраических уравнений

$$K(S)R(S) = 0. \qquad (12)$$

Положим, что вектор $R(S)$ удовлетворяет условию нормировки

$$E^T R(S) = 1. \tag{13}$$

Тогда $R(S)$ имеет смысл распределения вероятностей значений процесса $k(\tau)$, а $H(x,\tau)$ является плотностью распределения вероятностей значений процесса $x(\tau)$, ее вид будет определен ниже.

На втором этапе найдем условие, определяющее значение величины S.

Теорема 1. *Величина S, имеющая смысл пропускной способности сети связи, является решением следующего однородного уравнения*

$$E^T V(S) R(S) = 0, \tag{14}$$

где матрица $V(S)$ имеет вид

$$V(S) = A_2(S) - A_1, \tag{15}$$

а $R(S)$ определяется системой (14) *и* (15).

5. ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

На третьем этапе найдем разложение функции $\pi(x,\tau,\varepsilon)$ в виде

$$\pi(x,\tau,\varepsilon) = R(S)H(y,\tau) + \varepsilon h(x,\tau) + o(\varepsilon). \tag{16}$$

Теорема 2. *Вектор $h(x,\tau)$ в равенстве* (18) *имеет вид*

$$h(x,\tau) = -R'(S)H(x,\tau) + h^{(1)}(S)\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial x}, \tag{17}$$

где вектор $h^{(1)}(S)$ является решением системы

$$K(S)h^{(1)}(S) = V(S)R(S). \tag{18}$$

На четвертом этапе определим вид функции $H(x,t)$.

Теорема 3. *Функция $H(x,t)$ является плотностью распределения вероятностей значений однородного диффузионного процесса и определяется уравнением Фоккера-Планка вида*

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial \tau} &= -\left(-E^T V(S)R(S)\right)'\frac{\partial H(x,\tau)}{\partial x}+\\&+\frac{1}{2}E^T\left(D(S)R(S) - 2V(S)h^{(1)}(S)\right)\frac{\partial^2 H(x,\tau)}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{19}$$

где матрица $D(S)$ имеет вид

$$D(S) = A_1 + A_2(S), \tag{20}$$

а вектор $h^{(1)}(x)$ является решением системы (20).

Таким образом, случайный процесс $x(\tau) = \varepsilon i(\tau/\varepsilon^2)$, аппроксимирующий процесс $i(t)$ числа заявок в системе, является однородным диффузионным процессом с коэффициентом переноса $A(S) = -(E^T V(S)R(S))'$ и коэффициентом диффузии $B^2(S) = E^T(D(S)R(S) - 2V(S)h^{(1)}(S))$ с отражением на границе $x = 0$.

В стационарном режиме при $H(x, \tau) = H(x)$ уравнение (21) примет вид

$$-A(S)\frac{dH(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}B^2(S)\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} = 0. \tag{21}$$

Принимая во внимание условие нормировки для плотности распределения, получим

$$H(x) = C\exp\left\{\frac{2A(S)}{B^2(S)}x\right\},\ \text{где } C = \left\{\int_0^\infty \exp\left\{\frac{2A(S)}{B^2(S)}y\right\}dy\right\}^{-1}. \tag{22}$$

Таким образом, в (24) получена основная вероятностная характеристика рассматриваемой сети связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1991.
2. *Назаров А. А., Цой С. А.* Общий подход к исследованию марковских моделей сетей передачи данных, управляемых статическими протоколами случайного множественного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 2004. № 4. С. 73–85.