СИСТЕМА $MMAP[2]/M/C$ С АДРЕСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ ПОВТОРНЫХ ВЫЗОВОВ И ЗАРЕЗЕРВИРОВАННЫМИ ПРИБОРАМИ

В. Мушко

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
vmushko@tut.by

Исследована система $MMAP[2]/M/c$ с разнородными зарезервированными приборами и адресными повторными вызовами. Получено условие эргодичности системы, представлен алгоритм вычисления стационарного распределения вероятностей системы.

Ключевые слова: многолинейная СМО с разнородными зарезервированными приборами, маркированный марковский входной поток, адресная стратегия повторных вызовов, асимптотически квазитеплицевы цепи Маркова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важным разделом теории массового обслуживания является теория систем с повторными вызовами. В таких системах вызов, поступивший в систему и заставший прибор занятым, не становится в очередь неограниченной или ограниченной длины, как в системах с ожиданием, и не уходит из системы навсегда, как в системах с потерей вызовов (с отказами). Этот вызов покидает систему на некоторое случайное время (говорят, что он уходит на орбиту), а затем повторяет попытку попасть на обслуживание. Предполагается, что вызов повторяет попытки до тех пор, пока не поступит на обслуживание.

Системы с повторными вызовами отличаются стратегиями первичных и повторных вызовов и количеством приборов.

В данной работе будет рассмотрена адресная стратегия доступа к приборам с орбиты.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается многоканальная система, имеющая $c, c \geq 3$ приборов. Время обслуживания на r-м приборе имеет экспоненциальное распределение с параметром $\mu_r, \mu_r > 0, r = \overline{1, c}$. Поток, входящий в систему, является $MMAP[2]$ (Marked Markovian Arrival Process – маркированный марковский входной поток, введен в [1]; [2] обозначает, что поступают заявки двух типов). Поведением $MMAP[2]$ управляет цепь Маркова

$\eta_t, t > 0, \eta_t = \overline{0, W}$, с непрерывным временем. Элементами матриц $D_k, k = \overline{0,2}$, являются интенсивности перехода этой цепи. Переходы цепи, управляемые матрицей D_0, не приводят к генерации вызова, в то время как переходы цепи, управляемые матрицами $D_k, k = \overline{1,2}$, сопровождаются генерацией вызова k-го типа, $k = \overline{1,2}$, соответственно. Обозначим через θ вектор-строку стационарных вероятностей цепи $\eta_t, t > 0$. Он удовлетворяет уравнениям $\theta \sum\limits_{k=1}^{2} D_k = \vec{0}, \theta e = 1$, где $\vec{0}$ – вектор-строка, состоящий из нулей, e – вектор-столбец, состоящий из единиц. В момент прибытия вызов 1-го типа выбирает для обслуживания r-й прибор с вероятностью $q_r, 0 \le q_r < 1, r = \overline{1, a}, \sum\limits_{r=1}^{a} q_r = 1$, вызов 2-го типа выбирает для обслуживания r-й прибор с вероятностью $\psi_r, 0 \le \psi_r < 1$, $r = \overline{a+1, b}, \sum\limits_{r=a+1}^{b} \psi_r = 1, 1 \le a < b < c$. Таким образом, первые a приборов зарезервированы для вызовов 1-го типа, следующие $(b-a)$ приборов зарезервированы для вызовов 2-го типа. Если выбранный прибор свободен, то вызов занимает прибор и после обслуживания покидает систему. Если выбранный прибор занят, то вызов направляется в некоторую виртуальную динамическую область, называемую орбитой, и пытается получить обслуживание позже. Каждый вызов, находящийся на орбите, делает повторные попытки через интервалы времени, имеющие экспоненциально распределенную длину с параметром $\alpha, \alpha > 0$, независимо от других вызовов. В момент повтора вызов выбирает r-й прибор с вероятностью $\varphi_r, 0 \le \varphi_r < 1, r = \overline{b+1, c}, \sum\limits_{r=b+1}^{c} \varphi_r = 1$. Другими словами, для повторных вызовов зарезервированы последние $(c - b)$ приборов. Если прибор свободен, то вызов занимает его и покидает систему после обслуживания. Если прибор занят, то вызов возвращается на орбиту, даже если несколько других приборов свободно в этот момент. Вызовы с орбиты пытаются получить обслуживание до тех пор, пока им не удастся занять прибор, выбранный при соответствующей попытке.

3. ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СИСТЕМЫ В ТЕРМИНАХ ЦЕПИ МАРКОВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассмотрим процесс $\zeta_t = \{i_t, \nu_t^{(1)}, \ldots, \nu_t^{(c)}, \eta_t\}, t \ge 0$, где $i_t, i_t \ge 0$, – число вызовов на орбите в момент времени t, $\nu_t^{(r)}$ – состояние r-го прибора в момент времени t, $r = \overline{1, c}$:

$$\nu_t^{(r)} = \begin{cases} 0, & \text{если } r\text{-й прибор свободен в момент времени } t, \\ 1, & \text{если } r\text{-й прибор занят в момент времени } t, \end{cases}$$

η_t – состояние управляющего процесса $MMAP[2]$-потока, $\eta_t = \overline{0, W}, t \ge 0$.

Очевидно, что процесс ζ_t, $t \ge 0$ является цепью Маркова с непрерывным временем. Обозначим стационарное распределение этой цепи через

$$p(i, \nu_1, \ldots, \nu_c, \eta) = \lim_{t\to\infty} P\{i_t = i, \nu_t^{(1)} = \nu_1, \ldots, \nu_t^{(c)} = \nu_c, \eta_t = \eta\},$$
$$i \ge 0,\ \nu_r = \overline{0,1},\ r = \overline{1,c}, \eta = \overline{0,W}. \quad (1)$$

Условие существования предела в (1) приведено ниже и предполагается далее выполненным.

Занумеруем состояния цепи Маркова ζ_t, $t \geq 0$, в лексикографическом порядке и сформируем векторы-строки вероятностей $\vec{p}_i$, соответствующие состоянию i числа вызовов на орбите. Размерности этих векторов равны $2^c\overline{W}$, где $\overline{W} = W+1$. Сформируем также макровектор $\vec{p} = (\vec{p}_0, \vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_i, \ldots)$.

Лемма. *Вектор $\vec{p}$ является единственным решением системы:*

$$\vec{p}Q = \vec{0}, \vec{p}\mathbf{e} = 1, \tag{2}$$

где инфинитезимальный генератор Q цепи Маркова ζ_t, $t \geq 0$, имеет следующую форму:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{0,0} & Q_{0,1} & 0 & 0 & \cdots \\ Q_{1,0} & Q_{1,1} & Q_{1,2} & 0 & \cdots \\ 0 & Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где блоки $Q_{i,j}$ вычисляются следующим образом:

$$Q_{i,i} = A_c - i\alpha B_c,\ i \geq 0,\ Q_{i,i-1} = i\alpha L_c,\ i \geq 1,\ Q_{i,i+1} = S_c,\ i \geq 0, \tag{4}$$

квадратные матрицы A_c, B_c, L_c, S_c, размерности $2^c\overline{W}$ имеют следующий вид:

$$A_0 = D_0,$$

$$A_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} & A^{(c-k+1)} \\ \mu_{c-k+1}I_{2^{k-1}\overline{W}} & A_{k-1} - \mu_{c-k+1}I_{2^{k-1}\overline{W}} \end{pmatrix}, k = \overline{1,c},$$

$$A^{(c-k+1)} = \begin{cases} O_{2^{k-1}\overline{W}}, & \text{если } k = \overline{1, c-b}, \\ I_{2^{k-1}} \otimes D_2\psi_{c-k+1}, & \text{если } k = \overline{c-b+1, c-a}, \\ I_{2^{k-1}} \otimes D_1 q_{c-k+1}, & \text{если } k = \overline{c-a+1, c}, \end{cases}$$

$$B_0 = I_{\overline{W}},$$

$$B_k = diag\{B_{k-1}, B_{k-1} - \varphi_{c-k+1}I_{2^{k-1}\overline{W}}\}, k = \overline{1, c-b},$$

$$B_c = I_{2^c} \otimes B_{c-b},$$

$$S_0 = O_{\overline{W}},$$

$$S_k = diag\{S_{k-1}, S_{k-1} + S^{(b-k+1)}\}, k = \overline{1,b},$$

$$S^{(b-k+1)} = \begin{cases} I_{2^{k-1}} \otimes D_2\psi_{b-k+1}, & \text{если } k = \overline{1, b-a}, \\ I_{2^{k-1}} \otimes D_1 q_{b-k+1}, & \text{если } k = \overline{b-a+1, b}, \end{cases}$$

$$S_c = diag\{\underbrace{[S_b]_{1,1}, \ldots, [S_b]_{1,1}}_{2^{c-b}\text{штук}}, \underbrace{[S_b]_{2,2}, \ldots, [S_b]_{2,2}}_{2^{c-b}\text{штук}}, \ldots, \underbrace{[S_b]_{b,b}, \ldots, [S_b]_{b,b}}_{2^{c-b}\text{штук}}\},$$

$$L_0 = O_{\overline{W}},$$

$$L_k = \begin{pmatrix} L_{k-1} & \varphi_{c-k+1} I_{2^{k-1}\overline{W}} \\ \mu_{c-k+1} I_{2^{k-1}\overline{W}} & L_{k-1} \end{pmatrix}, k = \overline{1, c-b},$$

$$L_{2^b} = I_{2^b} \otimes L_{c-b},$$

I_l – тождественная матрица размерности l, O_l – нулевая матрица размерности l, $\otimes$ – символ кронекерова произведения матриц, $diag\{a_1, \dots, a_c\}$ – диагональная матрица с диагональными элементами $a_1, \dots, a_c$, $[K]_{i,i}$ обозначает i-й диагональный блок матрицы K.

4. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕПИ МАРКОВА. УСЛОВИЕ ЭРГОДИЧНОСТИ

Для установления условий существования стационарного распределения и вычисления вектора $\overrightarrow{p}$ стационарных вероятностей применим аппарат многомерных асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова [2, 3]. Для этого рассмотрим формальную цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$, с дискретным временем, которую получим, разделив каждую строку генератора Q на модуль максимального диагонального элемента этого генератора и добавив единицу к диагональному элементу.

Максимальный диагональный блок A_c матрицы имеет вид:

$$D_0 - \sum_{r=1}^{c} \mu_r I_{\overline{W}},$$

диагональные элементы матрицы D_0 отрицательны: $(D_0)_{\nu,\nu} = -\lambda_\nu, \lambda_\nu > 0, \nu = \overline{0, W}$.

Введем диагональную матрицу R_i:

$$R_i = F + i\alpha\hat{I}, \tag{5}$$

$$F = C + \sum_{r=1}^{c} \mu_r I_{2^c\overline{W}},$$

$$C = I_{2^c} \otimes diag\{\lambda_0, \dots, \lambda_W\},$$

$$\hat{I} = I_{2^b} \otimes \tilde{I}_{2^{c-b}\overline{W}},$$

матрица $\tilde{I}_{2^{c-b}\overline{W}}$ получена из матрицы $I_{2^{c-b}\overline{W}}$ заменой последнего диагонального блока размерности $\overline{W}$ на нулевой.

Таким образом, цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$ с дискретным временем характеризуется матрицей P одношаговых переходных вероятностей, имеющей следующий вид:

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & 0 & 0 & \dots \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & 0 & \dots \\ 0 & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$P_{i,i-1} = i\alpha(F + i\alpha\hat{I})^{-1} L_c, \ i \geq 1,$$

$$P_{i,i} = I + (F + i\alpha\hat{I})^{-1}(A_c - i\alpha B_c),\ i \geq 0, \tag{7}$$

$$P_{i,i+1} = (F + i\alpha\hat{I})^{-1}S_c,\ i \geq 0.$$

Формулы (6), (7) получены из (3), (4) умножением блоков (4) на матрицу R_i^{-1}.

Обозначим через $\vec{\pi} = (\vec{\pi}_0, \vec{\pi}_1, \ldots, \vec{\pi}_i, \ldots)$ вектор-строку стационарных вероятностей цепи Маркова $\xi_n, n \geq 1$. Он удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}P, \vec{\pi}e = 1. \tag{8}$$

Тогда компоненты вектора вычисляются следующим образом:

$$\vec{p}_i = \bar{c}\vec{\pi}_i R_i^{-1},\ i \geq 0, \tag{9}$$

где $\bar{c}$ находится из условия нормировки.

Проанализировав структуру блоков переходных вероятностей матрицы P, представим их искусственно в форме:

$$P_{i,l} = Q_1^{(i)} Y_{l-i+1}^{(1)} + Q_2^{(i)} Y_{l-i+1}^{(2)},\ l = i-1, i, i+1, \tag{10}$$

где

$$\begin{gathered} Q_1^{(i)} = i\alpha\hat{I}(F + i\alpha\hat{I})^{-1}, Q_2^{(i)} = F(F + i\alpha\hat{I})^{-1}, \\ Y_0^{(1)} = L_c,\ Y_0^{(2)} = O_{2^c\overline{W}}, Y_1^{(1)} = I - B_c, \\ Y_1^{(2)} = I + F^{-1}A_c, Y_2^{(1)} = O_{2^c\overline{W}},\ Y_2^{(2)} = F^{-1}S_c, \\ \lim_{i\to\infty} Q_1^{(i)} = \hat{I},\ \lim_{i\to\infty} Q_2^{(i)} = \bar{I} = I_{2^c\overline{W}} - \hat{I}. \end{gathered} \tag{11}$$

Сравнивая (10), (11) с определением многомерной асимптотически квазитеплицевой цепи Маркова (AQTMC – Asymptotically Quasi-Toeplitz Markov Chain) в [3], заключаем, что цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$, принадлежит к классу AQTMC, поэтому результаты из [2, 3] могут быть применены для ее исследования.

Предельная (по отношению к AQTMC $\xi_n, n \geq 1$) квазитеплицева цепь Маркова $\tilde{\xi}_n, n \geq 1$, имеет блоки $\tilde{P}_{i,l},\ l = i-1, i, i+1$, переходных вероятностей следующей формы:

$$\begin{gathered} \tilde{P}_{i,i-1} = \tilde{Y}_0 = \hat{I}L_c,\ i \geq 1, \\ \tilde{P}_{i,i} = \tilde{Y}_1 = I - \hat{I}B_c + \bar{I}F^{-1}A_c,\ i \geq 0, \\ \tilde{P}_{i,i+1} = \tilde{Y}_2 = \bar{I}F^{-1}S_c,\ i \geq 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Обозначим $\tilde{Y}(z) = \tilde{Y}_0 + \tilde{Y}_1 z + \tilde{Y}_2 z^2,\ |z| \leq 1$.

Как следует из [3], достаточное условие существования стационарного распределения цепи Маркова $\xi_n, n \geq 1$, совпадает с достаточным условием существования стационарного распределения цепи Маркова $\tilde{\xi}_n, n \geq 1$, и имеет следующую форму:

$$\vec{X}\tilde{Y}'(1)\mathbf{e} < 1, \tag{13}$$

где вектор $\vec{X}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\vec{X}\tilde{Y}(1) = \vec{X},\ \vec{X}\mathbf{e} = 1, \tag{14}$$

символ $'$ обозначает операцию взятия производной.

Используя это утверждение, можно получить достаточное условие существования стационарного распределения $\vec{\pi}$.

Теорема 1. *Стационарное распределение $\vec{\pi}$ существует, если следующее условие выполнено:*

$$\vec{X}[I - B_c + \bar{I}F^{-1}(A_c + 2S_c)]\mathbf{e} < 1, \tag{15}$$

где вектор $\vec{X}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\vec{X}[L_c - B_c + \bar{I}F^{-1}(A_c + S_c)] = \vec{0},\ \vec{X}\mathbf{e} = 1.$$

Очевидно (см. [3]), что данное условие является и достаточным условием существования стационарного распределения $\vec{p}$.

5. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕПИ МАРКОВА. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Предположим, что условие (15) выполнено. Так как цепь Маркова $\xi_n, n \ge 1$, принадлежит к классу AQTMC, то следующее утверждение следует прямо из [2].

Теорема 2. *Векторы $\vec{\pi}_i$, $i \ge 0$, стационарных вероятностей имеют следующую форму*

$$\vec{\pi}_i = \vec{\pi}_0 F_i,\ i \ge 1, \tag{16}$$

где матрицы F_i, $i \ge 0$, определяются из формул:

$$F_0 = I,\ F_k = \prod_{i=1}^{k} \bar{Y}_{i-1,i}\left(I - \bar{Y}_{i,i}\right)^{-1},\ k \ge 1, \tag{17}$$

матрицы $\bar{V}_0$ и $\bar{Y}_{i,k}$ определяются из формул:

$$\begin{gathered}\bar{V}_0 = P_{0,0} + P_{0,1}G^{(1)},\\ \bar{Y}_{i,k} = 0, i < k-1, i > k+1,\\ \bar{Y}_{k-1,k} = P_{k-1,k},\\ \bar{Y}_{k,k} = P_{k,k} + P_{k,k+1}G^{(k+1)},\\ \bar{Y}_{k+1,k} = P_{k+1,k} + P_{k+1,k+1}G^{(k+1)} + P_{k+1,k+2}G^{(k+2)}G^{(k+1)},\end{gathered} \tag{18}$$

где матрицы $G^{(k)}$ удовлетворяют следующей обратной рекурсии:

$$G^{(k)} = P_{k,k-1} + P_{k,k}G^{(k)} + P_{k,k+1}G^{(k+1)}G^{(k)}, k \ge 0, \tag{19}$$

$$\vec{\pi}_0 \sum_{k=0}^{\infty} F_k \mathbf{e} = 1. \qquad (20)$$

Если векторы $\vec{\pi}_i$, $i \geq 0$, найдены, стационарное распределение цепи Маркова ζ_t, $t \geq 0$, с непрерывным временем может быть вычислено, используя формулу (9), где

$$\bar{c} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \vec{\pi}_i R_i^{-1} \mathbf{e} \Big)^{-1}.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована многолинейная система массового обслуживания с разнородными зарезервированными приборами и адресными первичными и повторными вызовами. Поведение данной системы описывается многомерной цепью Маркова с непрерывным временем. Соответствующая многомерная цепь Маркова с дискретным временем, вложенная по моментам скачков исходной цепи, принадлежит к классу асимптотически квазитеплицевых цепей Маркова. С использованием известных результатов [2, 3] для таких цепей для рассмотренной системы получено достаточное условие существования стационарного распределения и представлен алгоритм вычисления стационарных вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *He Q.-M.* Queues with marked customers // Adv. Appl. Probab. 1996. V. 28. P. 567–587.
2. *Breuer L., Dudin A. N., Klimenok V. I.* A retrial *BMAP/PH/N* system // Queueing Systems. 2002. V. 40. № 4. P. 433–457.
3. *Dudin A. N., Klimenok V. I.* A retrial *BMAP/SM/*1 system with linear repeated requests // Queueing Systems. 2000. V. 34. № 1–4. P. 47–66.