ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МЕТОДОМ ПРОСЕИВАНИЯ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

О. Куликова[1], А. Назаров[2]

[1]*АСФ КемГУ*

[2]*Томский государственный университет*

[1]*Анжеро-Судженск, Россия*

[2]*Томск, Россия*

[2]nazarov@fpmk.tsu.ru

В работе предлагается метод исследования бесконечнолинейных немарковских систем обслуживания с непуассоновским входящим потоком.

Ключевые слова: бесконечнолинейная система обслуживания, просеянный поток, система $GI/G/\infty$, система $MC/G/\infty$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Бесконечнолинейные системы массового обслуживания (СМО) часто используются в качестве математических моделей реальных систем в экономике, транспорте, военном деле, теории сетей связи и многих других направлениях современной практики.

Методами теории марковских процессов достаточно подробно исследованы марковские модели $M/M/\infty$, в которых входящий поток является пуассоновским, а время обслуживания имеет экспоненциальное распределение.

Для исследования немарковских моделей $M/G/\infty$ применяются различные подходы [1–4]. В частности, в работе Андронова [4] используется тот факт, что пуассоновский входящий поток обладает свойством отсутствия последействия. При заданной функции распределения времени обслуживания, можно найти распределение числа заявок в системе в результате исследования входящего потока.

Аналогичный подход используется в работе [1], где распределение числа заявок в системе определяется вектором состояний внешних источников.

Обобщением этих подходов является метод просеянного потока, предлагаемый в данной работе, для исследования не только систем $M/G/\infty$, но также и для систем с непуассоновским входящим потоком.

2. МЕТОД ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим немарковскую бесконечнолинейную СМО, времена обслуживания заявок в которой образуют последовательность взаимно независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения $B(x)$. Обозначим

$$S(x) = 1 - B(x).$$

На оси времени выделим некоторый момент t_1. Для потока заявок, поступающих в систему, построим просеянный поток следующим образом. Всякая заявка входящего потока, поступившая в систему в момент $t <= t_1$ с вероятностью $S(t_1 - t)$, назначается в просеянный поток, а с вероятностью $1 - S(t_1 - t)$ не рассматривается. Естественно, что число заявок в системе в момент времени t_1 совпадает с количеством событий, наступивших в просеянном потоке до момента времени t_1.

Таким образом, проблема исследования бесконечнолинейной СМО сведена к анализу процесса изменения числа событий, наступивших в просеянном потоке до момента $t <= t_1$.

В частности, если входящий поток пуассоновский с параметром $\lambda(t)$, то просеянный поток является также пуассоновским с параметром

$$\lambda_1(t) = \lambda(t)S(t_1 - t).$$

Следовательно, распределение числа заявок в системе $M(t)/G/\infty$ является пуассоновским с параметром

$$\Lambda(0, t_1) = \int_0^{t_1} \lambda(x)S(t_1 - x)dx,$$

что совпадает с результатом (1) работы [4]. Аналогично получаются и другие характеристики, приведенные в работе [4]. Здесь предполагается, что в начальный момент $t = 0$ система свободна.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $GI/G/\infty$

Рассмотрим бесконечнолинейную СМО с рекуррентным входящим потоком, длины интервалов между моментами наступления событий в котором имеют функцию распределения $A(x)$. Обозначим $n(t_1)$ – число событий просеянного потока, наступивших до момента $t <= t_1$. Если $i(t_1)$ – число заявок в системе в момент времени t_1, то $i(t_1) = n(t_1)$.

Найдем распределение вероятностей значений случайного процесса $n(t)$ в момент времени t. Если $A(x)$ неэкспоненциальная функция распределения, то процесс $n(t)$ немарковский, тогда для любого t определим величину $z(t)$, равную длине интервала от момента t до момента наступления первого после момента t события в исходном рекуррентном потоке. Очевидно, двумерный случайный процесс $\{n(t), z(t)\}$ марковский, поэтому его распределение вероятностей

$$P(n, z, t) = P(n(t) = n, z(t) < z)$$

удовлетворяет следующему равенству:

$$P(z, n-\Delta t, t+\Delta t) = P(n, z, t) - P(n, \Delta t, t) + P(n, \Delta t, t)(1-$$
$$- S(t_1 - t))A(z) + P(n-1.\Delta t, t)S(t_1 - t)A(z) + o(\Delta t).$$

Выполнив в этом равенстве несложные преобразования, получим для распределения $P(n, z, t)$ следующее уравнение Колмогорова:

$$\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P(n,z,t)}{\partial z} - [1 - (1 - S(t_1 - t))A(z)]\frac{\partial P(n,0,t)}{\partial z} + \\ + S(t_1 - t)A(z)\frac{\partial P(n-1,0,t)}{\partial z}, \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial P(n,0,t)}{\partial z} = \left.\frac{\partial P(n,z,t)}{\partial z}\right|_{x=0}.$$

Решив уравнение (1) и найдя двумерное распределение $P(n, z, t)$, положим в нем $z = \infty$, определим маргинальное распределение вероятностей числа заявок в момент t_1 в рассматриваемой системе $GI/G/\infty$.

Применяя метод производящих функций к уравнению (1), нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Производящая функция $G(x, t_1)$ распределения вероятностей числа заявок в системе $GI/G/\infty$ в момент времени t_1 определяется равенством:*

$$G(x, t_1) = 1 + (x-1)\int_0^{t_1} S(t_1 - \tau)g(x,\tau)d\tau, \tag{2}$$

где $g(x, \tau)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$g(x,\tau) = \frac{1}{a}(1 - A(\tau)) + \int_0^{\tau}[1 + (x-1)S(t_1 - \tau + y)]g(x, \tau - y)dA(y), \tag{3}$$

здесь a – среднее значение длин интервалов в рекуррентном входящем потоке.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $MC/G/\infty$

Рассмотрим бесконечнолинейную СМО, на вход которой поступает МС-поток, то есть дважды стохастический случайный поток однородных событий, управляемый цепью Маркова $k(t)$. Для марковской цепи заданы ее инфинитезимальные характеристики:

$$q_{k_1k_2} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}P(k(t+\Delta t) = k_2|k(t) = k_1), k_1 \neq k_2.$$

МС-поток определим следующим образом. Если заданы неотрицательные числа $\lambda_k \geq 0$ и $m(t)$ – число событий, наступивших в потоке за время t, то случайный поток однородных событий будем называть МС-потоком, если выполняется следующее равенство:

$$P(m(t+\Delta t) = m+1 | m(t) = m, k(t) = k) = \lambda_k \Delta t + o(\Delta t).$$

Совершенно аналогично определяются и другие классы дважды стохастических потоков, например управляемые диффузионными процессами.

Число событий, наступивших в просеянном МС-потоке за время t, обозначим $n(t)$, здесь $t < t_1$. Очевидно, двумерный процесс $\{n(t), k(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, поэтому ее распределения вероятностей

$$P(n, k, t) = P(n(t) = n, k(t) = k)$$

удовлетворят следующей системе дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P(n,k,t)}{\partial t} + \lambda_k S(t_1 - t) P(n,k,t) = \\ &= \lambda_k S(t_1 - t) P(n-1,k,t) + \sum_{k_1} P(n,k_1,t) q_{k_1 k}. \end{aligned} \tag{4}$$

Применяя метод производящих функций к уравнению (4) аналогично предыдущему разделу, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Производящая функция $G(x, t_1)$ распределения вероятностей числа заявок в системе $MC|G|\infty$ в момент времени t_1 определяется равенством:*

$$G(x, t_1) = 1 + (x-1) \int_0^{t_1} S(t_1 - \tau) g(x, \tau) d\tau, \tag{5}$$

где $g(x, tau) = \sum_k \lambda_k F(x, k, \tau)$, а $F(x, k, \tau)$ определяется системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial F(x,k,\tau)}{\partial \tau} + \lambda_k (1-x) S(t_1 - t) F(x,k,\tau) = \sum_{k_1} F(x, k_1, \tau) q_{k_1 k}. \tag{6}$$

Очевидно, для решения уравнений (1) и (4), а также уравнений (3) и (6) можно применять не только метод производящих функций, но и другие подходы, например метод асимптотического анализа [5]. В этом случае удается показать, что распределение вероятностей нормированного числа занятых приборов является нормальным, и найти параметры этого распределения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод исследования бесконечнолинейных СМО с непуассоновским входящим потоком и рекуррентным обслуживанием, основанный на результатах анализа просеянного входящего потока. Показано применение этого метода к исследованию систем $GI/G/\infty$, а также $MC/G/\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А.* Формулы Энгсета для неоднородных немарковских систем массового обслуживания и их применение в сетях связи // Проблемы передачи информации. 1998. № 2. С. 109–116.
2. *Назаров А. А.* Исследование процесса изменения числа заявок в нестационарной немарковской бесконечнолинейной системе массового обслуживания // Вестн. ТГУ. 2003. № 280. С. 230–231.
3. *Кац В. М., Лившиц К. И., Назаров А. А.* Исследование нестационарных бесконечнолинейных систем массового обслуживания и их применение к анализу экономико-математических моделей // Вестн. ТГУ. 2002. № 275. С. 189–191.
4. *Андронов А. М.* Анализ нестационарной бесконечнолинейной системы массового обслуживания как сети случайного доступа // Автоматика и вычислительная техника. 1994. № 1. С. 28–33.
5. *Назаров А. А.* Асимптотический анализ марковизируемых систем. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. С. 158.