роли объектам в языках программирования со статической типизацией. Приведена реализация шаблона на языке программирования C++, в которой для динамического определения типа объекта используется механизм динамической идентификации типов данных.

1. Kristensen B. B., Østerbye K. // Theory and Practice of Object Systems. 1996. Vol. 2. № 3. P. 143.
2. Chu W. W., Zhang G. // Proc. of the 16th International Conference on Conceptual Modeling ER'97. Berlin; Heidelberg, 1997. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1331. P. 257.
3. Genilloud G., Wegmann A. A. // Proc. of the 4th International Enterprise Distributed Object Computing Conference (EDOC 2000), 25–28 September 2000. Makuhari, 2000. P. 76.
4. Liping Zhao // Model Driven Architecture, European MDA Workshops: Foundations and Applications, MDAFA 2003 and MDAFA 2004. Berlin; Heidelberg, 2005. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3599. P. 1.
5. Zhu H., Zhou M. C. // IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Pt. A. 2006. Vol. 36. № 6. P. 1110.
6. Побегайло А. П. // Материалы Междунар. науч. конгр. «Информационные системы и технологии» (CSIST'11), Минск, 31 окт. – 3 нояб. 2011 г. Минск, 2011. С. 218.
7. Fowler M. Dealing with Roles // Proc. of Pattern Languages of Programming (PLoP) Conference 1997. Technical Report WUCS-97-34. Washington University Dept.
8. Bäumer D., Riehle D., Siberski W., Wulf M. // Proc. of Pattern Languages of Programming (PLoP) Conference 1997. Technical Report WUCS-97-34. Washington University Dept.
9. Steimann F. // J. of Object-Oriented Programming. 2001. Vol. 14. № 14. P. 23.
10. Mossé Francis G. // J. of Object Technology. 2002. Vol. 1. № 4. P. 27.
11. Cabot J., Raventós R. // Proc. of the 23rd International Conference on Conceptual Modeling (ER'04). Berlin; Heidelberg, 2004. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3288. P. 69.
12. Chernuchin D., Lazar O. S., Dittrich G. // Roles, An Interdisciplinary Perspective. Papers from the 2005 AAAI Fall Symposium. AAAI Press. Menlo Park, California, 2005. P. 39.
13. Cabot J., Raventós R. Conceptual Modeling Patterns for Roles / J. Cabot, R. Raventós // J. on Data Semantics V. Berlin; Heidelberg, 2006. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3870. P. 158.
14. Steimann F. // Data & Knowledge Engineering. 2000. Vol. 35. № 1. P. 83.
15. Gottlob G., Schrefl M., Röck B. // ACM Transactions on Information Systems. 1996. Vol. 14. № 3. P. 268.
16. Chernuchin D., Lazar O. S., Dittrich G. // Roles, An Interdisciplinary Perspective. Papers from the 2005 AAAI Fall Symposium. AAAI Press. Menlo Park, California, 2005. P. 31.
17. Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влиссидес Дж. Приемы объектно-ориентированного проектирования. СПб., 2001.
18. Coplien J. O. // Pattern Languages of Program Design 4. Addison Wesley, Reading, MA, 2000. P. 167.

Поступила в редакцию 20.03.12.

Александр Павлович Побегайло – кандидат технических наук, доцент кафедры технологий программирования.

УДК 517.954

Т. С. ШЛАПАКОВА, Н. И. ЮРЧУК

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С ПРОИЗВОДНОЙ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ, НАПРАВЛЕННОЙ НЕ ПО ХАРАКТЕРИСТИКЕ

The article deals with a mixed problem for the vibration equation of a finite string with a time dependent oblique derivative in the boundary condition. It's mean that dynamic force applies to the end of a finite string. Consider a case where a derivative in the boundary condition is not directed along the characteristics. There exists a unique classical solution of the mixed problem which is represented as a restriction of some function. This function is build by special method using the results which were obtained for the solution of a problem for a semi-bounded string. The method is similar with a reflection method for the solution of a mixed problem for a finite string with fixed ends. This method has a unique nature and it is considered for the first time in the article. Formulas of the solution of this problem and matching conditions between initial and boundary conditions have been found.

Ключевые слова: смешанная задача, уравнение колебания, метод отражений, ограниченная струна, продолжение функции, условия согласования, производная по времени.

Key words: mixed problem, vibration equation, reflection method, finite string, contraction of the function, matching conditions, a time dependent oblique derivative.

1. Для ограниченной струны рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o} = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{2}$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial t} + \beta\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u\right)\right|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

при $a\alpha \neq \beta.$ Производная $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ в первом краевом условии (3) означает, что к концу струны $x = 0$ приложена и динамическая сила.

Смешанные задачи для уравнения колебания струны с производной $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ не поддавались исследованию никакими известными методами и ранее не изучались. Лишь в работе [1] рассмотрена такая задача для более простого случая полуограниченной струны $0 < x < \infty.$ Мы ставим себе цель исследовать смешанную задачу для ограниченной струны. В настоящей работе рассматривается случай $a\alpha \neq \beta,$ т. е. когда производная $\alpha\dfrac{\partial u}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial x}$ в краевом условии при $x = 0$ направлена не по характеристике.

Предполагается, что функции $\varphi \in C^2[0,l]$ и $\psi \in C^1[0,l]$ удовлетворяют следующим условиям согласования с краевыми условиями (3):

$$J_1 \equiv \alpha\psi(0) + \beta\varphi'(0) + \gamma\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0, \quad \psi(l) = 0, \tag{4}$$

$$J_2 \equiv a^2\alpha\varphi''(0) + \beta\psi'(0) + \gamma\psi(0) = 0, \quad \varphi''(l) = 0. \tag{5}$$

Будем искать решение задачи в виде сужения на $0 \le x \le l$ следующего представления:

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi, \tag{6}$$

где функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ получены продолжениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с отрезка $[0,l]$ на $\mathbb{R}$ специальным методом, предложенным в данной работе. Этот метод в своей идее восходит к известному методу отражения [2, с. 250] с использованием результатов [1].

Следует отметить, что продолженные таким образом функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ в точках $x = 2nl, n \in \mathbb{Z},$ не обладают нужной гладкостью, чтобы обеспечить принадлежность $\Phi(x) \in C^2(\mathbb{R})$ и $\Psi(x) \in C^1(\mathbb{R}).$ Тем не менее функция $u(x,t)$ будет принадлежать $C^2([0,l]\times[0,\infty))$ и являться классическим решением задачи (1) – (3).

2. Сначала продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на $[0,2l]$ нечетным образом относительно $x = l$, т. е. как предлагается в методе отражений [2]:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \le x \le l, \\ -\varphi(2l-x), & l \le x \le 2l, \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & 0 \le x \le l, \\ -\psi(2l-x), & l \le x \le 2l. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, что $\varphi_1 \in C^2[0,2l],$ $\psi_1(x) \in C^1[0,2l].$ По функциям $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определим на отрезке $[-2l,0]$ функции $\varphi_{-1}(x)$ и $\psi_{-1}(x)$ следующим образом (см. формулу (7) из [1]):

$$\varphi_{-1}(x) = -\varphi_1(-x) - \frac{2\beta}{a\alpha-\beta}\int_0^{-x}\varphi_1'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau+x)}{a\alpha-\beta}d\tau + 2\exp\frac{\gamma x}{a\alpha-\beta}\varphi(0), \quad \varphi_{-1} \in C^2[-2l,0],$$

$$\psi_{-1}(x) = -\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\psi_1(-x) + \frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{-x}\psi_1(\tau)\exp\frac{\tau+x}{a\alpha-\beta}d\tau, \quad \psi_{-1} \in C^1[-2l,0].$$

С помощью функций $\varphi_{-1}(x)$ и $\psi_{-1}(x)$ продолжим функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ на отрезок $[0,4l]$:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & 0 \le x < 2l, \\ -\varphi_{-1}(2l-x), & 2l \le x \le 4l, \end{cases} \quad \psi_2(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & 0 \le x < 2l, \\ -\psi_{-1}(2l-x), & 2l \le x \le 4l. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_2 \in C[0,4l] \cap C^2[0,2l) \cap C^2[2l,4l]$ и $\psi_2 \in C^1[0,2l) \cap C^1[2l,4l]$.

По функциям $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ определим на отрезке $[-4l,0]$ функции $\varphi_{-2}(x)$ и $\psi_{-2}(x)$:

$$\varphi_{-2}(x) = -\varphi_2(-x) - \frac{2\beta}{a\alpha-\beta}\int_0^{-x}\varphi_2'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau+x)}{a\alpha-\beta}d\tau + 2\exp\frac{\gamma x}{a\alpha-\beta}\varphi(0),$$

$$\varphi_{-2} \in C[-4l,0] \cap C^2[-4l,-2l] \cap C^2(-2l,0],$$

$$\psi_{-2}(x) = -\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\psi_2(-x) + \frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{-x}\psi_2(\tau)\exp\frac{\tau+x}{a\alpha-\beta}d\tau,$$

$$\psi_{-2} \in C^1[-4l,-2l] \cap C^2(-2l,0].$$

Теперь с помощью функций $\varphi_{-2}(x)$ и $\psi_{-2}(x)$ продолжим функции $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$ на отрезок $[0,6l]$:

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \varphi_2(x), & 0 \le x < 4l, \\ -\varphi_{-2}(2l-x), & 4l \le x \le 6l, \end{cases} \quad \psi_3(x) = \begin{cases} \psi_2(x), & 0 \le x < 4l, \\ -\psi_{-2}(2l-x), & 4l \le x \le 6l, \end{cases}$$

$$\varphi_3 \in C[0,6l] \cap C^2[0,2l) \cap C^2[2l,4l) \cap C^2[4l,6l],\ \psi_3 \in C^1[0,2l) \cap C^1[2l,4l) \cap C^1[4l,6l].$$

Продолжая этот процесс далее, по функциям $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ определим на $[-2nl,0]$ функции

$$\varphi_{-n}(x) = -\varphi_n(-x) - \frac{2\beta}{a\alpha-\beta}\int_0^{-x}\varphi_n'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau+x)}{a\alpha-\beta}d\tau + 2\exp\frac{\gamma x}{a\alpha-\beta}\varphi(0), \tag{8}$$

$$\varphi_{-n} \in C[-2nl,0]\bigcap_{k=2}^{n} C^2(-2(n-k+1)l,\,-2(n-k)l]\bigcap C^2[-2nl,\,-2(n-1)l],$$

$$\psi_{-n}(x) = -\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\psi_n(-x) + \frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{-x}\psi_n(\tau)\exp\frac{\tau+x}{a\alpha-\beta}d\tau, \tag{9}$$

$$\varphi_{-n} \in \bigcap_{k=2}^{n} C^1(-2(n-k+1)l,\,-2(n-k)l]\bigcap C^1[-2nl,\,-2(n-1)l].$$

С помощью функций $\varphi_{-n}(x)$ и $\psi_{-n}(x)$ продолжим функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ на отрезке $[0,2(n+1)l]$:

$$\varphi_{n+1}(x) = \begin{cases} \varphi_n(x), & 0 \le x < 2nl, \\ -\varphi_{-n}(2l-x), & 2nl \le x \le 2(n+1)l, \end{cases} \tag{10}$$

$$\varphi_{n+1}(x) \in C[0,2(n+1)l]\bigcap_{k=0}^{n-1} C^2[2kl,\,2(k+1)l)\bigcap C^2[2nl,2(n+1)l],$$

$$\psi_{n+1}(x) = \begin{cases} \psi_n(x), & 0 \le x < 2nl, \\ -\psi_{-n}(2l-x), & 2nl \le x \le 2(n+1)l, \end{cases} \tag{11}$$

$$\psi_{n+1} \in \bigcap_{k=0}^{n-1} C^1[2kl,\,2(k+1)l)\bigcap C^1[2nl,\,2(n+1)l].$$

Для удобства введем следующие функции: $\Phi_-(x) = \varphi_{-n}(x)$ при $-2nl \le x \le 0$ и $\Phi_+(x) = \varphi_n(x)$ при $0 \le x \le 2nl$.

Очевидно, $\Phi_- \in C(-\infty,0]\bigcap_{k=1}^{\infty} C^2(-2kl,-2(k-1)l]$, $\Phi_+ \in C[0,\infty)\bigcap_{k=1}^{\infty} C^2[2(k-1)l,\,2kl)$, $\Phi_+(0) = \Phi_-(0)$.

Аналогично определим функции $\Psi_-(x) = \psi_{-n}(x)$ при $-2nl \le x \le 0$, $\Psi_+(x) = \psi_n(x)$ при $0 \le x \le 2nl$.

В этом случае $\Psi_- \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C^1(-2kl,-2(k-1)l]$, $\Psi_+ \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C^1[2(k-1)l,2kl)$.

3. Положим в формуле (6)

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_-(x), & x \le 0, \\ \Phi_+(x), & x \ge 0, \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \Psi_-(x), & x < 0, \\ \Psi_+(x), & x \ge 0 \end{cases}$$

и покажем, что $u(x,t)$ из формулы (6) при $0 \le x \le l$ является классическим решением задачи (1) – (3).

Обратимся прежде всего к начальным условиям. При малых t для любого $0 < x < l$ $x - at > 0$. Но при $0 < x < l$ и малых at в формуле (6)

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi,$$

т. е. для $u(x,t)$ из формулы (6) выполняются начальные условия (2).

Из (9) и (10) следует, что функции Φ и Ψ нечетные относительно $x=l$: $\Phi(l+x)=-\Phi(l-x)$ и $\Psi(l+x)=-\Psi(l-x)$. Следовательно, функция $u(x,t)$ в формуле (6) удовлетворяет второму условию $u(l,t)=0$ из (3). Кроме того, при $x+at\neq 2nl$ и $x-at\neq -2ml$ функция $u(x,t)$ из формулы (6) дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1) на $(0,l)\times(0,\infty)$. Для доказательства того, что функция $u(x,t)$ – решение задачи (1) – (3), осталось показать, что выполняются два свойства:

1) на характеристиках $x+at=2nl$ и $x-at=-2ml$ при $0\le x\le l$ функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема, т. е. $u\in C^2([0,l]\times[0,\infty))$;

2) функция $u(x,t)$ удовлетворяет первому условию из (3).

Покажем, что функция $u(x,t)$ из формулы (6) при $0\le x\le l$ дважды непрерывно дифференцируема на характеристиках $x+at=2nl$ и $x-at=-2ml$.

Сначала рассмотрим случай характеристик $x+at=2nl$. Очевидно, что если $0<x<l$ и $x+at$ находится вблизи характеристики $x+at=2nl$, то $x-at$ удовлетворяет неравенству $-2nl\le x-at\le -2(n-1)l$. Обозначим $u^*(x,t)\equiv u(x,t)$ при $2(n-1)l<x+at<2nl$, $-2nl<x-at<-2(n-1)l$:

$$u^*(x,t)=\frac{\varphi_n(x+at)+\varphi_{-n}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}\psi_{-n}(\xi)d\xi+\int_{0}^{x+at}\psi_n(\xi)d\xi\right] \qquad (12)$$

и $u^{**}(x,t)\equiv u(x,t)$ при $2nl<x+at<2(n+1)l$, $-2nl<x-at<-2(n-1)l$:

$$u^{**}(x,t)=\frac{\varphi_{n+1}(x+at)+\varphi_{-n}(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_{x-at}^{0}\psi_{-n}(\xi)d\xi+\int_{0}^{x+at}\psi_{n+1}(\xi)d\xi\right]. \qquad (13)$$

Из построения функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ следует, что функция $u(x,t)$ из формулы (6) непрерывна при $0\le x\le l$ и $t\ge 0$. Кроме того, $\frac{\partial u^*}{\partial t}-\frac{\partial u^{**}}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}-\frac{\partial u^{**}}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u^{**}}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u^{**}}{\partial x^2}\right)$ при $x+at\neq 2nl$ и $x-at\neq -2ml$. Поэтому достаточно показать, что

$$\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}=\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial u^{**}(x,t)}{\partial x}, \qquad (14)$$

$$\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial^2 u^*(x,t)}{\partial x^2}=\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial^2 u^{**}(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (15)$$

Докажем равенство (14). Из (12) и (13) вытекает

$$\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial u^{**}(x,t)}{\partial x}-\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial u^*(x,t)}{\partial x}=$$

$$=\frac{\varphi'_{n+1}(2nl)-\varphi'_n(2nl)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\psi_{n+1}(2nl)-\psi_n(2nl)\right). \qquad (16)$$

Последовательно вычисляя, получим равенства

$$\varphi'_2(2l)-\varphi'_1(2l)=\frac{2\beta}{a\alpha-\beta}\varphi'(0)+\frac{2\gamma}{a\alpha-\beta}\varphi(0),$$

$$\varphi'_3(4l)-\varphi'_2(4l)=\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\left[\varphi'_2(2l)-\varphi'_1(2l)\right]=\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\left[\frac{2\beta}{a\alpha-\beta}\varphi'(0)+\frac{2\gamma}{a\alpha-\beta}\varphi(0)\right],$$

$$\dots$$

$$\varphi'_{n+1}(2nl)-\varphi'_n(2nl)=\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\right)^{n-1}\left[\varphi'_2(2l)-\varphi'_1(2l)\right]=$$

$$=\frac{2}{a\alpha-\beta}\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\right)^{n-1}\left(\beta\varphi'(0)+\gamma\varphi(0)\right), \qquad (17)$$

$$\psi_2(2l)-\psi_1(2l)=\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\psi(0)-(-\psi(0))=\frac{2a\alpha}{a\alpha-\beta}\psi(0),$$

$$\psi_3(4l)-\psi_2(4l)=\frac{a\alpha+\beta}{a-\beta}\left[\psi_2(2l)-\psi_1(2l)\right]=\frac{2a\alpha}{a\alpha-\beta}\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\psi(0),$$

$$\ldots$$

$$\psi_{n+1}(2nl)-\psi_n(2nl)=\frac{2a\alpha}{a\alpha-\beta}\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\right)^{n-1}\psi(0). \tag{18}$$

Таким образом, из равенств (16) – (18) и первого условия согласования (4) следует, что

$$\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial u^{**}(x,t)}{\partial x}-\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial u^{*}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{a\alpha-\beta}\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\right)^{n-1}J_1=0.$$

Равенство (14) доказано. Убедимся в справедливости равенства (15).

Из (12) и (13) вытекает, что

$$\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial^2 u^{**}(x,t)}{\partial x^2}-\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial^2 u^{*}(x,t)}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{\varphi''_{n+1}(2nl)-\varphi''_n(2nl)}{2}+\frac{1}{2a}\left(\psi'_{n+1}(2nl)-\psi'_n(2nl)\right).$$

Вычисляя последовательно и используя (17) и (18), получим равенства

$$\varphi''_2(2l)-\varphi''_1(2l)=$$

$$=\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\varphi''(0)-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\varphi'(0)-\frac{2\gamma^2}{(a\alpha-\beta)^2}\varphi(0)\right)-\left(-\varphi''(0)\right)=$$

$$=\frac{2a\alpha}{a\alpha-\beta}\varphi''(0)-\frac{2\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\left(\beta\varphi'(0)+\gamma\varphi(0)\right),$$

$$\psi'_2(2l)-\psi'_1(2l)=$$

$$=\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\psi'(0)-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\psi(0)-\psi'(0)=\frac{2\beta}{a\alpha-\beta}\psi'(0)-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\psi(0),$$

$$a(\varphi''_2(2l)-\varphi''_1(2l))+(\psi'_2(2l)-\psi'_1(2l))=\frac{2a^2\alpha}{a\alpha-\beta}\varphi''(0)-\frac{2\gamma a}{(a\alpha-\beta)^2}\times$$

$$\times\left(\beta\varphi'(0)+\gamma\varphi(0)+\frac{2\beta}{a\alpha-\beta}\psi'(0)\right)=\frac{2}{a\alpha-\beta}J_2-\frac{2\gamma\alpha}{(a\alpha-\beta)^2}J_1=0,$$

$$\varphi''_3(4l)-\varphi''_2(4l)=\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\left(\varphi''_2(2l)-\varphi''_1(2l)\right)-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\left(\varphi'_2(2l)-\varphi'_1(2l)\right),$$

$$\psi'_3(4l)-\psi'_2(4l)=\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\left(\psi'_2(2l)-\psi'_1(2l)\right)-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\left(\psi_2(2l)-\psi_1(2l)\right),$$

$$a(\varphi''_3(4l)-\varphi''_2(4l))+(\psi'_3(4l)-\psi'_2(4l))=$$

$$=\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\left[a(\varphi''_2(2l)-\varphi''_1(2l))+\psi'_2(2l)-\psi'_1(2l)\right]-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\frac{2a}{(a\alpha-\beta)}J_1=$$

$$=\frac{a\alpha-\beta}{a\alpha+\beta}\left[\frac{2}{a\alpha-\beta}J_2-\frac{2a\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}J_1\right]-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\frac{2a}{(a\alpha-\beta)}J_1=0,$$

$$\ldots$$

$$\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial^2 u^{**}(x,t)}{\partial x^2}-\lim_{x+at\to 2nl}\frac{\partial^2 u^{*}(x,t)}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\left(a(\varphi''_n(2(n-1)l)-\varphi''_{n-1}(2(n-1)l))+(\psi'_n(2(n-1)l)-\psi'_{n-1}(2(n-1)l))\right)-$$

$$-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\frac{a\alpha}{a\alpha-\beta}\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\right)^{n-2}J_1=$$

$$=\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{a(a\alpha-\beta)}J_2-\frac{\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}J_1\right]-\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^3}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\right)^k J_1=0.$$

Равенство (15) доказано.

Аналогичным образом доказывается дифференцируемость $u(x,t)$ на характеристиках $x-at=2ml$.

Осталось показать, что для $u(x,t)$ выполняется первое условие из (3).

Используя формулы (8) – (9), покажем $\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma u\right)\right|_{x=0}=0.$ Вычислим сначала

$$u(0,t)=-\frac{\beta}{a\alpha-\beta}\int_0^{at}\varphi_n'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-at)}{a\alpha-\beta}d\tau+\exp\frac{-\gamma at}{a\alpha-\beta}\varphi(0)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{0}[-\frac{a\alpha+\beta}{a\alpha-\beta}\psi_n(-\xi)+\frac{2\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{-\xi}\psi_n(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau+\xi)}{a\alpha-\beta}d\tau]d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^{at}\psi_n(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{-\beta}{a\alpha-\beta}\int_0^{at}\varphi_n'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-at)}{a\alpha-\beta}d\tau+\exp\frac{-\gamma at}{a\alpha-\beta}\varphi(0)+\frac{-\beta}{a(a\alpha-\beta)}\int_0^{at}\psi_n(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\beta}{a(a\alpha-\beta)}\int_0^{at}\psi_n(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-\alpha t)}{a\alpha-\beta}d\tau+\frac{\beta}{a(a\alpha-\beta)}\int_0^{at}\psi_n(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{-\beta}{a\alpha-\beta}\int_0^{at}\varphi_n'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-at)}{a\alpha-\beta}d\tau+\exp\frac{-\gamma at}{a\alpha-\beta}\varphi(0)-\frac{\beta}{a(a\alpha-\beta)}\int_0^{at}\psi_n(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-\alpha t)}{a\alpha-\beta}d\tau,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=0}=\frac{-\beta a}{a\alpha-\beta}\varphi'(at)+\frac{\beta\gamma a}{(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{at}\varphi_n'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-at)}{a\alpha-\beta}d\tau-\frac{\gamma a}{a\alpha-\beta}\exp\frac{-\gamma at}{a-\beta}\varphi(0)-$$

$$-\frac{\beta}{a\alpha-\beta}\psi_n(at)+\frac{\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{at}\psi_n(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-at)}{a\alpha-\beta}d\tau,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{a\alpha}{a\alpha-\beta}\varphi_n'(at)-\frac{\beta\gamma}{(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{at}\varphi_n'(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-at)}{a\alpha-\beta}d\tau+\frac{\gamma}{a\alpha-\beta}\exp\frac{-\gamma at}{a\alpha-\beta}\varphi(0)+$$

$$+\frac{\alpha}{a\alpha-\beta}\psi_n(at)-\frac{\beta\gamma}{a(a\alpha-\beta)^2}\int_0^{at}\psi_n(\tau)\exp\frac{\gamma(\tau-at)}{a\alpha-\beta}d\tau.$$

Непосредственной подстановкой вычисленных ранее равенств убедимся в справедливости первого условия (3).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\varphi\in C^2[0,2l]$, $\psi(x)\in C^1[0,2l]$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $a\alpha\neq\beta$ *и выполняются согласования начального и краевого условий (4) – (5). Тогда классическое решение задачи (1) – (3) представимо формулой (6) при*

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi_{-n}(x), & x\le 0,\\ \varphi_n(x), & x\ge 0,\end{cases}\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi_{-n}(x), & x<0,\\ \psi_n(x), & x\ge 0,\end{cases}$$

где $\varphi_{-n}(x),\psi_{-n}(x),\varphi_n(x),\psi_n(x)$ *определяются формулами (7) – (11).*

1. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1976.

Поступила в редакцию 30.05.12.

Татьяна Сергеевна Шлапакова – аспирант кафедры математической кибернетики.

Николай Иосифович Юрчук – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики.