# Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L^p$, $0<p<1$

**Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд** (Одесса)

## Введение

Для каждого фиксированного числа $p$, $0<p<\infty$, обозначим через $L^p[a, b]\equiv L^p$ множество тех измеримых на $[a, b]$ функций $f$, для которых

$$\|f\|_p=\left\{\int_a^b |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Если $1\leqslant p<\infty$, то $L^p$ — банахово пространство относительно этой нормы; если же $0<p<1$, то величина $\|f\|_p$ не является нормой (не выполнено неравенство треугольника), но мы сохраняем обозначение и в этом случае. При $0<p<1$ класс $L^p$ является пространством Фреше (см. [1], стр. 64), т. е. полным линейным метрическим пространством, в котором метрику можно задать равенством

$$d_p(f, g)=\|f-g\|_p^p.$$

Пусть $G=\{g_k\}$ — линейно независимая система функций из $L^p$ и функция $f\in L^p$. Обозначим через

$$E_n^{(p)}(f; G)\equiv E_n^{(p)}(f)=\inf_{\{a_k\}}\left\|f-\sum_{k=0}^{n} a_k g_k\right\|_p \qquad (n=0, 1, \ldots)$$

наилучшие приближения в $L^p$ функции $f$ полиномами по системе $G$ порядка не выше $n$.

Для каждой функции $f\in L^p$, $0<p<\infty$, положим

$$\omega_p^*(\delta, f)=\sup_{|h|\leqslant\delta}\|f(x+h)-f(x)\|_p,$$

$$\omega_p(\delta, f)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_a^{b-h}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (0\leqslant\delta\leqslant b-a),$$

причем в первом случае функция $f$ считается продолженной периодически с периодом $b-a$. Величины $\omega_p(\delta, f)$ и $\omega_p^*(\delta, f)$ называются модулями непрерывности функции $f$ ($\omega_p^*(\delta, f)$ — периодический модуль непрерывности). Эти величины являются достаточно гибкими характеристиками разностных свойств функции.

В случае пространств $L^p$ при $p\geqslant 1$ связь между модулями непрерывности и наилучшими приближениями функций по классическим ортогональным системам изучена достаточно хорошо. Приведем наиболее важные результаты в этом направлении.

Всюду ниже $C_1, C_2, \ldots$ — положительные постоянные, а $C_p, C_{p,q}, \ldots$ — положительные постоянные, зависящие лишь от входящих параметров (разные в разных формулах).

1. *Пусть* $G=\chi=\{\chi_k\}$ — *система Хаара* (см., например, [2]), $[a, b]=[0, 1]$. *Если функция* $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$, *то*

$$E_n^{(p)}(f; \chi)\leqslant C_1\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)\quad (n=1, 2, \ldots)\tag{0.1}$$

(см. П. Л. Ульянов [3], Цесельский [4]). Для равномерных наилучших приближений подобный вопрос рассматривался Секефальви-Надем [5] и Б. И. Голубовым [6]. Подробный обзор утверждений такого рода имеется в работе Б. И. Голубова [7].

Для равномерных наилучших приближений Б. И. Голубов получил и обратное неравенство. Что касается обратных неравенств для случая $L^p$, $1\leqslant p<\infty$, то до недавнего времени был известен лишь результат Е. П. Долженко [8], в котором $\omega_p(\delta, f)$ оценивается сверху через равномерные наилучшие приближения. В 1972 году Б. И. Голубов [7] показал, что если функция $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$, то

$$\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, f\right)\leqslant C_2 n^{-\frac{1}{p}}\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{p}-1}E_k^{(p)}(f; \chi)\quad (n\geqslant 1),\tag{0.2}$$

и это неравенство в определенном смысле неулучшаемо. Отметим, что соотношения (0.1) и (0.2) остаются справедливыми и для наилучших приближений в $L^p$, $1\leqslant p<\infty$, полиномами по системе Уолша [9]. Это также показал Б. И. Голубов [7]. Близкие вопросы рассматривал также Ватари [10].

2. Пусть теперь $G=T$ — тригонометрическая система, $[a, b]=[0, 2\pi]$. Подробное изложение результатов для этого случая имеется в книге [11]; приведем основные из них.

Исходным пунктом здесь являются классические теоремы Джексона [12] о равномерных наилучших приближениях. Аналог теоремы Джексона справедлив и в пространствах $L^p$, $1\leqslant p<\infty$: *если функция* $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$, *то*

$$E_n^{(p)}(f; T)\leqslant C_3\omega_p^*\left(\frac{\pi}{n+1}, f\right)\quad (n\geqslant 0).\tag{0.3}$$

Обратная теорема для равномерных наилучших приближений доказана С. Б. Стечкиным [13], а для пространств $L^p$, $1\leqslant p<\infty$, М. Ф. Тиманом и А. Ф. Тиманом [14]: *если функция* $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$, *то*

$$\omega_p^*\left(\frac{\pi}{n+1}, f\right)\leqslant \frac{C_4}{n+1}\sum_{k=0}^{n} E_k^{(p)}(f; T)\quad (n\geqslant 0).\tag{0.4}$$

Целью настоящей работы является изучение подобных вопросов в случае, когда $0<p<1$. Задача переноса неравенств (0.1)—(0.4) на классы $L^p$ при $0<p<1$ возникла в связи с исследованиями одного из авторов в теории вложения некоторых классов функций (см. об этом [15]).

Материал расположен по параграфам следующим образом. В § 1 излагаются некоторые вспомогательные факты и определения, касающиеся, в основном, специфики классов $L^p$ при $0<p<1$ по сравнению с $p\geqslant 1$. В § 2 доказываются аналоги неравенств (0.1) и (0.2) для системы Хаара и $0<p<1$; случай тригонометрической системы рассматривается в § 3. В этих параграфах указываются также некоторые применения полученных неравенств. В § 4 обсуждаются возможности обобщения результатов §§ 2—3, в частности, здесь рассматриваются классы $\varphi(L)$.

## § 1

В этом параграфе $G=\{g_k\}$ — произвольная линейно независимая система функций из $L^p$.

**1.** В этом пункте рассматриваются некоторые общие свойства наилучших приближений $E_n^{(p)}(f;G)\equiv E_n^{(p)}(f)$.

Лемма 1.1. *Для любой функции* $f\in L^p$, $0<p<1$, *существует полином наилучшего приближения* $P_n=\sum_{k=0}^{n} c_k g_k$, *т. е.*

$$E_n^{(p)}(f)=\|f-P_n\|_p.$$

Утверждение леммы следует из результата работы [16], где оно доказывается для более широкого класса пространств Фреше.

Лемма 1.2. *Если функции* $f_i\in L^p$ $(i=1,2;\ 0<p<1)$, *то*

$$[E_n^{(p)}(f_1+f_2)]^p\leqslant[E_n^{(p)}(f_1)]^p+[E_n^{(p)}(f_2)]^p. \tag{1.1}$$

*В частности, из* $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$ *следует* $\lim\limits_{k\to\infty}E_n^{(p)}(f_k)=E_n^{(p)}(f)$.

Доказательство. В самом деле, если $P_i=\sum_{k=0}^{n}c_k^{(i)}g_k$ — полином наилучшего приближения для $f_i$ $(i=1,2)$, то

$$[E_n^{(p)}(f_1+f_2)]^p\leqslant\|(f_1+f_2)-(P_1+P_2)\|_p^p\leqslant\|f_1-P_1\|_p^p+\|f_2-P_2\|_p^p.$$

Существование полиномов $P_i$ обеспечено леммой 1.1. Второе утверждение леммы вытекает из (1.1) очевидным образом.

Замечание 1.1. Если $f_i\in L^p$ $(i=1,2;\ 1\leqslant p<\infty)$, то

$$E_n^{(p)}(f_1+f_2)\leqslant E_n^{(p)}(f_1)+E_n^{(p)}(f_2).$$

Это неравенство следует из неравенства треугольника в $L^p$, $p\geqslant 1$.

Отметим еще следующий очевидный факт, которым мы будем пользоваться без дополнительных оговорок: $E^{(p)}(f)\downarrow$ при $n\uparrow\infty$.

**2.** Приведем теперь ряд свойств модулей непрерывности.

Лемма 1.3. *Если функция* $f \in L^p$, $0<p<1$, *то при всех* $0\leqslant\delta\leqslant\leqslant\delta+\eta\leqslant b-a$ *выполнены неравенства*

$$0=\omega_p^p(0,f)\leqslant\omega_p^p(\delta,f)\leqslant\omega_p^p(\delta+\eta,f)\leqslant\omega_p^p(\delta,f)+\omega_p^p(\eta,f),$$

*в частности*, $\omega_p^p(k\delta,f)\leqslant k\omega_p^p(\delta,f)$ *при* $k=1,2,\ldots$.

Замечание 1.2. В случае $p\geqslant 1$ аналогичные неравенства выглядят следующим образом: *если* $f\in L^p$, $p\geqslant 1$, *и* $0\leqslant\delta\leqslant\delta+\eta\leqslant b-a$, *то*

$$0=\omega_p(0,f)\leqslant\omega_p(\delta,f)\leqslant\omega_p(\delta+\eta,f)\leqslant\omega_p(\delta,f)+\omega_p(\eta,f)$$

(см., например, [3]), *в частности*, $\omega_p(k\delta,f)\leqslant k\omega_p(\delta,f)$ *при* $k=1,2,\ldots$.

Лемма 1.4. *Если* $f_i\in L^p$ $(i=1,2, 0<p<1)$, *то при* $\delta\in(0,b-a]$

$$\omega_p^p(\delta,f_1+f_2)\leqslant\omega_p^p(\delta,f_1)+\omega_p^p(\delta,f_2),$$

*и, в частности, если* $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$, *то* $\omega_p(\delta,f_k)\to\omega_p(\delta,f)$ *равномерно относительно* $\delta$.

Леммы 1.3 и 1.4 верны и для $\omega_p^*(\delta,f)$.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться тем, что при $f\in L^p$, $0<p<1$, выполнено неравенство

$$\omega_p^p(\delta,f)\leqslant 2\|f\|_p^p. \tag{1.2}$$

Это неравенство верно и для $\omega_p^*(\delta,f)$.

3. Введем классы функций $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$. Пусть $\alpha>0$ — фиксированное число и $p\in(0,\infty)$. Будем говорить, что функция $f\in L^p$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$, если $\omega_p(\delta,f)=O(\delta^\alpha)$ при $\delta\to 0$. Заменяя $O$ на $o$, получаем определение классов $\mathrm{lip}(\alpha,p)$, а если вместо $\omega_p(\delta,f)$ взять $\omega_p^*(\delta,f)$, то получим классы $\mathrm{Lip}^*(\alpha,p)$ и $\mathrm{lip}^*(\alpha,p)$. Очевидно, что

$$\mathrm{Lip}^*(\alpha,p)\subset\mathrm{Lip}(\alpha,p),\quad \mathrm{lip}^*(\alpha,p)\subset\mathrm{lip}(\alpha,p),$$

$$\mathrm{lip}(\alpha,p)\subset\mathrm{Lip}(\alpha,p),\quad \mathrm{lip}^*(\alpha,p)\subset\mathrm{Lip}^*(\alpha,p).$$

Если $p\geqslant 1$ и $\alpha>1$, то класс $\mathrm{Lip}(\alpha,p)$ содержит лишь функции, эквивалентные тождественным постоянным, поэтому при $p\geqslant 1$ естественно считать $0<\alpha\leqslant 1$. При $0<p<1$ ситуация изменяется; в этом случае класс $\mathrm{Lip}^*(\alpha,p)$ содержит нетривиальные функции при $0<\alpha\leqslant 1/p$ и только при $\alpha>1/p$ из условия $f\in\mathrm{lip}(\alpha,p)$ следует, что $f\sim\mathrm{const}$. Например, для любой кусочно постоянной функции $H$ модуль непрерывности $\omega_p^*(\delta,H)=O(\delta^{1/p})$. В то же время справедливо и в некотором смысле противоположное утверждение.

Лемма 1.5. *Если функция* $f$ *абсолютно непрерывна на* $[a,b]$ *и*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\omega_p(\delta,f)}{\delta}=0$$

*при некотором* $0<p<1$, *то* $f\equiv\mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть $h_i\to 0$ и

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^{b-h_i}\left|\frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}\right|^p dx=0.$$

По теореме Егорова для любого $\eta>0$ определим множество $E_\eta\subset[a, b]$ так, что $\operatorname{mes} E_\eta>b-a-\eta$ и

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}-f'(x)\right|=0$$

равномерно относительно $x\in E_\eta$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $i=i(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}\right|^p>|f'(x)|^p-\varepsilon^p \quad (x\in E_\eta,\quad i\geqslant i(\varepsilon))$$

или

$$\int_{E_\eta}\left|\frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}\right|^p dx\geqslant\int_{E_\eta}|f'(x)|^p dx-\varepsilon^p\operatorname{mes}E_\eta.$$

Отсюда, в силу нашего предположения, следует, что $f'(x)=0$ почти всюду на $E_\eta$, но $\operatorname{mes} E_\eta>b-a-\eta$, значит, $f'(x)=0$ почти всюду.

Таким образом, гладкие функции не могут иметь в $L^p$ при $0<p<1$ слишком «быстрый» модуль непрерывности, в то время как модуль непрерывности ступенчатой функции имеет наилучший порядок. Причины такого «аномального» поведения классов $\operatorname{Lip}(\alpha, p)$ при $p<1$ будут выявлены в §§ 2—3.

## § 2

Всюду в этом параграфе $G=\chi$ — система Хаара, $[a, b]=[0, 1]$. Поскольку определение функций Хаара встречается в литературе достаточно часто (см., например, [2]—[7]), мы не приводим его здесь.

1. Лемма 2.1. *Пусть $n\geqslant 0$ — натуральное число и*

$$H_{2^n}=\sum_{m=1}^{2^n}c_m\chi_m \tag{2.1}$$

*— полином по системе Хаара. Тогда при любом натуральном $k\geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$[E_{2^k}^{(p)}(H_{2^n})]^p\leqslant 2^{k+1}\int_0^{2^{-k}}\omega_p^p(h, H_{2^n})\,dh \quad (p>0). \tag{2.2}$$

Доказательство. Неравенство (2.2) очевидно при $k\geqslant n$, ибо тогда $E_{2^k}^{(p)}(H_{2^n})=0$, поэтому считаем $k<n$. Пусть $H_{2^n}(x)\equiv\alpha_s$ при $x\in\delta_n^{(s)}\equiv$ $\equiv((s-1)/2^n, s/2^n)$, $s=1, \ldots, 2^n$; пусть также $Q_{2^k}$ — произвольный полином

Хаара порядка $2^k$, причем $Q_{2^k}(x)\equiv\beta_\nu$, если $x\in\delta_k^{(\nu)}$, $\nu=1,\ldots,2^k$. Лемма будет доказана, если мы выберем числа $\beta_\nu$, $1\leqslant\nu\leqslant 2^k$, так, чтобы

$$\|H_{2^n}-Q_{2^k}\|_p^p\leqslant 2^{k+1}\int\limits_0^{2^{-k}}\omega_p^p(h, H_{2^n})\,dh. \tag{2.2'}$$

С помощью простых преобразований получаем равенства

$$\|H_{2^n}-Q_{2^k}\|_p^p=2^{-n}\sum_{\nu=1}^{2^k}\sum_{s=(\nu-1)2^{n-k}+1}^{\nu 2^{n-k}}|\alpha_s-\beta_\nu|^p.$$

Так как при любых $\nu=1,\ldots,2^k$ и $r=(\nu-1)2^{n-k}+1,\ldots,\nu 2^{n-k}$

$$\inf_\beta\sum_{s=(\nu-1)2^{n-k}+1}^{\nu 2^{n-k}}|\alpha_s-\beta|^p\leqslant\sum_{s=(\nu-1)2^{n-k}+1}^{\nu 2^{n-k}}|\alpha_s-\alpha_r|^p,$$

то числа $\beta_\nu$ $(1\leqslant\nu\leqslant 2^k)$ можно выбрать так, что

$$\|H_{2^n}-Q_{2^k}\|_p^p\leqslant 2^{k-2n}\sum_{\nu=1}^{2^k}\sum_{s=(\nu-1)2^{n-k}+1}^{\nu 2^{n-k}}\sum_{r=(\nu-1)2^{n-k}+1}^{\nu 2^{n-k}}|\alpha_s-\alpha_r|^p,$$

но, как нетрудно убедиться,

$$\int\limits_{\delta_k^{(\nu)}}\int\limits_{\delta_k^{(\nu)}}|H_{2^n}(x)-H_{2^n}(y)|^p dx dy=2^{-2n}\sum_{s=(\nu-1)2^{n-k}+1}^{\nu 2^{n-k}}\sum_{r=(\nu-1)2^{n-k}+1}^{\nu 2^{n-k}}|\alpha_s-\alpha_r|^p,$$

поэтому, учитывая еще равенство П. Л. Ульянова [3]

$$\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_\alpha^\beta|f(x)-f(y)|^p dx dy=2\int\limits_0^{\beta-\alpha}\left\{\int\limits_\alpha^{\beta-h}|f(x+h)-f(x)|^p dx\right\}dh,$$

получаем

$$\|H_{2^n}-Q_{2^k}\|_p^p\leqslant 2^{k+1}\sum_{\nu=1}^{2^k}\int\limits_0^{2^{-k}}\left\{\int\limits_{(\nu-1)2^{-k}}^{2^{-k}\nu-h}|H_{2^n}(x+h)-H_{2^n}(x)|^p dx\right\}dh\leqslant$$

$$\leqslant 2^{k+1}\int\limits_0^{2^{-k}}\left\{\int\limits_0^{1-h}|H_{2^n}(x+h)-H_{2^n}(x)|^p dx\right\}dh.$$

Отсюда легко следует неравенство (2.2′), и лемма доказана.

Теорема 2.1. *Если функция $f\in L^p$, $0<p<1$, то*

$$E_n^{(p)}(f;\chi)\leqslant 3^{1/p}\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)\quad (n=1,2,\ldots). \tag{2.3}$$

Доказательство. Из лемм 1.2, 1.4 и 2.1, а также из теоремы А. А. Талаляна [17] или из теоремы 4.1 работы П. Л. Ульянова [18] вытекает, что при $k\geqslant 0$ для любой функции $f\in L^p$ справедливо неравенство

$$[E^{(p)}_{2^k}(f)]^p\leqslant 2^{k+1}\int\limits_0^{2^{-k}}\omega_p^p(h,f)\,dh. \tag{2.4}$$

Если теперь $n\geqslant 1$ — натуральное число, $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ $(k\geqslant 0)$, то, учитывая лемму 1.3, получаем следующее:

$$[E^{(p)}_n(f)]^p\leqslant[E^{(p)}_{2^k}(f)]^p\leqslant 2^{k+1}\int\limits_0^{2^{-k}}\omega_p^p(h,f)\,dh=2^{k+1}\left\{\int\limits_0^{2^{-(k+1)}}+\int\limits_{2^{-(k+1)}}^{2^{-k}}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\omega_p^p(2^{-(k+1)},f)+\omega_p^p(2^{-k},f)\leqslant 3\omega_p^p(2^{-(k+1)},f)\leqslant 3\omega_p^p\left(\frac{1}{n},f\right),$$

и теорема доказана.

Таким образом, при $0<p<1$ имеет место точный аналог неравенства (0.1).

Замечание 2.1. Справедливо следующее утверждение: *если функция $f\in L^p$, $1\leqslant p<\infty$, то*

$$E^{(p)}_n(f;\chi)\leqslant(1+2^p)^{1/p}\omega_p\left(\frac{1}{n},f\right)\quad(n=1,2,\ldots).$$

Для доказательства следует воспользоваться замечанием 1.2 и схемой обоснования теоремы 2.1 (основное неравенство (2.1) справедливо при $p>0$).

В связи с этим заметим, что наилучшая известная постоянная в неравенстве (0.1) была получена Цесельским [4] и равна $2^{1/p}(1+2^p)^{1/p}$. Следовательно, мы усиливаем этот результат Цесельского. При этом наш метод принципиально отличается от способов обоснования неравенства (0.1) (см. [3], [4]), ибо мы не используем в качестве приближающего аппарата частные суммы Фурье — Хаара. Приведенный здесь способ рассуждений позволяет не только улучшить постоянную в неравенстве (0.1), но и доказать его аналог для гораздо более широкого класса пространств. Этот вопрос будет рассмотрен в § 4.

Замечание 2.2. Отметим еще, что в случае, когда модуль непрерывности $\omega_p(\delta,f)$ выпуклый вверх, постоянную $3^{1/p}$ в неравенстве (2.3) можно заменить на $2^{1/p}$. Этот факт вытекает из (2.4) и соотношения

$$\int\limits_0^{2x}\omega_p^p(h,f)\,dh\leqslant 2x\omega_p^p(x,f).$$

2. Лемма 2.2. *Если $H_{2^n}$ — полином по системе Хаара порядка $2^n$, $n\geqslant 0$, то при $0<h\leqslant 2^{-n}$ справедливо равенство*

$$\omega_p^*(h,H_{2^n})=(h2^n)^{1/p}\omega_p^*(2^{-n},H_{2^n}). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть числа $\alpha_s$, $s=1,\ldots,2^n$, означают то же, что и в лемме 2.1. Тогда при $0<h\leqslant 2^{-n}$

$$H_{2^n}(x+h)=\begin{cases}\alpha_s & \text{при } x\in\left(\frac{s-1}{2^n}, \frac{s}{2^n}-h\right)\\ \alpha_{s+1} & \text{при } x\in\left(\frac{s}{2^n}-h, \frac{s}{2^n}\right)\end{cases}\quad (s=1,\ldots,2^n).$$

Поэтому

$$\int_0^1 |H_{2^n}(x+h)-H_{2^n}(x)|^p dx=\sum_{s=1}^{2^n}\int_{\delta_n^{(s)}} |H_{2^n}(x+h)-H_{2^n}(x)|^p dx=$$

$$=\sum_{s=1}^{2^n}\int_{s2^{-n}-h}^{s2^{-n}} |\alpha_{s+1}-\alpha_s|^p dx=h\sum_{s=1}^{2^n}|\alpha_{s+1}-\alpha_s|^p=h2^n\int_0^1|H_{2^n}(x+2^{-n})-H_{2^n}(x)|^p dx,$$

т. е.

$$[\omega_p^*(h, H_{2^n})]^p=h2^n\int_0^1 |H_{2^n}(x+2^{-n})-H_{2^n}(x)|^p dx.$$

Полагая здесь $h=2^{-n}$ и подставляя выражение для интеграла в это же равенство, получаем (2.5).

Теорема 2.2. *Если функция* $f\in L^p$, $0<p<1$, *то*

$$\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, f\right)\leqslant 16^{1/p}n^{-1/p}\left\{\sum_{k=1}^{n}[E_k^{(p)}(f;\chi)]^p\right\}^{1/p}\quad (n=1, 2, \ldots).\tag{2.6}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно натуральное число $n\geqslant 1$, $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ $(k\geqslant 0)$. Пусть $H_{2^i}$ — полином наилучшего приближения функции $f$ порядка $2^i$ $(i=0, 1, \ldots)$; такие полиномы существуют в силу леммы 1.1. Тогда, используя последовательно соответствующие свойства модулей непрерывности и наилучших приближений из § 1 и леммы 2.2, получим:

$$\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, f\right)\right]^p\leqslant\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, f-H_{2^k}\right)\right]^p+\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, H_{2^k}\right)\right]^p\leqslant$$

$$\leqslant 2\|f-H_{2^k}\|_p^p+\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, H_1+\sum_{i=0}^{k-1}(H_{2^{i+1}}-H_{2^i})\right)\right]^p\leqslant$$

$$\leqslant 2[E_{2^k}^{(p)}(f)]^p+\sum_{i=0}^{k-1}\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, H_{2^{i+1}}-H_{2^i}\right)\right]^p\leqslant$$

$$\leqslant 2[E_{2^k}^{(p)}(f)]^p+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}2^{i+1}\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{2^{i+1}}, H_{2^{i+1}}-H_{2^i}\right)\right]^p\leqslant$$

$$\leqslant 2[E_{2^k}^{(p)}(f)]^p+\frac{8}{n}\sum_{i=0}^{k-1}2^i[E_{2^i}^{(p)}(f)]^p\leqslant\frac{16}{n}\sum_{i=0}^{k}2^{i-1}[E_{2^i}^{(p)}(f)]^p\leqslant$$

$$\leqslant\frac{16}{n}[E_1^{(p)}(f)]^p+\frac{16}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{m=2^{i-1}+1}^{2^i}[E_m^{(p)}(f)]^p,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2.3. Так как всегда $\omega_p(\delta, f) \leqslant \omega_p^*(\delta, f)$, то ясно, что неравенство (2.6) будет менее точным, если в нем заменить $\omega_p^*(\delta, f)$ на $\omega_p(\delta, f)$. Аналогично, неравенство (2.3) становится менее точным, если $\omega_p(\delta, f)$ заменить на периодический модуль непрерывности.

Из теоремы 2.2 вытекает утверждение, сформулированное в § 1: всякий полином по системе Хаара $H \in \mathrm{Lip}^*(1/p, p)$.

Более того, из теоремы 2.2 легко получается следующее содержательное описание классов $\mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$ при $0<\alpha<1/p$ в терминах наилучших приближений по системе Хаара.

Теорема 2.3. *Если функция* $f \in L^p$, $0<p<1$, *то*

а) *при* $0<\alpha<1/p$ *условия* $f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$ $(f \in \mathrm{Lip}(\alpha, p))$ *и* $E_n^{(p)}(f; \chi) = O(n^{-\alpha})$ *эквивалентны*,

б) *при* $\alpha = 1/p$ *из условия* $E_n^{(p)}(f; \chi) = O(n^{-1/p})$ *следует, что* $\omega_p^*(\delta, f) = O(\delta^{1/p} |\ln \delta|^{1/p})$, *но не обязательно* $\omega_p(\delta, f) = o(\delta^{1/p} |\ln \delta|^{1/p})$,

в) *при* $\alpha > 1/p$ *из условия* $E_n^{(p)}(f; \chi) = O(n^{-\alpha})$ *следует, что* $f \in \mathrm{Lip}^*(1/p, p)$, *но не обязательно* $f \in \mathrm{lip}(1/p, p)$.

Доказательство. Утверждение а) и первые части утверждений б) и в) следуют из теорем 2.1 и 2.2. Для доказательства второй части в) достаточно взять любой полином Хаара, отличный от $c\chi_1$ (см. лемму 2.2).

Покажем теперь, что функция

$$f_0(x) \equiv (-1)^s \quad \text{при} \quad x \in (2^{-(s+1)}, 2^{-s}), \qquad s = 0, 1, \ldots,$$

удовлетворяет при $\delta \in (0, 1/2]$ условиям

$$E_n^{(p)}(f_0) = O(n^{-1/p}), \qquad \omega_p(\delta, f_0) \geqslant C_p \delta^{1/p} |\ln \delta|^{1/p}.$$

Для этого рассмотрим последовательность полиномов Хаара

$$H_{2^k}(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{при} \quad x \in (2^{-k}, 1] \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0, 2^{-k}] \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Так как $H_{2^k}$ — кусочно постоянная функция с двоичными интервалами постоянства наименьшей длины $2^{-k}$, то

$$H_{2^k} = \sum_{m=1}^{2^k} c_m^{(k)} \chi_m;$$

поэтому, при $n = 1, 2, \ldots, 2^k < n \leqslant 2^{k+1}$

$$E_n^{(p)}(f_0) \leqslant E_{2^k}^{(p)}(f_0) \leqslant \| f_0 - H_{2^k} \|_p = 2^{-k/p} \leqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{1/p}.$$

Кроме того, при $k = 1, 2, \ldots$

$$\int_0^{1-2^{-k}} |f_0(x + 2^{-k}) - f_0(x)|^p dx \geqslant \int_{2^{-k}}^{1/2} |f_0(x + 2^{-k}) - f_0(x)|^p dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{k-1} \int_{2^{-(s+1)}}^{2^{-s}} |f_0(x + 2^{-k}) - f_0(x)|^p dx = 2^p \cdot 2^{-k} \sum_{s=1}^{k-1} 1 = 2^p 2^{-k}(k-1),$$

а это означает, что $\omega_p(\delta, f_0) \geqslant C\delta^{1/p}|\ln\delta|^{1/p}$ $(0<\delta<1/2)$. Теорема доказана полностью.

Отметим, что

$$f_0(x)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+1}2^{-s/2}\chi_{2^s+1}(x).$$

3. Примером применения теорем 2.1 и 2.2 может служить теорема 2.3. Сейчас мы укажем другие, более важные для нас результаты, которые получаются с помощью этих утверждений. Для этого нам понадобится следующая теорема одного из авторов [19].

Теорема. *Если* $0<p<q<\infty$ *и функция* $f\in L^p$, *то*

$$\|f\|_q \leqslant C_{p,q}\left\{\|f\|_p+\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\left(\omega_p^*\left(\frac{1}{n}, f\right)\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \tag{2.7}$$

В работе [19] условие (2.7) записано в эквивалентной форме с помощью интеграла. В случае $1\leqslant p<q<\infty$ это утверждение ранее получил П. Л. Ульянов [20]. Будем пользоваться еще неравенством Харди — Литтлвуда [21]: *если* $a_n\geqslant 0$ *и* $1<\alpha$, $p<\infty$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leqslant C_{\alpha,p}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}(na_n)^p. \tag{2.8}$$

Используя эти утверждения, а также теорему 2.2, покажем, что имеет место

Теорема 2.4. *Пусть* $0<p<q<\infty$ *и* $f\in L^p$. *Тогда*

$$\|f\|_q \leqslant C_{p,q}\left\{\|f\|_p+\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}(E_n^{(p)}(f;\chi))^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}, \tag{2.9}$$

$$E_n^{(q)}(f;\chi) \leqslant C_{p,q}\left\{E_n^{(p)}(f;\chi)\,n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}+\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2}(E_k^{(p)}(f;\chi))^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \quad (n\geqslant 1). \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу неравенств (2.6) и (2.7) имеем:

$$\|f\|_q \leqslant C_{q,p}\left\{\|f\|_p+\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\left[\frac{16}{n}\sum_{k=1}^{n}(E_k^{(p)}(f))^p\right]^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}}\right.,$$

а так как $q/p>1$, то можно применить неравенство Харди — Литтлвуда (2.8). Так получается неравенство (2.9). Соотношение (2.10) получается из (2.9) аналогично тому, как это сделано в работе [22].

Отметим, что для случая $1\leqslant p<q<\infty$ это утверждение доказал Б. И. Голубов [7].

Замечание 2.4. Множитель $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ в неравенстве (2.10) нельзя заменить никаким другим, имеющим порядок $o(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})$.

В самом деле, если предположить, что $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ в (2.10) можно заменить на $\lambda_n(p, q) = o(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})$, то при $f = \chi_{n+1}$ неравенство превращается в следующее:

$$E_n^{(q)}(\chi_{n+1}) \leqslant C_{p,q}\lambda_n(p, q)\, E_n^{(p)}(\chi_{n+1}).$$

Легко видеть, что $E_n^{(p)}(\chi_{n+1}) = 2^{1-\frac{1}{p}}\|\chi_{n+1}\|_p$ при всех $0<p<1$, поэтому

$$\|\chi_{n+1}\|_q \leqslant C_{p,q}\lambda_n(p, q)\|\chi_{n+1}\|_p,$$

а простой подсчет норм функций $\chi_{n+1}$ в $L^p$ и в $L^q$ показывает, что отсюда должно следовать соотношение $\lambda_n(p, q) \neq o(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})$. Следовательно, наше предположение неверно и замечание обосновано.

Отметим, что идея проведенных рассуждений принадлежит Б. И. Голубову (см. [7], стр. 268).

## § 3

Всюду в этом параграфе $G=T$ — тригонометрическая система, $[a, b]=[0, 2\pi]$.

**1.** Опираясь на теорему 2.1, мы докажем аналогичное утверждение и в случае тригонометрической системы. Именно, справедлива

Теорема 3.1. *Если функция* $f\in L^p$, $0<p<1$, *то*

$$E_n^{(p)}(f; T) \leqslant C_p\omega_p^*\left(\frac{\pi}{n+1}, f\right) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3.1}$$

Доказательство. Покажем сначала, что ступенчатую функцию (например, многочлен Хаара) можно достаточно хорошо приблизить тригонометрическим полиномом. Для этого введем в рассмотрение обобщенные ядра Джексона (С. Б. Стечкин, [13])

$$K_{n,r}(t) = \frac{\gamma_{n,r}}{n^{2r-1}}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2r} \quad (n, r = 1, 2, \ldots),$$

где $\gamma_{n,r}$ — нормирующие множители, т. е.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_{n,r}(t)\,dt = 1 \quad (n, r = 1, 2, \ldots).$$

Известно, что $\gamma_{n,r} \leqslant C_r < \infty$ $(n \geqslant 1)$ при каждом $r = 1, 2, \ldots$.

Пусть $n \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число и функция

$$H(x) = h_i \quad \text{при } x \in \left(\frac{2(i-1)\pi}{n}, \frac{2i\pi}{n}\right) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Рассмотрим тригонометрический полином

$$T_{n,r}(x, H) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (H(x+t) + H(x-t)) K_{n,r}(t)\, dt \tag{3.2}$$

(мы считаем $H$ продолженной периодически с периодом $2\pi$) и его отклонение от $H$ в метрике $L^p$, где $0<p<1$ фиксировано:

$$\|T_{n,r} - H\|_p^p = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (H(x+t) - 2H(x) + H(x-t)) K_{n,r}(t)\, dt \right|^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_k} |H(x+t) - 2H(x) + H(x-t)| K_{n,r}(t)\, dt \right]^p dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где $\Delta_k \equiv ((k-1)\pi/n, k\pi/n)$, а

$$I_k = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_k} |H(x+t) - 2H(x) + H(x-t)| K_{n,r}(t)\, dt \right]^p dx.$$

Заметим, что разность $H(x+t) - 2H(x) + H(x-t)$ при $t \in \Delta_k$, $x \in \Delta_{2i-1}$ принимает одно из значений

$$\delta_{2i-1,k}^{(1)} = h_{i+\left[\frac{k-1}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k+1}{2}\right]}, \quad \delta_{2i-1,k}^{(2)} = h_{i+\left[\frac{k-1}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k}{2}\right]},$$

$$\delta_{2i-1,k}^{(3)} = h_{i+\left[\frac{k}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k+1}{2}\right]}, \quad \delta_{2i-1,k}^{(4)} = h_{i+\left[\frac{k}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k}{2}\right]},$$

а при $t \in \Delta_k$, $x \in \Delta_{2i}$ одно из значений

$$\delta_{2i,k}^{(1)} = h_{i+\left[\frac{k+1}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k-1}{2}\right]}, \quad \delta_{2i,k}^{(2)} = h_{i+\left[\frac{k}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k-1}{2}\right]},$$

$$\delta_{2i,k}^{(3)} = h_{i+\left[\frac{k+1}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k}{2}\right]}, \quad \delta_{2i,k}^{(4)} = h_{i+\left[\frac{k}{2}\right]} - 2h_i + h_{i-\left[\frac{k}{2}\right]},$$

$i, k = 1, \ldots, n$. Здесь полагается $h_{n+1} = h_1, \ldots;$ $h_0 = h_n$, $h_{-1} = h_{n-1}, \ldots$ .

Далее, непосредственным подсчетом можно убедиться в том, что

$$\frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^{2n} (\delta_{i,k}^{(j)})^p \leqslant \left[\omega_{p,2}^*\left(\frac{k\pi}{n}, H\right)\right]^p \leqslant k^2 \left[\omega_{p,2}^*\left(\frac{\pi}{n}, H\right)\right]^p = \pi k^2 \left[\omega_{p,2}^*\left(\frac{1}{n}, H\right)\right]^p$$

при $j = 1, 2, 3, 4$. Здесь через

$$\omega_{p,2}^*(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

обозначен периодический модуль гладкости функции $f \in L^p$.

Таким образом, имеем при $n=1, 2, \ldots$

$$I_k \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \int_{\Delta_i} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_k} K_{n,r}(t) \sum_{j=1}^{4} |\delta_{i,k}^{(j)}| \, dt \right]^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{2n} |\delta_{i,k}^{(j)}|^p \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_k} K_{n,r}(t)\, dt \right]^p \leqslant 4\pi k^2 \left[ \int_{\Delta_k} K_{n,r}(t)\, dt \right]^p \left[ \omega_{p,2}^* \left( \frac{1}{n}, H \right) \right]^p .$$

Считаем в дальнейшем, что натуральное число $r$ удовлетворяет условию $2rp-2>1$ или $r \geqslant r_p = 1+[3/2p]$; тогда, суммируя неравенства по $k$, получим:

$$\| T_{n,r} - H \|_p^p \leqslant \left[ \omega_{p,2}^* \left( \frac{1}{n}, H \right) \right]^p \sum_{k=1}^{n} 4\pi k^2 \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_k} K_{n,r}(t)\, dt \right]^p \leqslant C_{p,r} \left[ \omega_{p,2}^* \left( \frac{1}{n}, H \right) \right]^p, \tag{3.4}$$

так как

$$\sum_{k=1}^{n} 4\pi k^2 \left[ \frac{1}{\pi} \int_{\Delta_k} K_{n,r}(t)\, dt \right]^p \leqslant 4\pi \left[ \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_{n,r}(t)\, dt \right)^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n} k^2 \left( \frac{\gamma_{n,r}}{\pi n^{2r-1}} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{n^{2r}}{(k-1)^{2r}} \right)^p \right] \leqslant 4\pi \left( 1 + C_r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k^{2rp}} \right) \equiv C_{p,r} < \infty$$

в силу предположения $2rp-2>1$.

Отправляясь от вспомогательного неравенства (3.4), получим теперь (3.1). Пусть функция $f \in L^p$. Для заданного $n=0, 1, \ldots$ найдем такое натуральное число $k$, что $(2^{k+1}-1)r > n \geqslant (2^k-1)r$, где $r \geqslant r_p$ — фиксированное натуральное число. Пусть $H_{2^k}$ — многочлен наилучшего приближения порядка $2^k$ функции $f$ по системе Хаара (в силу леммы 1.1 такой многочлен существует), тогда, согласно теореме 2.1, имеем:

$$\| f - H_{2^k} \|_p^p \leqslant 2 \left[ \omega_p^* \left( \frac{2\pi}{2^k}, f \right) \right]^p \leqslant 14 \left[ \omega_p^* (2^{-k}, f) \right]^p ,$$

$$[\omega_p^* (2^{-k}, H_{2^k})]^p \leqslant 2 \| f - H_{2^k} \|_p^p + [\omega_p^* (2^{-k}, f)]^p \leqslant 29 [\omega_p^* (2^{-k}, f)]^p .$$

Наконец, учитывая (3.4) и принимая во внимание то, что порядок полинома $T_{2^k,r}(H_{2^k})$ (см. (3.2)) не выше $(2^k-1)r$, получим:

$$[E_n^{(p)}(f)]^p \leqslant [E_{(2^k-1)r}^{(p)}(f)]^p \leqslant \| f - T_{2^k,r}(H_{2^k}) \|_p^p \leqslant C_{p,r} [\omega_{p,2}^* (2^{-k}, H_{2^k})]^p \leqslant$$

$$\leqslant 2C_{p,r} [\omega_p^* (2^{-k}, H_{2^k})]^p \leqslant 58\, C_{p,r} [\omega_p^* (2^{-k}, f)]^p \leqslant 116\, r C_{p,r} \left[ \omega_p^* \left( \frac{1}{2^{k+1} r}, f \right) \right]^p \leqslant$$

$$\leqslant 116\, r C_{p,r} \left[ \omega_p^* \left( \frac{1}{n+1}, f \right) \right]^p ,$$

и теорема доказана.

2. Для того чтобы установить обратную теорему, докажем сначала аналог неравенства С. Н. Бернштейна — А. Зигмунда в пространствах $L^p$, $0<p<1$.

Теорема 3.2. *Если $T_n$ — тригонометрический полином порядка $n$, то при $0<p<1$ и $\nu=1, 2, \ldots$*

$$\| T_n^{(\nu)} \|_p \leqslant (C_p n)^\nu \| T_n \|_p. \tag{3.5}$$

Доказательство. Ясно, что (3.5) достаточно доказать при $\nu=1$. Воспользуемся интегральным тождеством

$$T_n'(x) = \frac{2^{2r} n^2}{\pi} \int_0^{2\pi} T_n(x+t) H_{n,r}(t) \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2r} dt$$

(Ю. А. Брудный, [23]), где $r=0, 1, \ldots$, а $H_{n,r}$ — тригонометрический полином, причем $|H_{n,r}(x)| \leqslant 1$. Так как $T_n(x+t)$ $(\sin nt/2/\sin t/2)^{2r}$ имеет порядок не выше, чем $(r+1)n$, то, используя неравенство С. М. Никольского (случай $0<p<1$ см. [11], стр. 243), получаем:

$$\| T_n' \|_p^p \leqslant \frac{2^{2rp} n^{2p}}{\pi^p} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \left| T_n(x+t) \left( \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^{2r} \right| dt \right]^p dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{2rp}}{\pi^p} n^{2p} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2(r+1)n+1}{2\pi} \right)^{1-p} \left( \int_0^{2\pi} |T_n(x+t)|^p \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right|^{2rp} dt \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{2rp}}{\pi^p} \left( \frac{2(r+1)+\frac{1}{n}}{2\pi} \right)^{1-p} \left( n \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{n \sin \frac{t}{2}} \right|^{2rp} dt \right) n^p \| T_n \|_p^p.$$

Выберем теперь $r$ так, чтобы $2rp>1$, тогда в силу соотношения

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right|^{2rp} dt = O\left( \frac{1}{n} \right), \quad 2rp > 1,$$

имеем требуемое неравенство (3.5). Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующая

Лемма 3.1. *В условиях теоремы 3.2 имеем:*

$$\omega_p^*(h, T_n) \leqslant C_p h \| T_n' \|_p \quad \left( h \leqslant \frac{1}{n} \right). \tag{3.6}$$

Доказательство. В самом деле, используя (3.5) и разложение $T_n(x+h)$ в ряд Тейлора, получаем при $h \leqslant 1/n$

$$\|T_n(x+h)-T_n(x)\|_p^p=\left\|\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{T^{(\nu)}(x)}{\nu!}h^\nu\right\|_p^p\leqslant h^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{h^{(\nu-1)p}\|T_n^{(\nu)}\|_p^p}{(\nu!)^p}\leqslant$$

$$\leqslant h^p\|T_n'\|_p^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(hC_pn)^{(\nu-1)p}}{(\nu!)^p}\leqslant h^p\|T_n'\|_p^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{C_p^{\nu-1}}{\nu!}\right)^p\leqslant C_ph^p\|T_n'\|_p^p,$$

и лемма доказана.

Теорема 3.3. *Если функция* $f\in L^p$, $0<p<1$, *то*

$$\omega_p^*\left(\frac{1}{n+1},f\right)\leqslant\frac{C_p}{n+1}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{p-1}[E_k^{(p)}(f;T)]^p\right\}^{1/p}\qquad(n=0,1,\ldots).\quad(3.7)$$

Доказательство. Обозначим через $T_k$ полином наилучшего приближения порядка $k$ функции $f$ по тригонометрической системе (см. лемму 1.1), $k=1,2,\ldots$, т. е.

$$\|f-T_k\|_p=E_k^{(p)}(f).$$

При $n=0$ имеем:

$$[\omega_p^*(1,f)]^p\leqslant 2\|f-T_0\|_p^p+[\omega_p^*(1,T_0)]^p=2E_0^{(p)}(f).$$

Если же $n\geqslant 1$, то, определяя натуральное число $m$ так, чтобы $2^m\leqslant n<2^{m+1}$, получаем согласно (3.6) и (3.5), что

$$\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{n+1},f\right)\right]^p\leqslant 2\|f-T_{2^m}\|_p^p+\left[\omega_p^*\left(\frac{1}{n+1},T_{2^m}\right)\right]^p\leqslant 2[E_{2^m}^{(p)}(f)]^p+$$

$$+\left(\frac{C_p}{n+1}\right)^p\|T_{2^m}'\|_p^p\leqslant 2[E_{2^m}^{(p)}(f)]^p+\left(\frac{C_p}{n+1}\right)^p\sum_{s=0}^{m}\|T_{2^s}'-T_{2^{s-1}}'\|_p^p\leqslant$$

$$\leqslant 2[E_{2^m}^{(p)}(f)]^p+\left(\frac{C_p}{n+1}\right)^p\sum_{s=0}^{m}2^{sp}\|T_{2^s}-T_{2^{s-1}}\|_p^p\leqslant$$

$$\leqslant 2[E_{2^m}^{(p)}(f)]^p+\left(\frac{C_p}{n+1}\right)^p\sum_{s=0}^{m}\left\{[E_{2^s}^{(p)}(f)]^p+[E_{2^{s-1}}^{(p)}(f)]^p\right\}$$

(здесь $T_{2^{-1}}=T_0$, $E_{2^{-1}}=E_0$); дальнейшие рассуждения очевидны, и теорема доказана.

Замечание 3.1. Неравенство (3.7) неулучшаемо в следующем смысле: каковы бы ни были последовательность $\lambda(n)$, $\lambda(n)\to\infty$ при $n\to\infty$, и функция $\varphi(x,y)$, удовлетворяющая единственному условию $\varphi(x,0)=0$ при $x\geqslant x_0$, соотношение

$$\omega_p^*\left(\frac{1}{n+1},f\right)\leqslant\frac{C_p}{(n+1)\lambda(n)}\left\{\sum_{k=0}^{n}\varphi(k,E_k^{(p)}(f;T))\right\}^{1/p}\qquad(n=0,1,\ldots)$$

не может иметь места одновременно для всех функций $f\in L^p$, $0<p<1$, ни при каком $C_p>0$. Контрпримером может служить, например, функция $f(x)=\sin x$. Это замечание относится к любой системе $G$, содержащей хоть одну абсолютно непрерывную функцию, отличную от тождественной постоянной. Этот факт следует из леммы 1.5.

Замечание 3.2. Совершенно аналогично доказательству теоремы 3.3 можно установить следующее утверждение: *если функция* $f \in L^p$, $0<p<1$, *то при* $n=0, 1, \ldots$

$$\omega^*_{p,2}\left(\frac{1}{n+1}, f\right) \leqslant \frac{C_p}{(n+1)^2}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{2p-1}\,[E_k^{(p)}(f;T)]^p\right\}^{1/p}.$$

Аналог теоремы 2.3 в случае тригонометрической системы выглядит следующим образом:

Теорема 3.4. *Если функция* $f \in L^p$, $0<p<1$, *то*

а) *при* $0<\alpha<1$ *условия* $f \in \mathrm{Lip}^*(\alpha, p)$ *и* $E_n^{(p)}(f;T)=O(n^{-\alpha})$ *эквивалентны,*

б) *при* $\alpha=1$ *из условия* $E_n^{(p)}(f;T)=O(n^{-1})$ *следует, что* $\omega_p^*(\delta, f) = O(\delta\,|\ln\delta\,|^{1/p})$,

в) *при* $\alpha>1$ *из условия* $E_n^{(p)}(f;T)=O(n^{-\alpha})$ *следует, что* $f \in \mathrm{Lip}^*(1, p)$, *но не обязательно* $f \in \mathrm{lip}^*(1, p)$.

Доказательство. Утверждения а) и б), а также первая часть утверждения в) вытекают из теорем 3.1 и 3.3. В качестве примера для случая в) достаточно взять, например, функцию $f(x)=\sin x$.

Замечание 3.3. В связи с утверждением б) теоремы 3.4 возникает вопрос: существует ли функция $f_0 \in L^p$, $0<p<1$, для которой

$$\omega_p^*(\delta, f_0) \geqslant C_p\delta\,|\ln\delta\,|^{1/p}, \tag{3.8}$$

$$E_n^{(p)}(f_0) = O(n^{-1}). \tag{3.9}$$

Примером такой функции может служить

$$f_0(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1-p}{p}} & \text{при} \quad x \in (0, \pi], \\ f_0(2\pi - x) & \text{при} \quad x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Непосредственным подсчетом легко убедиться в том, что (3.8) действительно имеет место для $f_0$. Кроме того, выполнено соотношение

$$\omega^*_{p,2}(\delta, f_0) = O(\delta)$$

(в этом также легко убедиться).

Тогда условие (3.9) становится очевидным, если воспользоваться следующим утверждением: для всякой функции $f \in L^p$, $0<p<1$,

$$E_n^{(p)}(f;T) \leqslant C_p\omega^*_{p,2}\left(\frac{\pi}{n+1}, f\right) \quad (n=0, 1, \ldots).$$

Доказательство этого утверждения мы предполагаем изложить в другой работе.

Замечание 3.4. Аналоги неравенств (2.9) и (2.10) для тригонометрической системы и пространств $L^p$, $0<p<1$, были получены ранее одним из авторов [15]. Они вытекают также из результатов этого параграфа.

## § 4

1. Пусть $G=W=\{w_k\}$ — система функций Уолша [9], а $[a,b]=[0,1]$, как и в случае системы Хаара. Теоремы 2.1—2.4 из § 2, доказанные для наилучших приближений по системе Хаара, остаются справедливыми и при замене $E_n^{(p)}(f;\chi)$ на $E_n^{(p)}(f;W)$. Доказательство соответствующих теорем проходит совершенно аналогично случаю системы Хаара. В самом деле, при обосновании указанных теорем все рассуждения проводились лишь с использованием величин $E_n^{(p)}(f;\chi)$, а затем учитывались общие свойства наилучших приближений, не связанные со спецификой системы Хаара. Осталось учесть, что

$$E_{2^k}^{(p)}(f;\chi)=E_{2^k}^{(p)}(f;W)\qquad (f\in L^p,\ p>0;\ k=0,1,\ldots).$$

2. Пусть $\Phi$ — совокупность четных конечных неотрицательных и неубывающих на $[0,\infty)$ функций $\varphi$ с $\varphi(+0)=0$. Если $\varphi\in\Phi$, то через $\varphi(L)$ обозначим совокупность всех измеримых на $[a,b]$ функций $f$, для ко торых

$$\int_a^b \varphi(f(x))\,dx<\infty.$$

Величину

$$\rho_\varphi(f,g)\equiv\int_a^b \varphi(f(x)-g(x))\,dx$$

условно назовем $\varphi$-расстоянием между $f\in\varphi(L)$ и $g\in\varphi(L)$.

Модули непрерывности в классах $\varphi(L)$ вводятся так:

$$\omega_\varphi(\delta,f)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\int_a^{b-h}\varphi(f(x+h)-f(x))\,dx,\qquad \omega_\varphi^*(\delta,f)=\sup_{|h|\leqslant\delta}\rho_\varphi(f(x+h),f(x)),$$

причем во втором случае $f$ считается продолженной периодически с периодом $b-a$. Если $G=\{g_k\}\subset\varphi(L)$ — линейно независимая система функций, то

$$E_n^{(\varphi)}(f;G)\equiv E_n^{(\varphi)}(f)=\inf_{\{a_k\}}\rho_\varphi\left(f,\sum_{k=0}^n a_k g_k\right)$$

— наилучшие приближения функции $f$ по этой системе.

Следующее утверждение является обобщением теоремы 2.1 на классы $\varphi(L)$.

Теорема 4.1. *Пусть функция $\varphi\in\Phi$ удовлетворяет условию*

$$\varphi(2x)\leqslant C_\varphi\varphi(x)\quad \text{при}\quad x\geqslant 0. \tag{4.1}$$

*Тогда для всякой функции $f\in\varphi(L)$*

$$E_n^{(\varphi)}(f;\chi)\leqslant C_\varphi^2\, 2^{k+1}\int_0^{2^{-k}}\omega_\varphi(h,f)\,dh,$$

*где $n=1,2,\ldots,\ 2^k\leqslant n<2^{k+1}$.*

Доказательство. Совершенно очевидно, что при наших предположениях относительно $\varphi$ выполнено условие

$$\varphi(x+y) \leqslant C_\varphi[\varphi(x)+\varphi(y)] \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0). \tag{4.2}$$

При доказательстве неравенства (2.2) мы не использовали никаких свойств функции $\psi(x)=|x|^p$, кроме измеримости и конечности, поэтому фактически доказано соотношение

$$E_{2^k}^{(\varphi)}(H_{2^n}) \leqslant 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} \omega_\varphi(h, H_{2^n})\, dh \tag{4.3}$$

для любого полинома Хаара, любого $k \geqslant 0$ и любой функции $\varphi \in \Phi$. Если теперь $f$ — фиксированная функция класса $\varphi(L)$, то существует последовательность полиномов Хаара, $\varphi$-сходящаяся к $f$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_\varphi(f, H_{2^n}) = 0$$

(см. [18], стр. 18). Используя такую последовательность и соотношения (4.2) и (4.3), получаем при $2^k \leqslant m < 2^{k+1}$ неравенства

$$E_m^{(\varphi)}(f) \leqslant E_{2^k}^{(\varphi)}(f) \leqslant C_\varphi E_{2^k}^{(\varphi)}(f-H_{2^n}) + C_\varphi E_{2^k}^{(\varphi)}(H_{2^n}) \leqslant C_\varphi \rho_\varphi(f, H_{2^n}) +$$

$$+ C_\varphi 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} \omega_\varphi(h, H_{2^n})\, dh \leqslant C_\varphi \rho_\varphi(f, H_{2^n}) + C_\varphi^2 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} \omega_\varphi(h, f)\, dh +$$

$$+ C_\varphi^2 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} \omega_\varphi(h, f-H_{2^n})\, dh \leqslant C_\varphi(1+2C_\varphi^2)\, \rho_\varphi(f, H_{2^n}) + C_\varphi^2 2^{k+1} \int_0^{2^{-k}} \omega_\varphi(h, f) dh,$$

и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое. Мы воспользовались здесь неравенствами

$$E_n^{(\varphi)}(f) \leqslant \rho_\varphi(f, 0), \qquad \omega_\varphi(h, f) \leqslant 2C_\varphi \rho_\varphi(f, 0),$$

$$E_n^{(\varphi)}(f_1+f_2) \leqslant C_\varphi\, [E_n^{(\varphi)}(f_1) + E_n^{(\varphi)}(f_2)], \quad \omega_\varphi(h, f_1+f_2) \leqslant C_\varphi\, [\omega_\varphi(h, f_1) + \omega_\varphi(h, f_2)],$$

которые очевидным образом вытекают из (4.2). Теорема доказана.

Следствие. *В условиях теоремы* 4.1 *для всякой функции* $f \in \varphi(L)$

$$E_n^{(\varphi)}(f; \chi) \leqslant 2C_\varphi^2 \omega_\varphi\left(\frac{2}{n}, f\right) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

Замечание 4.1. Согласно результатам П. Л. Ульянова [18], наилучшие приближения $E_n^{(\varphi)}(f; \chi) \to 0$ для всякой функции $f \in \varphi(L)$ при более общих предположениях относительно $\varphi \in \Phi$; необходимым и достаточным условием для этого является равенство

$$\varphi(x+1) = O\{\varphi(x)\} \quad \text{при } x \to \infty. \tag{4.5}$$

Но если не выполнено условие

$$\varphi(2x) = O\{\varphi(x)\} \quad \text{при } x \to \infty, \tag{4.6}$$

то $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_\varphi(\delta, f_0) \neq 0$ для некоторой функции $f_0 \in \varphi(L)$ (см. об этом [18]), поэтому оценки типа (4.4) целесообразно доказывать лишь при соблюдении (4.6). Условие (4.1) (при котором нами доказано (4.4)) весьма близко к (4.6). Вопрос о справедливости (4.4) при условии (4.6) остается открытым.

Сформулируем теперь аналог теоремы 2.2 для классов $\varphi(L)$.

Теорема 4.2. *Пусть функция* $\varphi\in\Phi$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y)\quad (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0). \tag{4.7}$$

*Тогда для всякой функции* $f\in\varphi(L)$

$$\omega_\varphi^*\left(\frac{1}{n}, f\right)\leqslant\frac{16}{n}\sum_{k=1}^{n}E_k^{(\varphi)}(f;\chi)\quad (n=1, 2, \ldots). \tag{4.8}$$

Доказательство дословно повторяет обоснование теоремы 2.2.

Замечание 4.2. Теоремы 4.1 и 4.2 справедливы и для наилучших приближений $E_n^{(\varphi)}(f;W)$ по системе Уолша (см. п. 1 настоящего параграфа).

Замечание 4.3. Из теорем 4.1 и 4.2 вытекает аналог теоремы 2.3 для классов $\varphi(L)$ при ограничении (4.7) на функцию $\varphi\in\Phi$.

**3.** Специфика метода, примененного нами в § 3 для случая $G=T$, ограничивает возможность переноса неравенств типа (3.1) и (3.7) на более широкий класс пространств в рамках этого метода. Однако если функция $\varphi\in\Phi$ в некотором смысле близка к функциям степенного роста $|x|^p$, $0<p<1$, то удается получить аналог неравенства (3.1).

Пусть функция $\varphi\in\Phi$ удовлетворяет условию (4.7). Положим

$$\Psi(C)=\sup_{x>0}\frac{\varphi(Cx)}{\varphi(x)},\quad C>0,$$

тогда

$$\varphi(Cx)\leqslant\Psi(C)\,\varphi(x),\quad x>0,\ C>0. \tag{4.9}$$

В силу (4.7) функция $\Psi(C)\leqslant[C]+1$, $C>0$.

Кроме этого, для нас важным является характер поведения функции $\Psi$ вблизи 0. В связи с этим рассмотрим условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\Psi(k^{-2r})<\infty\ \text{ при некотором } r=0, 1, \ldots. \tag{4.10}$$

Теорема 4.3. *Если функция* $\varphi\in\Phi$ *удовлетворяет условиям* (4.7) *и* (4.10), *то для любой функции* $f\in\varphi(L)$

$$E_n^{(\varphi)}(f, T)\leqslant C_\varphi\omega_\varphi\left(\frac{1}{n+1}, f\right)\quad (n=0, 1, \ldots). \tag{4.11}$$

Доказательство. Мы повторяем в значительной степени рассуждения § 3. Рассмотрим снова полиномы $T_{n,r}(H)$ и их отклонения от $H$ в метрике $\rho_\varphi$. Пользуясь (4.7), имеем

$$\rho_\varphi(T_{n,r}(H), H)\leqslant\sum_{k=1}^{n}I_k^{(\varphi)},$$

где

$$I_k^{(\varphi)}=\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_k}|H(x+t)-2H(x)+H(x-t)|\,K_{n,r}(t)\,dt\right)dx.$$

На основании (4.9) и соотношения

$$\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{2n}\varphi\left(\delta_{i,k}^{(j)}\right)\leqslant\omega_{\varphi,2}^{*}\left(\frac{k\pi}{n},H\right)\leqslant 2\omega_{\varphi}^{*}\left(\frac{k\pi}{n},H\right)\leqslant 8\,k\omega_{\varphi}^{*}\left(\frac{1}{n},H\right)$$

$(j=1, 2, 3, 4)$ убеждаемся в справедливости неравенств

$$I_k^{(\varphi)}\leqslant\sum_{i=1}^{2n}\int\limits_{\Delta_i}\varphi\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_k}\left(\sum_{j=1}^{4}\delta_{i,k}^{(j)}\right)K_{n,r}(t)\,dt\right)dx\leqslant\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{4}\varphi\left(\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_k}K_{n,r}(t)\,dt\right)\delta_{i,k}^{(j)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\Psi\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_k}K_{n,r}(t)\,dt\right)\sum_{j=1}^{4}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{2n}\varphi\left(\delta_{i,k}^{(j)}\right)\leqslant 8k\Psi\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta_k}K_{n,r}(t)\,dt\right)\omega_{\varphi}^{*}\left(\frac{1}{n},H\right).$$

Так как при $r\geqslant r_{\varphi}$ выполняется (4.10), то с учетом соотношения

$$\Psi(\alpha C)\leqslant([\alpha]+1)\,\Psi(C)\qquad(\alpha, C>0),$$

вытекающего из (4.7) и (4.9), получаем после суммирования по $k$, что

$$\rho_{\varphi}(T_{n,r}(H), H)\leqslant C_{\varphi,r}\,\omega_{\varphi}^{*}\left(\frac{1}{n},H\right),\qquad r\geqslant r_{\varphi}.$$

Отсюда, используя вместо (2.1) условие (4.3), по аналогии доказываем (4.11).

Замечание 4.4. Требованиям теоремы 4.3, кроме $\varphi(x)=|x|^p$, $0<p<1$, удовлетворяют, например, функции

$$\varphi(x)=|x|^p\log^{\alpha}\left(\frac{1}{|x|}+C\right)\qquad(0<p<1,\ \alpha\geqslant 0).$$

(Поступила в редакцию 7/IV 1975 г.)

## Литература


1. **Н. Данфорд, Дж. Шварц**, Линейные операторы (общая теория), Москва, ИЛ, 1962.
2. **A. Haar**, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., **69** (1910), 331—371.
3. **П. Л. Ульянов**, О рядах по системе Хаара, Матем. сб., **63 (105)** (1964), 356—391.
4. **Z. Chiesielski**, Properties of the orthonormal Franclin system, Studia Math., **27**, № **3** (1966), 289—323.
5. **B. Sz.-Nagy**, Approximation properties of orthogonal expansions, Acta Sci. Math. Szeged, **15** (1953/54), 31—57.
6. **Б. И. Голубов**, О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара, Изв. АН СССР, серия матем., **28** (1964), 1271—1296.
7. **Б. И. Голубов**, Наилучшие приближения в метрике $L^p$ полиномами Хаара и Уолша, Матем. сб. **87 (129)** (1972), 254—274.
8. **Е. П. Долженко**, Равномерные аппроксимации рациональными функциями (алге-

браическими и тригонометрическими) и глобальные функциональные свойства, ДАН СССР, **166**, № **3** (1966), 526—529.

9. **J. Z. Walsh,** A closed set of normal orthogonal functions, Amer. J. Math., **45** (1923), 5—24.
10. **Ch. Watari,** Best approximation by Walsh polynomials, Tôhoku Math. J., **15,** № 1 (1963), 1—5.
11. **А. Ф. Тиман,** Теория приближения функций действительного переменного, Москва, Физматгиз, 1960.
12. **D. Jackson,** Über Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen ..., Diss., Göttingen, 1911.
13. **С. Б. Стечкин,** О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Изв. АН СССР, серия матем., **15,** № **3** (1951), 219—242.
14. **А. Ф. Тиман, М. Ф. Тиман,** Обобщенный модуль непрерывности и наилучшие приближения в среднем, ДАН СССР, **71,** № **1** (1950), 17—20.
15. **Э. А. Стороженко,** Теоремы вложения и наилучшие приближения, Матем. сб., **97 (139),** 230—241.
16. **А. Л. Гаркави,** Теорема существования элемента наилучшего приближения в пространствах типа $(F)$ с интегральной метрикой, Матем. заметки, **8,** вып. **5** (1970), 583—594.
17. **А. А. Талалян,** Представление функций классов $L^p$ (0,1), $0<p<1$, ортогональными рядами, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **21,** № **1—2** (1970), 1—9.
18. **П. Л. Ульянов,** Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$, Успехи матем. наук, **XXVII,** вып. **2 (164)** (1972), 3—52.
19. **Э. А. Стороженко,** О некоторых теоремах вложения, Матем. заметки, (1976).
20. **П. Л. Ульянов,** Вложение некоторых классов функций, Изв. АН СССР, серия матем., **32** (1968), 649—686.
21. **Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа,** Неравенства, Москва, ИЛ, 1948.
22. **П. Л. Ульянов,** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках, Матем. сб., **81 (123)** (1970), 104—131.
23. **Ю. А. Брудный,** Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси, ДАН СССР, **124,** № **4** (1959), 739—742.