Дискретная математика

том 20 выпуск 4 * 2008

УДК 519.8

Об устойчивости векторной комбинаторной задачи с критериями вида MINMIN

© 2008 г. В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Рассматривается многокритериальная комбинаторная задача с миниминными критериями. Получено необходимое и одновременно достаточное условие того типа устойчивости задачи, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу многозначного отображения, ставящего в соответствие каждому набору параметров векторного критерия множество Парето задачи.

Пусть $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ — некоторое множество, $T \subseteq 2^E \setminus \{\varnothing\}$, $|T| \geqslant 2$, A_i — i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$. Пусть компонентами вектор-функции $f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \dots, f_n(t, A_n))$, заданной на множестве (допустимых) решений T, являются миниминные критерии вида

$$f_i(t, A_i) = \min_{j\in N(t)} a_{ij} \to \min_{t\in T}, \qquad i \in N_n,$$

где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$.

Под векторной (n-критериальной) комбинаторной задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу нахождения множества Парето (множества эффективных решений) [1]:

$$P^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T (t \mathrel{\underset{A}{\overline{\succ}}} t')\},$$

где $\underset{A}{\overline{\succ}}$ – как обычно, отрицание бинарного отношения $\underset{A}{\succ}$:

$$t \mathrel{\underset{A}{\succ}} t' \iff f(t, A) \geqslant f(t', A) \,\&\, f(t, A) \neq f(t', A).$$

Отметим, что в схему скалярных ($n = 1$) комбинаторных задач (с линейными, минимаксными и др. критериями) вкладываются многие экстремальные задачи на графах (о коммивояжере, паросочетаниях, остовах и др.), задачи булева программирования и некоторые задачи теории расписаний (см., например, [2, 4, 3]).

В соответствии с определением [5–9] задачу $Z^n(A)$ назовем устойчивой (по функционалу), если

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \quad (P^n(A + B) \subseteq P^n(A)),$$

где

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n\times m} : \|B\| < \varepsilon\}$$

— множество возмущающих матриц и

$$\|B\| = \max\{|b_{ij}|: (i, j) \in N_n \times N_m\}.$$

Легко понять, что при выполнении равенства $P^n(A) = T$ задача $Z^n(A)$ устойчива при любой матрице $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$. Задачу $Z^n(A)$, для которой непусто множество $\bar{P}^n(A) = T \setminus P^n(A)$, будем называть нетривиальной.

Множество Слейтера (множество слабо эффективных решений) зададим, как обычно, формулой [1]

$$Sl^n(A) = \{t \in T: \nexists t' \in T \;\; \forall i \in N_n \;\; (f_i(t, A_i) > f_i(t', A_i))\}.$$

Очевидно, что $\varnothing \neq P^n(A) \subseteq Sl^n(A)$ при всякой матрице $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

Известно [6], что совпадение множеств Парето и Слейтера, будучи достаточным условием устойчивости нетривиальной задачи $Z^n(A)$ (см. ниже следствие 3), не является необходимым. Данная работа посвящена получению критерия устойчивости этой задачи.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} V(t, I, A) &= \prod_{i\in I} N_i(t, A_i), && I \subseteq N_n,\\ N_i(t, A_i) &= \operatorname{Argmin}\{a_{ij}: j \in N(t)\}, && i \in N_n,\\ P^n(t, A) &= \{t' \in P^n(A): f(t, A) \geqslant f(t', A)\},\\ I(t, t') &= \{i \in N_n: f_i(t, A_i) = f_i(t', A_i)\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$f_i(t, A_i) = a_{ij} \qquad \forall j \in N_i(t, A_i), \tag{1}$$

$I(t, t') \neq \varnothing$ при любых $t \in Sl^n(A)$, $t' \in P^n(t, A)$. Поскольку множество T конечно, то множество Парето $P^n(A)$ непусто и, более того, внешне устойчиво [1], то есть $P^n(t, A) \neq \varnothing$ при любом решении $t \in T$, причем $t \in P^n(t, A)$ тогда и только тогда, когда $t \in P^n(A)$.

Через v_I будем обозначать проекцию вектора $v \in \mathbf{R}^n$ на координатные оси с номерами из множества $I \subseteq N_n$. Задачу $Z^n(A)$ назовем регулярной, если для всякого решения $t \in Sl^n(A)$ справедлива формула

$$\forall v \in V(t, N_n, A) \quad \exists t^* \in P^n(t, A) \quad (v_{I(t,t^*)} \in V(t^*, I(t, t^*), A)). \tag{2}$$

Теорема 1. *Для того чтобы векторная нетривиальная задача $Z^n(A)$, $n \geqslant 1$, с частными критериями вида MINMIN была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярной.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть нетривиальная задача устойчива. Покажем, что для всякого решения $t \in Sl^n(A)$ выполняется формула (2).

Если $t \in P^n(A)$, то ввиду того, что $t \in P^n(t, A)$ и $I(t, t) = N_n$, для любого вектора $v \in V(t, N_n, A)$ справедливо включение $v_{I(t,t)} \in V(t, I(t, t), A)$. Таким образом, формула (2) верна при $t \in P^n(A)$.

Доказательство (2) для любого решения $t \in Sl^n(A) \setminus P^n(A)$, проведем методом от противного. Пусть найдутся $t^0 \in Sl^n(A) \setminus P^n(A)$, $v^0 = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_n^0) \in V(t^0, N_n, A)$ такие, что

$$\forall t \in P^n(t^0, A) \quad (v^0_{I(t,t^0)} \notin V(t, I(t, t^0), A)),$$

то есть для всякого решения $t \in P^n(t^0, A)$, отличного от t^0, существует индекс $q \in I(t, t^0)$ такой, что $v_q^0 \notin N_q(t, A_q)$. Тогда

$$f_q(t^0, A_q) = f_q(t, A_q), \qquad v_q^0 \in N_q(t^0, A_q) \setminus N_q(t, A_q).$$

Поэтому, задав элементы возмущающей матрицы $B^0 = [b_{ij}^0] \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ по правилу

$$b_{ij}^0 = \begin{cases} -\alpha, & \text{если } i \in N_n,\ j = v_i^0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \alpha < \varepsilon$, находим, что

$$f_q(t^0, A_q + B_q^0) = f_q(t^0, A_q) - \alpha < f_q(t, A_q) = f_q(t, A_q + B_q^0).$$

Итак, для всякого решения $t \in P^n(t^0, A)$

$$t^0 \underset{A+B^0}{\succ} t. \tag{3}$$

Пусть $t \in T \setminus P^n(t^0, A)$. Найдется такой индекс $s \in N_n$, что $f_s(t^0, A_s) < f_s(t, A_s)$. Из этого неравенства, учитывая строение возмущающей матрицы B^0, получаем соотношения

$$f_s(t^0, A_s + B_s^0) = f_s(t^0, A_s) - \alpha < f_s(t, A_s) - \alpha \leqslant f_s(t, A_s + B_s^0),$$

которые вновь приводят к (3).

Резюмируя вышесказанное, видим, что $t^0 \in P^n(A + B^0)$. Поэтому, учитывая, что $t^0 \in \overline{P}^n(A)$, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B^0 \in \mathcal{B}(\varepsilon) \quad (P^n(A + B^0) \not\subseteq P^n(A)).$$

Следовательно, задача $Z^n(A)$ не является устойчивой.

Докажем достаточность. Ввиду нетривиальности задачи $Z^n(A)$ очевидно существование положительного числа

$$\alpha = \min\{|a_{ij} - a_{i'j'}| > 0 \colon (i, j) \in N_n \times N_m,\ (i', j') \in N_n \times N_m\}. \tag{4}$$

Пусть $B = [b_{ij}]$ – произвольная возмущающая матрица из множества $\mathcal{B}(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \alpha/2$, со строками B_i, $i \in N_n$. Тогда верны включения

$$N_i(t, A_i + B_i) \subseteq N_i(t, A_i), i \in N_n, t \in T, \tag{5}$$

Отсюда и из (1) вытекают равенства

$$\begin{aligned} f_i(t, A_i + B_i) &= \min_{j \in N_i(t, A_i + B_i)} (a_{ij} + b_{ij}) = \min_{j \in N_i(t, A_i)} (a_{ij} + b_{ij}) \\ &= \min_{j \in N_i(t, A_i)} (f_i(t, A_i) + b_{ij}) \\ &= f_i(t, A_i) + \min_{j \in N_i(t, A_i)} b_{ij}, \qquad i \in N_n, \end{aligned} \tag{6}$$

справедливые для любого решения $t \in T$.

Далее, полагая $t \in \overline{P}^n(A)$, рассмотрим два возможных случая.

В первом случае $t \in T \setminus Sl^n(A)$. Тогда в соответствии с определением множества Слейтера существует такое решение $t^* \in T$, что для любого индекса $i \in N_n$ верно неравенство

$$f_i(t, A_i) > f_i(t^*, A_i), \tag{7}$$

а потому согласно (4) — и неравенство $f_i(t, A_i) - f_i(t^*, A_i) \geqslant \alpha$. Это вместе с (6) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} f_i(t, A_i + B_i) - f_i(t^*, A_i + B_i) &= f_i(t, A_i) + \min_{j \in N_i(t, A_i)} b_{ij} - f_i(t^*, A_i) - \min_{j \in N_i(t^*, A_i)} b_{ij} \\ &\geqslant \alpha - 2\|B\| > 0, \qquad i \in N_n. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $t \underset{A+B}{\succ} t^*$.

Во втором случае $t \in Sl^n(A)$. Пусть $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V(t, N_n, A + B)$. Тогда согласно (5) выполняется включение $v \in V(t, N_n, A)$. Поэтому в силу регулярности задачи существует решение $t^* \in P^n(t, A)$ с условием $v_{I(t,t^*)} \in V(t^*, I(t, t^*), A)$, где $I(t, t^*) \neq \varnothing$, то есть $v_i \in N_i(t, A_i) \cap N_i(t^*, A_i)$ при любом $i \in I(t, t^*)$. Отсюда с учетом (1) и (6) получаем, что

$$\begin{aligned} f_i(t, A_i + B_i) &= a_{iv_i} + b_{iv_i} = f_i(t, A_i) + b_{iv_i} \\ &= f_i(t^*, A_i) + b_{iv_i} \geqslant f_i(t^*, A_i) + \min_{j \in N_i(t^*, A_i)} b_{ij} \\ &= f_i(t^*, A_i + B_i), \qquad i \in I(t, t^*). \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая включение $t^* \in P^n(t, A)$, легко видеть, что множество $N_n \setminus I(t, t^*)$ непусто и для каждого индекса $i \in N_n \setminus I(t, t^*)$ имеет место неравенство (7). Далее, рассуждая аналогично первому случаю, получаем неравенства

$$f_i(t, A_i + B_i) > f_i(t^*, A_i + B_i), \qquad i \in N_n \setminus I(t, t^*).$$

Отсюда, вследствие соотношений (8) вновь убеждаемся, что $t \underset{A+B}{\succ} t^*$.

Итак, справедлива формула

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \quad \forall t \in \overline{P}^n(A) \quad (t \in \overline{P}^n(A + B)).$$

Следовательно, задача $Z^n(A)$ устойчива.

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если векторная нетривиальная задача $Z^n(A)$, $n \geqslant 1$, устойчива, то*

$$\forall t \in Sl^n(A) \quad \exists t^* \in P^n(A) \quad (t \cap t^* \neq \varnothing). \tag{9}$$

Доказательство. Предположим, что формула (9) не выполняется, то есть существует такое решение $t^0 \in Sl^n(A)$, что для каждого $t \in P^n(A)$, а следовательно, и для каждого $t \in P^n(t^0, A)$, пересечение $t \cap t^0$ пусто. Тогда $N_i(t, A_i) \cap N_i(t^0, A_i) = \varnothing$ для любого индекса $i \in N_n$. Поэтому справедлива формула

$$\forall t \in P^n(t^0, A) \quad \forall v \in V(t^0, N_n, A) \quad (v_{I(t,t^0)} \notin V(t, I(t, t^0), A)),$$

свидетельствующая о том, что задача $Z^n(A)$ не является регулярной, и потому по теореме 1 не может быть устойчивой.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Если верна формула*

$$\forall t \in Sl^n(A) \quad \exists t^* \in P^n(t, A) \quad \forall i \in I(t, t^*) \quad (N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t^*, A_i)), \tag{10}$$

то векторная задача $Z^n(A)$, $n \geqslant 1$, устойчива.

Доказательство. Действительно, если для всех $i \in I(t, t^*)$ выполняется включение $N_i(t, A_i) \subseteq N_i(t^*, A_i)$, то $V(t, I(t, t^*), A) \subseteq V(t^*, I(t, t^*), A)$. Поэтому из (10) вытекает формула

$$\forall t \in Sl^n(A) \quad \exists t^* \in P^n(t, A) \quad \forall v \in V(t, N_n, A) \quad (v_{I(t,t^*)} \in V(t^*, I(t, t^*), A)),$$

на основании которой заключаем, что для каждого решения $t \in Sl^n(A)$ имеет место (2), то есть задача $Z^n(A)$ регулярна, а потому устойчива в силу теоремы 1.

Используя следствие 2, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Следствие 3. *Любое из следующих условий является достаточным для устойчивости векторной задачи $Z^n(A)$, $n \geqslant 1$:*

(1) $P^n(A) = Sl^n(A)$,

(2) *каждая строка матрицы A состоит из попарно различных элементов.*

Поскольку $P^1(A) = Sl^1(A)$, из следствия 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Скалярная задача $Z^1(A)$ устойчива при любом векторе $A \in \mathbf{R}^m$.*

Список литературы

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д., *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Наука, Москва, 1982.
2. Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К., Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации. *Журнал вычисл. матем. и матем. физики* (1996) **36**, №1, 66–72.
3. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N., Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization. *Discrete Appl. Math.* (1995) **58**, 169–190.
4. Сотсков Ю. Н., Сотскова Н. Ю., *Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами*. ОИПИ НАН Беларуси, Минск, 2004.
5. Сергиенко И. В., Шило В. П., *Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования*. Наукова думка, Киев, 2003.
6. Гирлих Э., Ковалев М. М., Кравцов М. К., Стабильность, устойчивость и квазиустойчивость многокритериальной задачи на системе подмножеств. *Кибернетика и системный анализ* (1999), № 5 111–124.
7. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ* (1995), № 4 137–143.
8. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P., Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Optimization* (2002) **51**, 645–676.
9. Емеличев В. А., Кричко В. Н., Формула радиуса устойчивости векторной l_∞-экстремальной траекторной задачи. *Дискретная математика* (2004) **16**, №1, 14–20.

Статья поступила 9.11.2007.