

СЖАТИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А. И. Михнюк

В последнее десятилетие в мире сформировалась тенденция, связанная с прикладным вейвлет-преобразованием. Вейвлеты широко применяются для распознавания образов; при обработке и синтезе различных сигналов, например, речевых, медицинских; для изучения свойств турбулентных полей и во многих других случаях. Особо большое развитие получила практика применения вейвлетов для решения задач сжатия и обработки изображений, являющихся нестационарными по своей природе.

Целью данной работы является анализ алгоритма вейвлет-фильтрации статических изображений типов портрет и пейзаж.

На рис.1 показана схема вейвлет-сжатия. Оператор вейвлет-фильтрации с собственными параметрами количеством фильтраций и базисной скейлинг-функцией состоит из набора фильтров и дециматоров. Операции высокочастотной и низкочастотной фильтраций, а также прореживание проводятся над изображением по двум ортогональным направлениям.

Наиболее эффективный алгоритм фильтрации базируется на быстром прямом вейвлет-преобразовании.

Для этого строится нормированная скейлинг-функция $(p(x))$ [1]. Она связывается с ее же сдвинутыми и сжатыми модификациями с помощью линейного преобразования с числом $2M$ коэффициентов hk^l .

$$\langle p(x) = \sum_{k=0}^{2M-1} \quad (1)$$

включающего двоичное изменение масштаба и целочисленные трансляции k . Целое число M определяет число коэффициентов hk^l и длину области задания вейвлета.

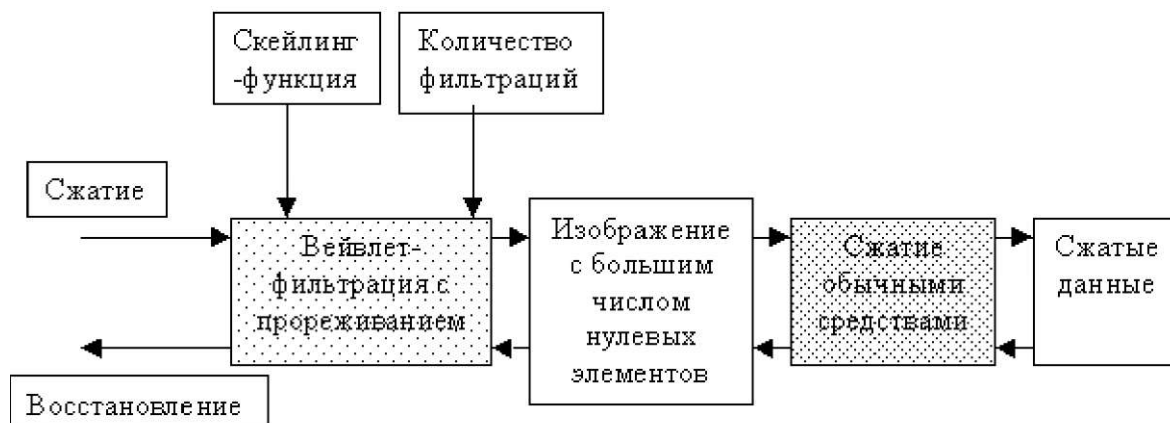


Рис. 1. Схема вейвлет-сжатия

Затем формируется фильтр h , подавляющий высокие частоты. Согласно (1), элементы этого фильтра:

$$h_{fr} = V \int_0^1 p(x) \phi(2x - \kappa) dx . \quad (2)$$

Далее на основе скейлинг-функции строится базисный вейвлет (или 'материнский вейвлет') $y/(x)$ по формуле:

$$y/(x) = \sum_{\kappa=0}^{2M-1} 2^{-\kappa} g_{\kappa} \phi(2X - \kappa), \quad (3)$$

где $g_{\kappa} = (-1)^{\kappa} h_{2M-\kappa-1}$ - элементы фильтра g , подавляющего низкие частоты.

Фильтры h и g позволяют разложить сигнал на две компоненты и прореживать их вдвое из-за сокращения частотного диапазона.

Используя найденные элементы фильтров, вводятся матрицы H и G :

$$H = \begin{pmatrix} h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 \\ & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 \\ & & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{-2} & g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 \\ & g_{-2} & g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 \\ & & g_{-2} & g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 \end{pmatrix}$$

Обозначив вектор исходных коэффициентов через x , его быстрое вейвлет-преобразование записывается в следующем виде:

$$\begin{matrix} x & J & U & H & x & J & U & H & x & - & l & U & \dots & H & H^{-l}x & H^N x \\ \wedge G & & \wedge G & & \wedge G & & & & & & & & & & JfG & \\ Gx & & GHx & & GH^2x & & - & & & & & & & & GH^{N-l}x & \end{matrix}$$

Каждое применение операторов H и G сокращает длину вектора вдвое, поэтому общее число операций линейно по длине входа.

Результатом преобразования является набор векторов $\{Gx, GHx, GH^2x, \dots, GH^{N-l}x, H^N x\}$.

Отфильтрованное изображение в каждом отдельном блоке содержит гораздо больше нулей, чем исходное. Далее оно сжимается обычным способом, например, используя алгоритм Хаффмана.

Обратное преобразование выполняется по следующей схеме:

$$\begin{matrix} x & \wedge & H & x & * & \wedge & H & x & \wedge & \dots & \wedge & H & x & \wedge & H^N x & \wedge & H^N x \\ \setminus G' & & & & & & & & & & & & & & \setminus C & & \\ Gx & & GHx & & GH^2x & & - & & & & & & & & GH^{N-l}x & \end{matrix}$$

Для исследования вейвлет-фильтрации были выбраны скейлинг-функции Хаара.

Фильтрация изображения производилась по формуле:

$$y = (f1 \cdot (F2 \cdot x))^J, \tag{4}$$

где x - матрица исходного изображения, y - матрица отфильтрованного изображения, $F1, F2$ - матрицы фильтров (ВЧ или НЧ).

Восстановление проводилось по формуле:

$$x = FF1^T \cdot (y \cdot FF2), \tag{5}$$

где $FF1, FF2$ - матрицы восстановления [2]:

$$FF = (F \cdot F^T)^{-1} \cdot F. \tag{6}$$

Для оценки качества восстановленного изображения были введены следующие величины.

Степень сжатия - это отношение размера исходного изображения к числу ненулевых элементов в выходном массиве.

Качество восстановленного изображения - это относительное число точек восстановленного изображения, значения яркости которых отличаются от яркости соответствующих точек исходного изображения меньше, чем на некоторое наперед заданное число (в нашем случае оно равно 5).

Отношение уровня сигнала к уровню шума:

$$q = 10 \cdot \log_{10} \frac{255^2 \cdot n^2}{\sum_{i=1, j=1}^{n, n} (x_{ij} - y_{ij})^2} \quad (7)$$

Результаты проведенного исследования вейвлет-фильтрации на изображениях типов портрет размером 256x256 пикселей и пейзаж размером 512x512 пикселей занесены в таблицу:

Таблица

N	Портрет (256x256)			Пейзаж (512x512)		
	Степень сжатия	Качество восстановления, %	Отношение уровня сигнала к уровню шума	Степень сжатия	Качество восстановления, %	Отношение уровня сигнала к уровню шума
1	4	87	38	4	93	39
2	11	75	34	14	85	36
3	19	65	31	41	80	34
4	23	58	29	76	73	32
5	24	51	28	97	62	30

На рис. 2 представлены гистограммы зависимостей степени сжатия, качества восстановления и отношения уровня сигнала к уровню шума для изображений типов портрет (левый столбец) и пейзаж (правый столбец) от количества фильтраций.

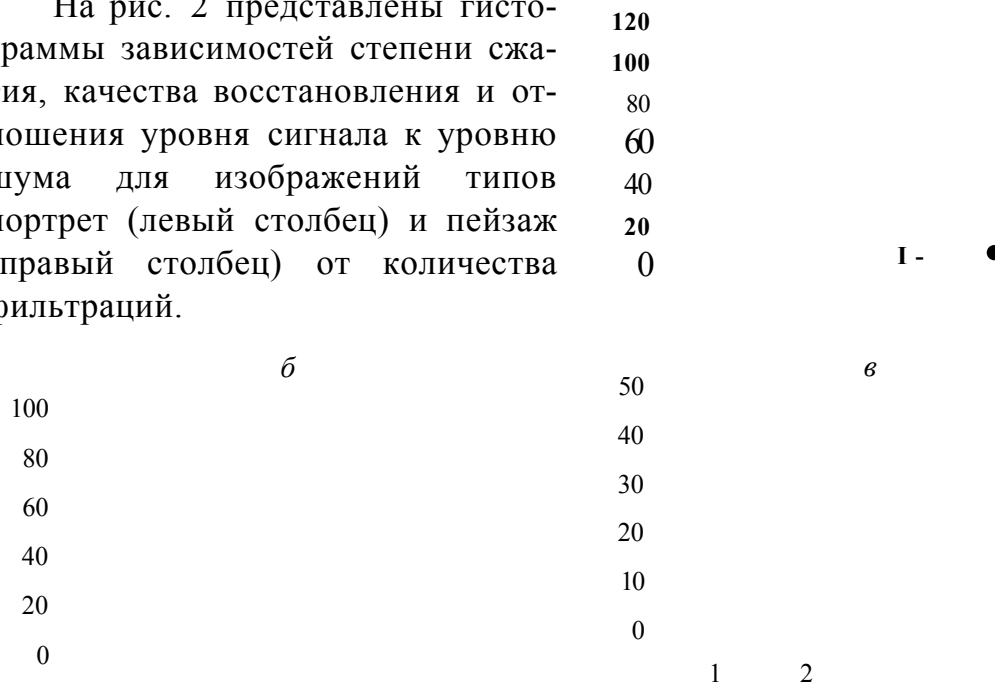


Рис. 2. Зависимости степени сжатия (а), качества восстановления (б) и отношения уровня сигнала к уровню шума в восстановленном изображении (в) от количества фильтраций



Рис. 3. Исходное и восстановленное после двух фильтраций изображения

На рис. 3 приведены исходное изображение (слева), и это же изображение, восстановленное после двух фильтраций.

Таким образом, с увеличением количества фильтраций растет степень сжатия изображения. Но в то же время уменьшается качество его восстановления, что проявляется в возникновении ступенчатой структуры восстановленного изображения. Из гистограмм видно, что с увеличением количества фильтраций скорость роста степени сжатия снижается, в то время, как качество восстановления уменьшается примерно с постоянной скоростью. Отсюда следует, что должно существовать пороговое количество фильтраций, при котором восстановленное изображение не содержит значительных искажений. Из анализа восстановленных после различного числа фильтраций изображений выявлено, что граничное значение для качества восстановления, при котором искажения можно считать приемлемыми, равно 80 %. Аналогичные исследования для отношения уровня сигнала к уровню шума дали результат $q = 35$. Из таблицы результатов следует достаточно проведение двух-трех фильтраций.

Литература

1. Дремин И. М., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук. 2001. Т. 171. № 5. С. 465-561.
2. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования // ВУС, 1999. С. 1-204.