Доклады Академии наук БССР

1985 XXIX № 4

УДК 517.925.32

Л. А. АЛЬСЕВИЧ

КВАДРАТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

(Представлено академиком АН БССР Н. П. Еругиным)

В данной работе продолжаются исследования, начатые в работах [1—5], устанавливается структура отражающей функции для некоторой квадратичной системы с непрерывными 2ω-периодическими коэффициентами, а также выясняется структура множества начальных данных периодических решений этой системы.

Для 2ω-периодической по t системы

$$\dot{x} = X(t, x), \quad (t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}, \tag{1}$$

решения которой однозначно определяются своими начальными данными, в работе [1] введено понятие отражающей функции (ОФ) $F(t, x) = \varphi(-t; 0, \varphi(0; t, x))$, где $\varphi(t; t_0, x_0)$ — общее решение системы (1) в форме Коши.

ОФ системы (1) может быть задана также формулой

$$F(t, x) = \varphi(-t; t, x) \tag{2}$$

(см. [2]).

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j - x_i \sum_{j=1}^{n} a_j(t) x_j \quad (i = \overline{1, n}) \tag{3}$$

с непрерывными на $\mathbf{R}$ и 2ω-периодическими коэффициентами $a_{ij}(t)$, $a_j(t)$ $i, j = \overline{1, n}$).

Наряду с системой (3) рассмотрим следующую линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j \quad (i = \overline{1, n}); \\ y_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(t) y_j. \end{cases} \tag{4}$$

Совокупность функций

$$x_i(t) = y_i(t)/y_{n+1}(t) \quad (i = \overline{1, n})$$

будет решением системы (3) тогда и только тогда, когда совокупность функций $y_i(t)$ $(i = \overline{1, n+1})$ является решением системы (4).

Пусть $\Phi(t) = (\varphi_{ij}(t))$ — фундаментальная, нормированная в нуле матрица линейной системы

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j \quad (i = \overline{1, n}).$$

Тогда общее решение системы (4) можно представить в виде

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_{ij}(t),\ y_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_{n+1,j}(t) + C_{n+1}\ (i = \overline{1,\ n}),$$

где $C_j\ (j = \overline{1,\ n+1})$ — произвольные постоянные, а

$$\varphi_{n+1,j}(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t a_k(\tau)\,\varphi_{kj}(\tau)\,d\tau \quad (j = \overline{1,\ n}).$$

Положим

$$\alpha_{ij}(t,\ t_0) = \frac{(-1)^{n+j}}{\det \Phi(t_0)} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t_0) & \ldots & \varphi_{1n}(t_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{j-1,1}(t_0) & \ldots & \varphi_{j-1,n}(t_0) \\ \varphi_{j+1,1}(t_0) & \ldots & \varphi_{j+1,n}(t_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1}(t_0) & \ldots & \varphi_{nn}(t_0) \\ \varphi_{i1}(t) & \ldots & \varphi_{in}(t) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$\beta_j(t,\ t_0) = \frac{(-1)^{n+j+1}}{\det \Phi(t_0)} \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t_0) & \ldots & \varphi_{1n}(t_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{j-1,1}(t_0) & \ldots & \varphi_{j-1,n}(t_0) \\ \varphi_{j+1,1}(t_0) & \ldots & \varphi_{j+1,n}(t_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1}(t_0) & \ldots & \varphi_{nn}(t_0) \\ \varphi_{n+1,1}(t_0) - \varphi_{n+1,1}(t) & \ldots & \varphi_{n+1,n}(t_0) - \varphi_{n+1,n}(t) \end{vmatrix} \tag{6}$$

$(i,\ j = \overline{1,\ n})$.

Лемма 1. *Общее решение системы (3) в форме Коши можно представить в виде*

$$x_i(t;\ t_0,\ x_0) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(t,\ t_0)\,x_j^0 \Big/ \Big[1 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t,\ t_0)\,x_j^0\Big] \quad (i = \overline{1,\ n}), \tag{7}$$

где $x_i^0 = x_i(t_0;\ t_0,\ x_0)\ (i = \overline{1,\ n})$.

Доказательство. Непосредственной подстановкой проверяется, что совокупность функций $x_i(t;\ t_0,\ x_0)\ (i = \overline{1,\ n})$, задаваемая формулой (7), есть решение системы (3). Так как это решение для любых $(t_0,\ x_0)$ удовлетворяет начальным данным, ибо $\alpha_{ij}(t_0,\ t_0) = 0$ при $i \neq j$, $\alpha_{ii}(t_0,\ t_0) = 1$, $\beta_j(t_0,\ t_0) = 0$, то решение, задаваемое формулой (7), есть общее решение системы (3) в форме Коши.

Лемма 2. *Система (3) обладает дробно-линейной ОФ, компоненты которой имеют вид*

$$F_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(-t,\ t)\,x_j \Big/ \Big[1 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(-t,\ t)\,x_j\Big] \quad (i = \overline{1,\ n}), \tag{8}$$

где $\alpha_{ij}(t,\ t_0)$, $\beta_j(t,\ t_0)$ $(i,\ j = \overline{1,\ n})$ *определяются формулами (5) и (6).*

Доказательство следует из вида общего решения (7) для системы (3) и формулы (2).

Следствие. Продолжимое на $[-\omega, \omega]$ *решение* $x(t)=(x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ системы (3) с непрерывными и 2ω-периодическими коэффициентами будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда $x_i(\omega)=\varkappa_i$ $(i=\overline{1,n})$ удовлетворяют алгебраической системе

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\varkappa_j \Big/ \Big[\ 1+\sum_{j=1}^{n}\ n_j\varkappa_j\ \Big] = \varkappa_i \quad (i=\overline{1,\ n}), \tag{9}$$

где $m_{ij}=\alpha_{ij}(-\omega,\ \omega),\ n_j=\beta_j(-\omega,\ \omega)\ (i,\ j=\overline{1,\ n})$.

Доказательство следует из вида (8) для ОФ системы (3) и теоремы 1 из [1].

Из следствия вытекает, что множество начальных данных 2ω-периодических решений системы (3) при $t=\omega$ совпадает с множеством решений алгебраической системы (9). Для ее исследования положим

$$1+\sum_{j=1}^{n} n_j\varkappa_j=\nu. \tag{10}$$

Тогда систему (9) можно переписать в виде

$$\begin{cases}(m_{11}-\nu)\varkappa_1+m_{12}\varkappa_2+\ \ldots\ +m_{1n}\varkappa_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m_{n1}\varkappa_1+m_{n2}\varkappa_2+\ \ldots\ +(m_{nn}-\nu)\varkappa_n=0.\end{cases} \tag{11}$$

Система (9) всегда имеет тривиальное решение $\varkappa=0$, $\varkappa=(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n)^T$. В дальнейшем нас будут интересовать все решения системы (9), а следовательно, и системы (11) при условии (10). Как известно (см., например, [6]), система (11) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. когда ν является корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} m_{11}-\nu & \ldots & m_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ m_{n1} & \ldots & m_{nn}-\nu\end{vmatrix}=0. \tag{12}$$

Пусть ν_s — корень кратности d_s уравнения (12) и $k_s=n-r_s$, где

$$r_s=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} m_{11}-\nu_s & \ldots & m_{1n}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ m_{n1} & \ldots & m_{nn}-\nu_s\end{pmatrix}.$$

Тогда (см., например, [7]) система

$$\begin{cases}(m_{11}-\nu_s)\varkappa_1+m_{12}\varkappa_2+\ \ldots\ +m_{1n}\varkappa_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ m_{n1}\varkappa_1+m_{n2}\varkappa_2+\ \ldots\ +(m_{nn}-\nu_s)\varkappa_n=0,\end{cases} \tag{13}$$

которая получается из системы (11) при $\nu=\nu_s$, имеет k_s-мерное множество решений

$$\varkappa_i=p_{i1}\lambda_1+\ \ldots\ +p_{ik_s}\lambda_s \quad (i=\overline{1,\ n}), \tag{14}$$

где $p_{ij}\ (i=\overline{1,\ n},\ j=\overline{1,\ k_s})$ — фундаментальная система решений этой системы, $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{k_s}$ — произвольные постоянные. Для того чтобы указанные $\varkappa_i$ $(i=\overline{1,\ n})$ были решениями системы (9), необходимо и достаточ но, чтобы они наряду с системой (13) удовлетворяли и условию (10), т. е. условию

$$\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} n_j p_{j1} + \ldots + \lambda_{k_s} \sum_{j=1}^{n} n_j p_{jk_s} = \nu_s - 1. \tag{15}$$

Из предыдущего следует, что для нахождения решений системы (9) можно поступить следующим образом: 1) найдем корни $\nu_1, \ldots, \nu_l$ уравнения (12), кратности которых соответственно равны $d_1, \ldots, d_l$ ($d_1 + \ldots + d_l = n$); 2) для каждого корня ν_s найдем общее решение системы (13) по формуле (14); 3) составим соотношение (15); 4) если $\nu_s = 1$, а $\sum_{j=1}^{n} n_j p_{j1} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} n_j p_{jk_s} = 0$, то формулы (14) при любых λ_j ($j = \overline{1, k_s}$) задают решения системы (9), которые заполняют k_s-мерную плоскость, содержащую начало координат; 5) если $\nu_s \neq 1$, а $\sum_{j=1}^{n} n_j p_{j1} = \ldots = \sum_{j=1}^{n} n_j p_{jk_s} = 0$, то система (9) не имеет решений, соответствующих корню ν_s; 6) если хотя бы одна из сумм $\sum_{j=1}^{n} n_j p_{jl}$ ($l = \overline{1, k_s}$), например $\sum_{j=1}^{n} n_j p_{j1}$, не равна нулю, то корню ν_s соответствуют решения вида (14), где λ_1 определяется из формулы (15). Эти решения заполняют (k_s— —1)-мерную плоскость. При этом если $\nu_s = 1$, то эта плоскость содержит начало координат, в противном случае она не содержит начала координат.

Приведенная схема и следствие позволяют доказать

Утверждение. *Множество начальных данных 2ω-периодических решений системы (3) при $t=\omega$ представляет собой объединение аффинных многообразий, сумма разностей которых не превосходит n, а их количество не превосходит $n+1$.*

Это утверждение можно конкретизировать при каждом заданном n. При $n=3$ справедлива следующая

Теорема. *Множество начальных данных 2ω-периодических решений системы (3) с непрерывными и 2ω-периодическими коэффициентами при $t=\omega$ есть объединение: 1) либо не более четырех точек; 2) либо прямой и не более двух точек; 3) либо двух скрещивающихся прямых; 4) либо плоскости и не более одной точки; 5) либо всех точек трехмерного пространства.*

Summary

The structure of a set of the initial data for periodic solutions of a special quadratic system is given.

Литература

1. Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.— Мн.: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1981.— 104 с. 2. Мироненко В. И.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 1099. 3. Альсевич Л. А.— Вестник БГУ. Сер. 1, 1982, № 3, с. 50—51. 4. Альсевич Л. А.— ДАН БССР, 1983, т. 27, № 1, с. 5—8. 5. Альсевич Л. А.— Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 8, с. 1446—1449. 6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.— М.: Наука, 1968.— 432 с. 7. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, 1979.— 512 с.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступило 21.03.84