И.С. Сягло

Теоретическая механика

Электронный учебник для студентов физического и радиофизического факультетов

Белорусский государственный университет
Физический факультет
Минск 2001 г.

Введение

Электронный учебник по теоретической механике составлен на основе учебного пособия И.С. Сягло «Теоретическая механика», изданного в 2000 году. Текст учебника повторяет текст пособия. В электронном варианте текст снабжен гиперссылками на формулы и панелью структурированного оглавления. Это дает возможность удобного и быстрого перемещения по всему учебнику.

Для более удобной работы с учебником я рекомендую отключить все лишние панели инструментов, оставив только командную панель (Command bar), и включить панель закладок (Bookmarks). Это увеличит площадь экрана, доступную тексту, и позволит пользоваться оглавлением, расположенным на панели закладок. Иметь на экране командную панель удобно для возвращения при помощи стрелки «обратно» на исходную страницу после перехода по гиперссылке. По умолчанию при открытии учебника все панели инструментов отключены, панель закладок включена. Для справки привожу список клавиш для включения и отключения различных панелей.

- F5 – закладки (bookmarks)
- F6 – значки страниц (thumbnails)
- F7 – строка меню (menu bar)
- F8 – командная панель (command bar)
- F9 – панель инструментов (tool bar)

Автор учебника, доцент И.С. Сягло

Оглавление

Глава 1

Векторная форма механики

1.1. Законы Ньютона

Законы классической механики установлены Ньютоном и носят его имя. Это известные три закона.

Закон 1 *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Закон 2 *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон 3 *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие; иначе — взаимодействия двух тел друг с другом равны и направлены в противоположные стороны.*

Под состоянием покоя или равномерного прямолинейного движения Ньютон понимал покой или движение относительно абсолютного пространства. Сейчас установлено, что движение относительно абсолютного пространства никакими физическими опытами обнаружить невозможно. Движение можно рассматривать только относительно некоторой системы отсчета, связанной с телами. Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется *инерциальной системой отсчета.*

Второй закон Ньютона связывает ускорение тела с действующей на него силой:

$$m\vec{w} = \vec{f}. \tag{1.1}$$

Третий закон Ньютона отражает связь между действующими на тела силами при их взаимодействии:

$$\vec{f}_{1,2} = -\vec{f}_{2,1}. \tag{1.2}$$

Законы Ньютона являются фундаментом классической механики, которая позволяет описывать многообразные физические явления.

Однако ее законы неприменимы в микромире, где господствует квантовая механика. Они не могут использоваться для описания движения тел, скорость которых сравнима со скоростью света. Здесь применяется механика специальной теории относительности. Для изучения строения галактик и вселенной в целом базовой теорией служит общая теория относительности. Так, согласно общей теории относительности, пространство–время является искривленным, а не плоским, как в классической механике. Однако в той области масштабов и скоростей, в которых классическая механика применима, она является точной наукой. Со времен Ньютона развитие механики шло по пути уточнения понятий, лежащих в ее основании, и по пути развития математического аппарата, позволяющего решать все более сложные задачи.

1.2. Идеализации классической механики

Классическая механика описывает не реальные тела, а некоторые модели, которые хорошо отражают поведение реальных тел. Укажем основные модели классической механики. Простейшей идеальной моделью классической механики является *материальная точка.* Под материальной точкой понимается любое тело, размерами кото-

рого можно пренебречь при изучении его движения. Несколько тел, каждое из которых можно считать материальной точкой, составляют *систему материальных точек.* Система материальных точек, расстояния между которыми не меняются, называется *твердым телом.*

В классической механике также постулируются свойства пространства и времени. Пространство считается *безграничным, эвклидовым, однородным и изотропным.* В эвклидовом пространстве выполняются аксиомы геометрии Эвклида и можно ввести декартову систему координат. Однородность пространства означает, что все точки пространства равноправны: *в пространстве нет выделенных точек.* Изотропность пространства — это свойство равноправности всех направлений пространства: *в пространстве нет выделенных направлений.* Время в классической механике постулируется однородным и не зависящим от движения системы отсчета, *то есть все моменты времени равноправны и оно протекает одинаково во всех системах отсчета.* Эти постулаты хорошо отражают свойства реального пространства и времени для скоростей и размеров тел, с которыми имеет дело классическая механика.

1.3. Принцип относительности Галилея

Если есть одна инерциальная система отсчета, то любая другая система отсчета, движущаяся относительно нее равномерно и прямолинейно, также будет инерциальной. Еще Галилей заметил, что равномерное и прямолинейное движение системы отсчета не влияет на механические опыты, проводимые в ней. Принцип относительности Галилея можно сформулировать следующим образом:

Законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Так как время течет одинаково во всех системах отсчета, то при переходе из одной системы отсчета в другую координаты материальной точки преобразуются по формулам:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t, \quad t = t'. \tag{1.3}$$

Формулы (1.3) называются *преобразованиями Галилея.* Дифференцируя $\vec{r}$ по времени, получим *закон сложения скоростей* классической механики

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}. \tag{1.4}$$

Здесь $\vec{v}$ и $\vec{v}\,'$ — соответственно скорости материальной точки в покоящейся и движущейся системах отсчета.

Уравнения второго закона Ньютона (1.1) не изменяются при преобразованиях Галилея. Действительно, из формулы (1.4) следует, что $\vec{w} = \vec{w}'$. Масса и сила в классической механике не зависят от системы отсчета. Поэтому преобразование уравнения (1.1) к движущейся системе отсчета приводит опять к уравнению второго закона Ньютона

$$m\vec{w}' = \vec{f}. \tag{1.5}$$

Неизменность, или инвариантность, уравнений второго закона Ньютона при преобразованиях Галилея является математической формулировкой принципа относительности Галилея.

1.4. Импульс, момент импульса, энергия материальной точки

Так как масса — величина постоянная, то уравнение (1.1) можно записать в форме

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{f}. \tag{1.6}$$

Величина $\vec{p} = m\vec{v}$ называется *импульсом*, или *количеством движения* материальной точки. Используя определение импульса, второй

закон Ньютона записываем в форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \vec{f}. \tag{1.7}$$

Изменение импульса материальной точки вызывается действием на нее силы. В уравнении (1.7) введено общепринятое в классической механике обозначение, когда полная производная по времени обозначается точкой над буквой. Соответственно вторая производная по времени обозначается двумя точками над буквой.

Умножая уравнение (1.7) слева векторно на радиус-вектор $\vec{r}$, получаем

$$\dot{\vec{M}} = \vec{K}, \tag{1.8}$$

где вектор $\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ называется *моментом импульса* материальной точки, а вектор $\vec{K} = [\vec{r} \times \vec{f}]$ — *моментом силы*. Изменение момента импульса материальной точки вызывается моментом действующей на нее силы.

Если уравнение второго закона Ньютона (1.1) умножить скалярно на $d\vec{r}$ и учесть, что $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, то можно получить соотношение

$$d(\frac{mv^2}{2}) = dT = \vec{f} d\vec{r}. \tag{1.9}$$

Величина $T = \frac{1}{2}mv^2$ называется *кинетической энергией* материальной точки, а произведение $\vec{f}d\vec{r}$ — *работой силы* на перемещении $d\vec{r}$. Изменение кинетической энергии материальной точки равно работе действующей на нее силы. Если элементарная работа силы является дифференциалом некоторой функции

$$\vec{f}d\vec{r} = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = -dU, \tag{1.10}$$

то эта функция называется *потенциальной энергией*. В этом случае из уравнения (1.9) вытекает закон сохранения механической энергии, равной сумме потенциальной и кинетической энергии

$$E = T + U = \text{const}. \tag{1.11}$$

Силы, для которых выполняется усдовие (1.10), называются *потенциальными силами*. Проекции потенциальной силы на оси координат выражаются через частные производные от потенциальной энергии:

$$f_x = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{1.12}$$

1.5. Система материальных точек

Несколько тел, каждое из которых можно рассматривать как материальную точку, составляют систему материальных точек. Для

каждой материальной точки можно записать уравнение второго закона Ньютона

$$m_a \vec{w}_a = \vec{f}_a^{ext} + \sum_{b \neq a} \vec{f}_{ab}^{int}. \tag{1.13}$$

В уравнении (1.13) индексы a, b дают номер материальной точки. Действующие на материальную точку силы разделены на внешние ext и внутренние int. Внешние силы — это силы, действующие со стороны тел, не входящих в систему материальных точек. Внутренние силы — это силы, действующие на материальную точку со стороны других тел, составляющих систему материальных точек. Здесь $\vec{f}_{ba}^{int}$ — сила, действующая на материальную точку, индекс которой a, со стороны материальной точки с номером b.

Из уравнений (1.13) вытекают несколько важных законов. Если просуммируем их по всем материальным точкам системы, то получим

$$\frac{d}{dt} \sum_a (m_a \vec{v}_a) = \sum_a \vec{f}_a^{ext} + \sum_a \sum_{b \neq a} \vec{f}_{ab}^{int}. \tag{1.14}$$

Величина

$$\vec{P} = \sum_a (m_a \vec{v}_a) = \sum_a \vec{p}_a \tag{1.15}$$

называется *импульсом* системы материальных точек. Импульс системы материальных точек равен сумме импульсов отдельных мате-

риальных точек. В уравнении (1.14) двойная сумма для внутренних сил обращается в нуль. Для каждой пары материальных точек в нее входят силы, которые по третьему закону Ньютона равны и противоположно направлены. Для каждой пары векторная сумма этих сил обращается в нуль. Поэтому равна нулю и сумма для всех сил. В результате получим

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_a \vec{f}_a^{ext}. \tag{1.16}$$

Уравнение(1.16) выражает закон изменения импульса системы материальных точек. Изменение импульса системы материальных точек вызывается только внешними силами. Если на систему не действуют внешние силы, то импульс системы материальных точек сохраняется. Систему материальных точек, на которую не действуют внешние силы, называют *изолированной*, или *замкнутой* системой материальных точек.

Аналогичным образом для каждой материальной точки записываются уравнения (1.8) моментов импульсов

$$\frac{d\vec{M}_a}{dt} = \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{ext} + \sum_{b \neq a} \vec{r}_a \times \vec{f}_{ba}^{int}. \tag{1.17}$$

При суммировании уравнений (1.17) по всем материальным точкам

системы материальных точек сумма моментов внутренних сил обращается в нуль и получается закон изменения момента импульса системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}^{ext},$$
$$\vec{M} = \sum_a \vec{M}_a = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{p}_a, \tag{1.18}$$
$$\vec{K}^{ext} = \sum_a \vec{K}_a^{ext} = \sum_a \vec{r}_a \times \vec{f}_a^{ext},$$

где введены обозначения: $\vec{M}$ — момент импульса системы материальных точек, $\vec{K}^{ext}$ — момент внешних сил. Изменение момента импульса системы материальных точек вызывается внешними силами, действующими на систему. Для замкнутой системы материальных точек момент импульса сохраняется.

Записывая уравнения изменения кинетической энергии (1.9) для всех материальных точек системы и суммируя их по всем материальным точкам, получим

$$d(\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}) = dT = \sum_a \vec{f}_a^{ext} d\vec{r}_a + \sum_a \sum_{b \neq a} \vec{f}_{ba}^{int} d\vec{r}, \tag{1.19}$$

где $T = \Sigma_a \frac{1}{2} m_a v_a^2$ — кинетическая энергия системы материальных точек. В формуле (1.19) работа внутренних сил не обращается в нуль.

Если сумма работ внешних и внутренних сил является полным дифференциалом, то из уравнения (1.19) вытекает закон сохранения полной механической энергии

$$E = T + U(\vec{r}_a) = \text{const}. \tag{1.20}$$

Потенциальная энергия зависит от координат всех материальных точек. Силу, действующую на материальную точку с номеромa, можно найти по формулам

$$f_{xa} = -\frac{\partial f}{\partial x_a}, \quad f_{ya} = -\frac{\partial f}{\partial y_a}, \quad f_{za} = -\frac{\partial f}{\partial z_a}, \tag{1.21}$$

где производные берутся по координатам материальной точкиa.

1.6. Система отсчета центра инерции

Пусть имеется система отсчета, которая движется поступательно со скоростью $\vec{V}$ относительно неподвижной системы отсчета. Скорость $\vec{V}$ может зависеть от времени. Механические величины в подвижной системе отсчета будем отмечать штрихами. Скорости материальной точки с номером a в двух системах отсчета связаны соотношением

$$\vec{v}_a = \vec{v}\,'_a + \vec{V}. \tag{1.22}$$

Подставляя (1.22) в формулу (1.15), получим:

$$\vec{P} = \vec{P}\,' + \mu\vec{V}, \quad \mu = \sum_a m_a. \tag{1.23}$$

Можно найти такую систему отсчета, в которой импульс системы материальных точек $\vec{P}\,'$ равен нулю. Про такую систему отсчета естественно сказать, что это система отсчета, в которой система материальных точек как целое покоится. Это вовсе не означает, что скорости всех материальных точек равны нулю. Полагая в формуле (1.23) $\vec{P}\,'$ равным нулю, находим скорость такой системы отсчета

$$\vec{V} = \frac{1}{\mu}\sum_a m_a\vec{v}_a = \frac{d}{dt}(\frac{1}{\mu}\sum_a m_a\vec{r}_a). \tag{1.24}$$

Из соотношения (1.24) видно, что эта скорость может быть выражена как производная от следующего радиуса-вектора

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu}\sum_a m_a\vec{r}_a. \tag{1.25}$$

Радиус-вектор $\vec{R}$ указывает на точку, которая называется *центром инерции системы материальных точек*. Из определения центра инерции видно, что он совпадает с центром масс системы материальных точек.

Таким образом, всегда можно найти систему отсчета, в которой импульс системы материальных точек равен нулю. Эта система отсчета движется со скоростью центра инерции системы материальных точек и называется *системой отсчета центра инерции.* Из (1.23) видно, что импульс системы отсчета записывается через скорость центра инерции и массу системы материальных точек так же, как импульс одной материальной точки:

$$\vec{P} = \mu \vec{V}_{\text{ц.и.}}, \tag{1.26}$$

масса которой равна массе системы материальных точек и скорость которой равна скорости центра инерции. Закон изменения импульса системы материальных точек (1.16) тогда запишется как второй закона Ньютона для материальной точки:

$$\mu \dot{\vec{V}} = \sum_a \vec{f}_a^{ext}. \tag{1.27}$$

Центр инерции системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна массе системы материальных точек и к которой приложена сила, равная сумме действующих на систему материальных точек внешних сил. В частности, если сумма внешних сил равна нулю, то центр инерции движется равномерно и

прямолинейно, и система отсчета центра инерции является инерциальной системой отсчета.

Рассмотрим преобразование кинетической энергии при переходе в систему отсчета центра инерции. Подставляя закон сложения скоростей (1.22) в выражение для кинетической энергии системы, получим

$$T = T' + \frac{\mu V_{\text{ц.и.}}^2}{2} + \vec{P}\,'\vec{V}_{\text{ц.и.}}.$$

Так как в системе отсчета центра инерции импульс системы материальных точек равен нулю, то последнее слагаемое пропадает, и мы имеем

$$T = T' + \frac{\mu V_{\text{ц.и.}}^2}{2}. \tag{1.28}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии движения системы со скоростью центра инерции и кинетической энергии T' внутреннего движения материальных точек в системе отсчета центра инерции. Так как потенциальная энергия не зависит от системы отсчета, то аналогичное разбиение на внутреннюю энергию и энергию движения системы как целого будет справедливо для полной механической энергии:

$$E = E' + \frac{\mu V_{\text{ц.и.}}^2}{2}. \tag{1.29}$$

В системе отсчета центра инерции момент импульса не зависит от выбора начала координат. Покажем это. Пусть начало координат смещено из точки 0 в точку $0'$, как показано на рис. 1.1.

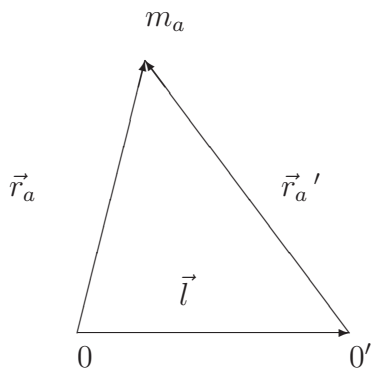

Рис. 1.1

Тогда радиусы-векторы материальной точки m_a относительно двух начал координат связаны равенством

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a{}' + \vec{l}. \tag{1.30}$$

Подставляя это выражение для $\vec{r}_a$ в определение (1.18) момента импульса системы материальных точек, получим

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{l} \times \vec{P}. \tag{1.31}$$

Здесь $\vec{M}'$ — момент импульса системы материальных точек относительно нового начала координат. Так как в системе отсчета центра

инерции импульс системы материальных точек $\vec{P}$ равен нулю, то второе слагаемое в (1.31) обращается в нуль и $\vec{M} = \vec{M}\,'$.

Рассмотрим преобразование момента импульса системы материальных точек при переходе в систему отсчета центра инерции. Пусть в некоторый момент времени начала координат двух систем отсчета совпадают. Тогда $\vec{r}_a = \vec{r}_a\,'$. Скорости материальных точек относительно двух систем отсчета связаны соотношением (1.22). Подставляя (1.22) в определение момента импульса (1.18) и учитывая, что движущаяся система отсчета — это система отсчета инерции, получим

$$\vec{M} = \vec{M}\,' + \mu\vec{R} \times \vec{V}_{\text{ц.и.}}. \tag{1.32}$$

Поскольку в системе отсчета центра инерции $\vec{M}\,'$ не зависит от выбора начала координат, то это равенство будет справедливо в любой другой момент времени, когда начала координат двух систем отсчета уже не будут совпадать. Второе слагаемое в (1.32) дает момент импульса системы материальных точек, движущихся как целое со скоростью центра инерции. Таким образом, как и в случае с энергией, момент импульса системы материальных точек представляется в виде суммы собственного момента и момента импульса от движения системы материальных точек со скоростью центра инерции.

1.7. Задачи

1.1. По заданным уравнениям движения точки найти ее траекторию, начальное (при $t = 0$) положение, скорость и ускорение:

(a) $x = t^3 + 2, \quad y = 3 - t^3$;

(b) $x = 3\cos t, \quad y = 3 - \sin t$;

(c) $x = 2\cos 2t, \quad y = 3\sin t$;

(d) $x = a\cos t^2, \quad y = a\sin t^2, z = bt$.

1.2. Точка движется с постоянной по величине скоростью в плоскости XOY. Вектор скорости образует с осью OX переменный угол, равный αt ($\alpha = \text{const}$). Определить траекторию точки и величину ее ускорения, если в начальный момент времени точка находилась в начале координат.

1.3. Найти проекции единичных базисных векторов цилиндрической системы координат на декартовы оси.

1.4. Найти проекции скорости материальной точки на базис цилиндрической системы координат и квадрат скорости.

1.5. Найти проекции единичных базисных векторов сферической системы координат на декартовы оси.

1.6. Найти проекции скорости материальной точки на базис сферической системы координат и квадрат скорости.

1.7. Найти проекции ускорения материальной точки на базис цилиндрической системы координат.

1.8. По заданным в полярной системе координат уравнениям движения материальной точки найти ее траекторию, скорость и ускорение:

(a) $r = a(1 + t^2), \quad \varphi = \operatorname{arctg} t$;

(b) $r = 2a\cos(kt/2), \quad \varphi = kt/2$.

1.9. Материальная точка описывает кардиоиду $r = 2a\cos^2(\varphi/2)$ так, что ее радиус-вектор вращается с постоянной угловой скоростью. Найти скорость и ускорение материальной точки как функцию угла.

1.10. Материальная точка движется в плоскости по логарифмической спирали $r = \exp(k\varphi)$, причем $\varphi = bt$. Найти величины ее скорости и ускорения как функцию r.

1.11. Найти в полярных координатах уравнение кривой, которую опишет корабль, сохраняющий постоянный угол пеленга α на непо-

движную точку. (Угол пеленга — это угол между направлением на неподвижную точку и вектором скорости.)

1.12. Какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным углом к географическому меридиану?

Глава 2

Вариационные принципы механики

2.1. Связи, обобщенные координаты.

Часто в механике движение тел ограничено другими телами. Ограничения, которые не зависят от движения тел и от действующих на них сил, называются *связями.* Например, при движении тела по наклонной плоскости связью будет наклонная плоскость. Для математического маятника связью является подвес, который заставляет материальную точку двигаться по окружности с радиусом l. Связи ограничивают значения, которые могут принимать координаты. Во многих случаях ограничения, налагаемые связями, можно записать в виде алгебраических уравнений для координат материальных точек. Такие связи называются *голономными.*

Пусть система содержит N материальных точек, координаты которых задаются радиусами-векторами $\vec{r}_a$, где индекс a пробегает значения $1, 2, \ldots, N$. В отсутствие связей для задания положений всех материальных точек нужно задать $3N$ координат, по три координаты на каждую материальную точку. Если на систему наложены k голономных связей, то их можно записать с помощью k уравнений

$$f_i(\vec{r}_a, t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.1}$$

Из уравнений (2.1) k координат можно выразить через другие координаты. Поэтому остается $s = 3N - k$ независимых координат. Число независимых координат, необходимых для задания положения системы материальных точек, называется *числом степеней свободы.* Если в уравнения связей не входит время, то такие связи называются *стационарными*, или *склерономными.*

Вместо использования $3N$ декартовых координат, из которых только s являются независимыми, можно ввести s независимых координат $q_i, (i = 1, 2, \ldots, s)$. Выбор этих координат должен удовлетворять условиям, чтобы они однозначно определяли положение системы материальных точек и чтобы их изменение приводило к перемещению системы, совместимому со связями. В остальном их выбор ничес не ограничен. Определенные таким образом координаты q_i, называются

обобщенными координатами. Преобразование от декартовых координат к обобщенным координатам можно записать в векторной форме:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(q_i, t). \tag{2.2}$$

Подстановка выражений (2.2) в уравнения (2.1) должна обращать их в тождества. Для стационарных связей время не входит в выражения (2.2). Бывает удобно ввести обобщенные координаты и при отсутствии связей. Например, сферические или цилиндрические координаты для одной материальной точки — это частный случай обобщенных координат.

Дифференцируя выражения (2.2) по времени, получим

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}_a = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Для стационарных связей последнее слагаемое в формуле (2.3) отсутствует:

$$\vec{v}_a = \sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}\dot{q}_i. \tag{2.4}$$

Производные от обобщенных координат по времени $\dot{q}_i$ называются *обобщенными скоростями.*

2.2. Принцип виртуальных перемещений и принцип Даламбера

В динамике связи можно учесть с помощью введения сил реакции связей. Силы реакции связей $\vec{f}_a^R$ наряду с действующими, или активными силами $\vec{f}_a^A$ записывают в правую часть уравнений второго закона Ньютона:

$$m_a \vec{w}_a = \vec{f}_a^A + \vec{f}_a^R. \tag{2.5}$$

Силы реакции связей заранее неизвестны и определяются во время интегрирования уравнений движения. Поэтому при наличии связей решение задач механики с помощью уравнений второго закона Ньютона усложняется тем, что необходимо интегрировать больше уравнений, чем число степеней свободы, и тем, что приходится определять силы реакции связей. Рассмотрим, как можно обойти эти и некоторые другие трудности.

Вначале рассмотрим случай, когда материальные точки покоятся. Это возможно, если сумма сил, действующих на каждую материальную точку, равна нулю:

$$\vec{f}_a^A + \vec{f}_a^R = 0. \tag{2.6}$$

Введем понятие виртуального перемещения. *Виртуальное перемеще-*

ние — это мысленное бесконечно малое перемещение, которое в данный момент времени материальная точка может совершить, не нарушая связей. Чтобы отличать виртуальные перемещения от реальных перемещений материальных точек, будем обозначать их греческой буквой δ, то есть виртуальное перемещение материальной точки с индексом a обозначим $\delta\vec{r}_a$, а реальное бесконечно малое ее перемещение по-прежнему будет обозначаться как $d\vec{r}_a$.

Домножая равенства (2.6) на $\delta\vec{r}_a$ и суммируя по всем материальным точкам системы, получим

$$\sum_a \vec{f}_a^A \delta\vec{r}_a + \sum_a \vec{f}_a^R \delta\vec{r}_a = 0. \tag{2.7}$$

Первое слагаемое в (2.7) представляет работу активных сил на виртуальных перемещениях. Это — работа, которую совершили бы активные силы, если бы эти перемещения произошли. Ее называют*виртуальной работой* активных сил. Соответственно второе слагаемое в (2.7) дает виртуальную работу сил реакции связей. Существует большое количество связей, для которых виртуальная работа сил реакции связей равна нулю. Такие связи называются *идеальными связями.* Идеальными являются связи, осуществляемые нерастяжимыми нитями и в пренебрежении сил трения связи, обеспечиваемые твердыми телами.

Для идеальных связей второе слагаемое в равенстве (2.7) равно нулю. В результате получаем уравнение

$$\sum_a \vec{f}_a^A \delta\vec{r}_a = 0. \tag{2.8}$$

В отличие от равенства (2.7), которое вследствие выполнения условий равновесия (2.6) представляет собой тождество , выражение (2.8) является уравнением. Так как при наличии связей не все $\delta\vec{r}_a$ независимы, то из (2.8) не следуют условия $\vec{f}_a^A = 0$. Эти условия попрежнему выполняются в отсутствие связей, когда $\delta\vec{r}_a$ независимы. Уравнение (2.8) позволяет найти условия равновесия системы материальных точек как в отсутствие связей, так и при их наличии. При этом нет необходимости рассматривать силы реакции связей. Уравнение (2.8) формулируется как *принцип виртуальных перемещений*:

В положении равновесия работа активных сил на виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип виртуальных перемещений является основным принципом, применяемым в решении задач статики в механике.

Проведенные для статики рассуждения обобщаются и на случай динамики. Для этого необходимо в уравнении (2.5) перенести $m_a\vec{w}_a$ направо и проделать те же операции, что и в статике. В результате

получается уравнение

$$\sum_a (\vec{f}_a^A - m_a \vec{w}_a)\delta\vec{r}_a = 0. \tag{2.9}$$

Если формально ввести силы инерции $\vec{I}_a = -m_a\vec{w}_a$, то его можно записать в таком же виде, как уравнение принципа виртуальных перемещений:

$$\sum_a (\vec{f}_a^A + \vec{I}_a)\delta\vec{r}_a = 0. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.10) формулируется как *принцип Даламбера*:

Работа активных сил вместе с силами инерции на виртуальных перемещениях равна нулю.

Принцип Даламбера является основным принципом динамики систем материальных точек со связями. В отсутствие связей все $\delta\vec{r}_a$ независимы, и из принципа Даламбера получаются уравнения второго закона Ньютона.

Виртуальные перемещения $\delta\vec{r}_a$ можно выразить через изменения обобщенных координат, которые обозначим δq_i. Эти бесконечно малые изменения обобщенных координат рассматриваются для фиксированного момента времени и называются *вариациями обобщенных координат*. Посчитаем дифференциал от выражений (2.2) при фиксированном t. Так как время фиксировано и любое изменение обоб-

щенных координат приводит к изменению $\vec{r}_a$, совместимых со связями, то полученные бесконечно малые изменения $\vec{r}_a$ являются виртуальными перемещениями. В результате виртуальные перемещения выражаются через вариации обобщенных координат:

$$\delta\vec{r}_a = \sum_i \frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}\delta q_i. \tag{2.11}$$

Подставляя выражения для $\delta\vec{r}_a$ из (2.11) в уравнение (2.9), получим еще одно выражение для принципа Даламбера:

$$\sum_a (\vec{f}_a^A - m_a\vec{w}_a)\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i}\delta q_i = 0. \tag{2.12}$$

Поскольку вариации обобщенных координат δq_i независимы, то из (2.12) получается система уравнений

$$\sum_a (\vec{f}_a^A - m_a\vec{w}_a)\frac{\partial\vec{r}_a}{\partial q_i} = 0. \tag{2.13}$$

В системе уравнений (2.13) нет сил реакции связей, и число уравнений равно числу степеней свободы. В дальнейшем во все уравнения будут входить только активные силы, и мы специально не будем отмечать это.

2.3. Принцип Гамильтона

Использование принципа Даламбера позволяет не учитывать силы реакции связей и дает возможность применять произвольные обобщенные координаты. Однако, получение уравнений в обобщенных координатах может представлять трудности из-за наличия в (2.13) скалярных произведений. С помощью преобразований координат уравнения (2.13) можно преобразовать к виду, содержащему только скалярные функции обобщенных координат. Мы укажем другой путь, когда вначале от принципа Даламбера переходят к интегральному вариационному принципу. Получение уравнений механики из вариационного принципа позволило получить много важных результатов. В дальнейшем вариационные принципы стали использовать и в других областях теоретической физики.

Рассмотрим случай, когда силы имеют потенциал. Тогда виртуальная работа сил запишется в форме

$$\sum_a \vec{f}_a \delta \vec{r}_a = -\delta U(\vec{r}_a(q_i), t). \tag{2.14}$$

В общем случае потенциальная энергия может зависеть от времени. Поскольку вариация вычисляется при фиксированном t, это никак не сказывается на выводах. При использовании обобщенных коор-

динат потенциальная энергия в конечном счете является функцией обобщенных координат. Тогда вариация потенциальной энергии будет иметь вид

$$\delta U(q_i, t) = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i. \tag{2.15}$$

По аналогии с выражениями (1.12) частные производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам называют*обобщенными силами:*

$$f_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \tag{2.16}$$

Для того чтобы преобразовать слагаемые с ускорениями к вариации от скалярной функции, предварительно проинтегрируем уравнение (2.9) по времени

$$\int_{t_1}^{t_2} (\sum_a (\vec{f}_a - m_a \vec{w}_a) \delta \vec{r}_a)\, dt = 0. \tag{2.17}$$

В сумме,содержащей ускорения, рассмотрим одно слагаемое, например $w_x \delta x$. Индекс a и массу временно опустим. Интеграл от этого слагаемого вычислим по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} w_x \delta x\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dv_x}{dt} \delta x\, dt = v_x \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v_x \frac{d(\delta x)}{dt}\, dt. \tag{2.18}$$

Будем считать, что начальное в момент времени t_1 и конечное в момент времени t_2 положения системы материальных точек заданы. Поэтому δx для этих моментов времени равно нулю, и первое слагаемое в (2.18) обращается в нуль. Так как вариации координат рассматриваются для фиксированных моментов времени, то производную по времени и варьирование можно переставить местами. Второе слагаемое в (2.18) преобразуется к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} v_x \frac{d(\delta x)}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} v_x \delta v_x\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(\frac{1}{2} v_x^2)\, dt. \tag{2.19}$$

Такие же преобразования можно произвести для всех координат всех материальных точек. Учтем еще выражение (2.14) виртуальной работы через потенциальную функцию. В результате для интеграла (2.17) получим

$$\int_{t_1}^{t_2} (\sum_a (\vec{f}_a - m_a \vec{w}_a) \delta \vec{r}_a)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(-U + \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2})\, dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = 0. \tag{2.20}$$

Разность кинетической и потенциальной энергии, которая входит в последний из интегралов в формуле (2.20), называется *функцией Лагранжа* и обозначается буквой L. Функция Лагранжа зависит от координат и скоростей материальных точек. При переходе к обобщенным координатам она выражается через обобщенные координаты и

обобщенные скорости:

$$L = T - U = L(\vec{v}_a, \vec{r}_a, t) = L(\dot{q}_i, q_i, t). \tag{2.21}$$

Время может и не входить в функцию Лагранжа. Интеграл из (2.20) обозначается буквой S и называется *действием:*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_i, q_i, t)\, dt. \tag{2.22}$$

После введения этих обозначений условие (2.20) принимает вид

$$\delta S = 0. \tag{2.23}$$

Вариация действия равна нулю. Это означает, что действие имеет экстремум, принимает наибольшее или наименьшее значение, если в интеграл (2.22) в качестве зависимости $q_i(t)$ подставить функции, описывающие движение механической системы. Поэтому условие экстремума действия можно использовать для отыскания закона движения системы материальных точек.

Теперь можно сформулировать интегральный принцип, называемый *принципом Гамильтона:*

Движение механической системы за конечный промежуток времени от t_1 до t_2 происходит таким образом, что действие имеет при этом экстремум.

Для консервативных систем принцип Гамильтона эквивалентен законам Ньютона. Поэтому он может считаться основным принципом механики, из которого выводятся все уравнения механики. Это — вариационный принцип, так как зависимость обобщенных координат от времени $q_i(t)$ находится из условия минимума интеграла действия. Одним из преимуществ применения принципа Гамильтона является то, что в него входят только скалярные функции, которые можно пересчитать к произвольным обобщенным координатам. Поэтому уравнения, которые вытекают из вариационного принципа, оказываются сразу записанными в обобщенных координатах. Получение уравнений механики из вариационного принципа так же позволило решить ряд фундаментальных вопросов классической механики.

2.4. Задачи

2.1. Два однородных стержня с массой m_1, m_2 и с длиной l_1, l_2 опираются своими концами на гладкие поверхности. Определить зависимость между углами наклона стержней φ_1, φ_2 при равновесии (рис. 2.1).

2.2. Два горизонтальных стержня шарнирно закреплены в точках A

и B, а их свободные концы соединены тросами, перекинутыми через блок. Длины стержней l_1 и l_2. На расстояниях a_1 и a_2 от закрепленных концов к стержням подвешены массы m_1 и m_2. Найти связь между расстояниями a_1 и a_2, если система находится в равновесии. Рассмотреть случаи, когда масса стержней не учитывается и когда она учитывается (рис. 2.2).

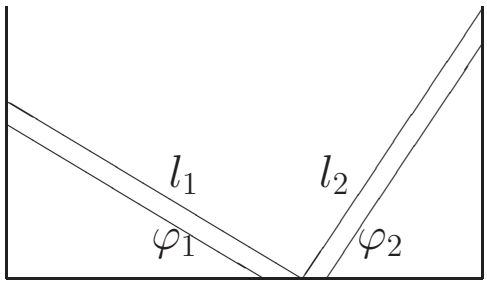

Рис. 2.1

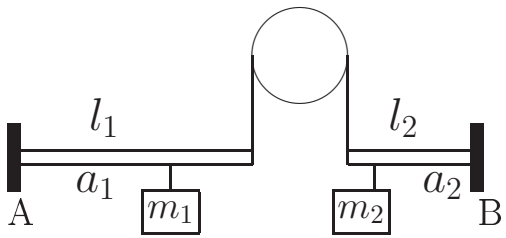

Рис. 2.2

2.3. Четыре одинаковых стержня с массой m и с длиной l закреплены шарнирно и расположены вертикально. Точка C закреплена. Точка D может перемещаться вертикально. Точки A и B связаны нитью. Определить натяжение нити, если угол при вершине C равен 2φ (рис. 2.3).

2.4. Косинусный регулятор представляет собой угловой рычаг с уг-

лом 90^0 и длиной плеч l_1 и l_2. На концах рычага закреплены одинаковые массы A и B. Найти при какой угловой скорости вращения регулятора прямая, соединяющая центры грузов, будет горизонтальной (рис. 2.4).

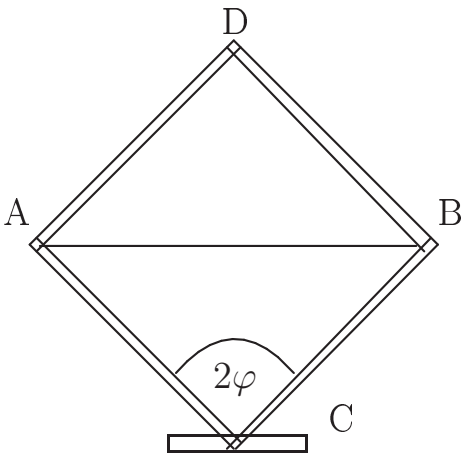

Рис. 2.3

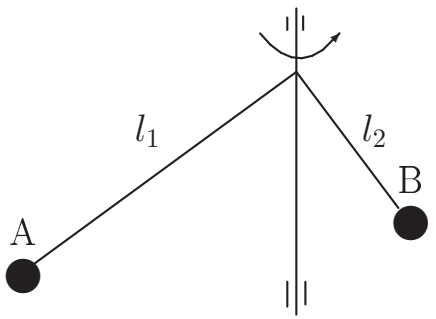

Рис. 2.4

2.5. Стержень, на середине которого прикреплен груз m_1, одним концом скользит по вертикальной стене, а другим прикреплен шарнирно к ползуну с массой m_2, движущемуся горизонтально (рис. 2.5). Пренебрегая массой стержня и считая движение стержня и ползуна происходящими в одной плоскости, найти ускорение ползуна в начальный момент времени из состояния покоя. Начальный

угол стержня с горизонтом равен α.

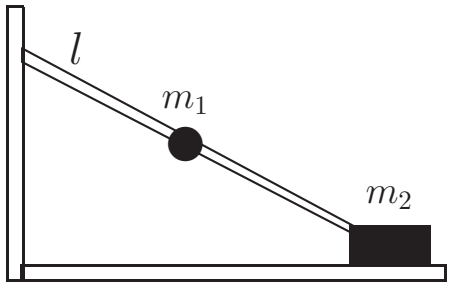

Рис. 2.5

Глава 3

Уравнения Лагранжа

3.1. Получение уравнений Лагранжа

Из принципа Гамильтона обычным методом вариационного исчисления можно получить дифференциальные уравнения. Опишем порядок их вывода. Наряду с зависимостью $q_i(t)$, описывающей истинное движение механической системы, рассмотрим пробные функции $\tilde{q}_i(t)$, отличающиеся от $q_i(t)$ на бесконечно малую величину:

$$\tilde{q}_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t). \tag{3.1}$$

Дифференцируя равенство (3.1) по времени, найдем

$$\dot{\tilde{q}}_i(t) = \dot{q}_i(t) + \frac{d}{dt}\delta q_i(t). \tag{3.2}$$

Откуда следует, что вариация скорости равна производной от вариации координаты:

$$\delta\dot{q}_i = \dot{\tilde{q}}_i - \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i(t). \tag{3.3}$$

Это уже было отмечено ранее, что дифференцирование по времени и варьирование можно переставлять. Вариации координат рассматриваются такими, что в моменты времени t_1 и t_2 они равны нулю:

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \tag{3.4}$$

Действие для пробных функций $\tilde{S}$ разложим в ряд в линейном приближении по δq_i и $\delta\dot{q}_i$:

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{\tilde{q}}_i, \tilde{q}_i, t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}_i, q_i, t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2}(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i)\,dt. \tag{3.5}$$

Интеграл от одного из слагаемых первой суммы в (3.5) вычислим по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t1}^{t2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i\,dt. \tag{3.6}$$

Согласно условию (3.4) на пределах интегрирования $\delta q_i = 0$. Поэтому первое слагаемое в последнем равенстве обращается в нуль. Подставляя теперь результат из (3.6) в (3.5) и записывая вариацию действия, получим

$$\delta S = \tilde{S} - S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \, dt = 0. \tag{3.7}$$

Поскольку вариации координат δq_i произвольны, то нулю должны равняться выражения в скобках для каждого i. В результате получается система дифференциальных уравнений, которые в механике называются *уравнениями Лагранжа:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{3.8}$$

Уравнения Лагранжа — это система дифференциальных уравнений относительно неизвестных обобщенных координат $q_i(t)$. Их решение дает зависимость обобщенных координат от времени, которая удовлетворяет принципу Гамильтона и, следовательно, описывает истинное движение механической системы. Преимуществом уравнений Лагранжа по сравнению с векторными уравнениями второго закона Ньютона является то, что они получаются из одной скалярной функции – функции Лагранжа и сразу оказываются записанными в обобщенных координатах. Раздел классической механики, в котором в основу положены уравнения Лагранжа, называется *аналитической механикой.* Развитие аналитической механики привело к результатам, имеющим значение не только в классической механике, но и в

других областях теоретической физики и в математике.

Несмотря на то, что функция Лагранжа равна разности кинетической и потенциальной энергии, в выборе функции Лагранжа имеется некоторый произвол. Две функции Лагранжа, отличающиеся на полную производную по времени от произвольной функции координат и времени, дают одни и те же уравнения движения. Покажем это. Пусть L и L' отличаются на полную производную по времени от некоторой функции $F(q_i, t)$:

$$L' = L + \frac{d}{dt}F(q_i, t). \tag{3.9}$$

Тогда для разности действий, отвечающих этим функциям Лагранжа, получим

$$S' - S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt = F(q_i(t_2), t_2) - F(q_i(t_1), t_1).$$

Вследствие того, что вариация координат на пределах интегрирования t_1 и t_2 равна нулю, вариации S и S' равны. Поэтому они будут обращаться в нуль одними и теми же зависимостями $q_i(t)$, то есть принцип Гамильтона с функцией Лагранжа L' дает тот же закон движения системы, что и принцип Гамильтона с функцией Лагранжа L. Наличие этого произвола позволяет иногда упрощать функцию

Лагранжа путем отбрасывания членов, которые можно объединить в выражение, представляющее полную производную по времени от функции координат и времени.

Уравнения Лагранжа обобщаются на механические системы, в которых действуют непотенциальные силы. Выражение для обобщенной непотенциальной силы нужно добавить в правую часть уравнений Лагранжа. Они тогда принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i, \quad \text{где } f_i = \sum_a \vec{f}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}. \tag{3.10}$$

В частном случае, когда непотенциальные силы являются силами трения, пропорциональными первой степени скорости, они могут быть получены из *диссипативной функции* Рэлея:

$$f_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}, \quad \Phi = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{3.11}$$

Коэффициенты α_{ij} могут зависеть от координат и характеризуют силы трения в механической системе. Для механических систем, в которых силы трения могут быть описаны диссипативной функцией Рэлея, уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.12}$$

Уравнения (3.10) и (3.12) не могут быть получены на основе вариационного принципа. Они выводятся непосредственно из принципа Даламбера.

В лагранжевом формализме можно включать в уравнения движения силы немеханической природы. Например, уравнения движения заряда e в электромагнитном поле получаются из функции Лагранжа, которая содержит слагаемые, описывающие взаимодействие заряда с полем:

$$L = T - e\varphi - \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}, \tag{3.13}$$

где φ и $\vec{A}$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля, c — скорость света в вакууме. Электромагнитные величины записаны в гауссовой системе единиц.

При замене функции Лагранжа классической механики на функцию Лагранжа специальной теории относительности уравнения Лагранжа дают уравнения движения механики специальной теории относительности.

3.2. Примеры уравнений Лагранжа

Запишем вначале уравнения Лагранжа в декартовых координатах для материальной точки с массой m, находящейся в потенциальном поле $U(\vec{r})$. Ее функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z). \tag{3.14}$$

Так как материальная точка имеет три степени свободы, то необходимо записать три уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \tag{3.15}$$

При вычислении частных производных переменные $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ и $z, \dot{z}$ считаются независимыми. Например, для частных производных по x и $\dot{x}$ получим

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}. \tag{3.16}$$

Аналогичными будут выражения для частных производных по другим координатам. Подставляя эти производные в уравнения (3.15), находим

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3.17}$$

Нетрудно заметить, что уравнения (3.17) — это проекции на декартовы оси уравнения второго закона Ньютона для материальной точки, движущейся в потенциальном поле.

Запишем теперь уравнения Лагранжа для той же задачи в цилиндрической системе координат. В цилиндрических координатах r, φ, z функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \varphi, z). \qquad (3.18)$$

Уравнение Лагранжа для координаты z будет таким же, как и в декартовых координатах. Для координат r, φ записываем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Вычисляем входящие в эти уравнения частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

В результате получим следующие уравнения Лагранжа для координат r и φ цилиндрической системы координат:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial r}, \qquad (3.19)$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \;=\; mr(r\ddot{\varphi}+2\dot{r}\dot{\varphi}) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \tag{3.20}$$

Так как проекции силы, рассчитываемой по формуле $\vec{f} = -\mathrm{grad}\varphi$, на базис цилиндрической системы координат равны

$$f_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad f_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \tag{3.21}$$

то первое уравнение Лагранжа (3.19) представляет собой проекцию уравнения второго закона Ньютона на радиальное направление. Второе уравнение Лагранжа (3.20) отличается множителем r от проекции уравнения второго закона Ньютона на азимутальное направление. В скобках в левой части уравнений (3.19) и (3.20) стоят проекции ускорения на базис цилиндрической системы координат:

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{3.22}$$

3.3. Функция Лагранжа в обобщенных координатах

Для того чтобы записать функцию Лагранжа в обобщенных координатах, необходимо пересчитать к ним потенциальную и кинетическую энергию механической системы. Если потенциальная энергия

задана как функция декартовых координат, то, заменяя их на обобщенные с помощью преобразования (2.2), получим потенциальную энергию как функцию обобщенных координат $U(q_i, t)$. Выражение для кинетической энергии мы найдем только для случая, когда связи стационарны и формулы преобразования (2.2) не содержат времени. Подставляя формулу для скорости из (2.4) в выражение для кинетической энергии, имеем

$$T = \sum_a \frac{1}{2} m_a (\sum_i \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i)(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \dot{q}_j) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j}) \dot{q}_i \dot{q}_j. \qquad (3.23)$$

Введем матрицу коэффициентов, зависящих только от обобщенных координат:

$$a_{ij}(q_i, t) = \sum_a m_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j}. \qquad (3.24)$$

Матрица a_{ij} — это симметричная матрица. Учитывая обозначения (3.24), запишем кинетическую энергию механической системы в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \qquad (3.25)$$

Если формулы преобразования к обобщенным координатам не содержат времени, то кинетическая энергия является однородной функцией второго порядка от обобщенных скоростей. Функция Лагранжа

принимает форму

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - U(q_i, t). \tag{3.26}$$

Если формулы преобразования к обобщенным координатам содержат время, то выражение для кинетической энергии в обобщенных координатах будет содержать члены, линейные по обобщенным скоростям, и члены, не зависящие от обобщенных скоростей.

3.4. Обобщенный импульс, циклические координаты

Для одной материальной точки производные от функции Лагранжа по $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ равны проекциям импульса на декартовы оси

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \tag{3.27}$$

В обобщенных координатах вводится понятие *обобщенного импульса.* Обобщенный импульс, сопряженный координате q_i, определяется по формуле, аналогичной формулам (3.27):

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.28}$$

Если координаты не декартовы, то обобщенные импульсы больше не равны проекциям импульса. Их можно выразить через импульсы отдельных материальных точек, составляющих систему материальных точек. Рассмотрим функцию Лагранжа как сложную функцию обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$L = L[\dot{x}_a(\dot{q}_i, q_i, t), x_a(q_i, t), \dot{y}_a(\dot{q}_i, q_i, t), y_a(q_i, t), \dot{z}_a(\dot{q}_i, q_i, t), z_a(q_i, t)].$$

Вычислим производные по обобщенным координатам, как производные от сложной функции:

$$p_i = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a}\frac{\partial \dot{x}_a}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_a}\frac{\partial \dot{y}_a}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_a}\frac{\partial \dot{z}_a}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_a \vec{p}_a \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3.29}$$

Для частных производных от векторов скорости из формулы (2.4) находим, что

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}. \tag{3.30}$$

В результате имеем следующую связь обобщенного импульса с импульсами отдельных материальных точек механической системы:

$$p_i = \sum_a \vec{p}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i}. \tag{3.31}$$

Как уже отмечалось, обобщенный импульс, сопряженный декартовой координате, равен проекции импульса на декартову ось. Обоб-

щенный импульс, сопряженный угловой координате, равен проекции момента импульса на ось вращения. Чтобы убедиться в этом, выразим радиус-вектор материальной точки через сферические координаты:

$$\vec{r} = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{i} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}. \tag{3.32}$$

Используя представление (3.32), легко проверить, что

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{i} + r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{j} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} = [\vec{k}\times\vec{r}]. \tag{3.33}$$

Подставляя выражение (3.33) в формулу (3.31), найдем для одной материальной точки

$$p_\varphi = \vec{p}[\vec{k}\times\vec{r}] = \vec{k}[\vec{r}\times\vec{p}] = \vec{k}\vec{M}, \tag{3.34}$$

то есть обобщенный импульс p_φ, сопряженный угловой координате φ, равен проекции момента импульса на ось OZ, которая в данном случае представляет ось вращения при изменении углаφ. Поскольку моменты импульса складываются, то это будет справедливо и для системы материальных точек.

Используя определение обобщенного импульса, уравнения Лагранжа можно записать в форме

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{3.35}$$

Возможны случаи, когда некоторые координаты не входят в функцию Лагранжа, но в ней присутствуют их производные по времени — обобщенные скорости. Такие координаты называются *циклическими координатами.* Например, если в функции Лагранжа материальной точки (3.14) потенциальная энергия не будет зависеть от координат x и y, то координаты x и y будут циклическими. Для циклической координаты правая часть уравнения (3.35) равна нулю и, следовательно, интеграл этого уравнения имеет вид

$$p_i(q_j, \dot{q}_j, t) = \text{const}. \tag{3.36}$$

Так как обобщенный импульс, сопряженный циклической координате, остается постоянным при движении механической системы, то говорят, что он сохраняется. Каждой циклической координате отвечает свой закон сохранения.

Наличие законов сохранения упрощает решение задач механики. Уравнения Лагранжа — это дифференциальные уравнения второго порядка относительно неизвестных координат $q_i(t)$. Соотношения вида (3.36) являются дифференциальными уравнениями первого порядка относительно $q_i(t)$. Понижение порядка дифференциальных уравнений облегчает их интегрирование. Поэтому выбор обобщенных координат, когда некоторые из них являются циклическими, являет-

ся предпочтительным.

3.5. Обобщенная энергия

Найдем полную производную от функции Лагранжа по времени. Так как функция Лагранжа зависит от обобщенных координат и обобщенных скоростей, которые сами являются функциями времени, то получим выражение

$$\frac{d}{dt}L(\dot{q}_i, q_i, t) = \sum_i (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.37}$$

Воспользуемся формулой Лейбница для дифференцирования произведения двух функций и получим из нее следующее равенство:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\dot{q}_i.$$

С помощью этого равенства преобразуем выражение (3.37) и запишем его в форме

$$\frac{d}{dt}(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i) = \sum_i \dot{q}_i(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.38}$$

Сумма в правой части выражения (3.38) равна нулю вследствие выполнения уравнений Лагранжа (3.8). Выражение в скобках в левой

части формулы (3.38), взятое с обратным знаком, называется *обобщенной энергией.* Обозначим его буквой E:

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{3.39}$$

Равенство (3.38) дает полную производную от обобщенной энергии по времени

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{3.40}$$

Если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то правая часть в формуле (3.40) равна нулю и обобщенная энергия сохраняется при движении механической системы.

Для обычных механических систем при условии, что формулы преобразования к обобщенным координатам не содержат времени, функция Лагранжа дается формулой (3.26). Найдем в этом случае обобщенную энергию. Для обобщенных импульсов получим

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j a_{kj} \dot{q}_j. \tag{3.41}$$

Подставляя этот результат в формулу (3.39), найдем

$$E = \sum_{k,j} a_{kj} \dot{q}_k \dot{q}_j - L = T + U, \tag{3.42}$$

то есть определение обобщенной энергии в этом случае совпадает с обычным определением механической энергии.

Если на механическую систему действуют силы, не имеющие потенциала, то в правой части уравнений Лагранжа стоит уже не нуль. Поэтому сумма в правой части формулы (3.38) не равна нулю, и механическая энергия не будет сохраняться даже при отсутствии явной зависимости от времени в функции Лагранжа. В частности, если непотенциальные силы являются силами трения, описываемыми диссипативной функцией Рэлея, то уменьшение механической энергии дается формулой

$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi. \tag{3.43}$$

Формула (3.43) получается из соотношения (3.38) при подстановке в него уравнения (3.12).

3.6. Законы сохранения и симметрии пространства и времени

Как уже отмечалось, пространство в классической механике постулируется однородным и изотропным, а время — однородным. С этими свойствами симметрии пространства и времени в лагранже-

вом формализме связывают существование фундаментальных законов сохранения энергии, импульса и момента импульса для замкнутой системы материальных точек. Под замкнутой системой материальных точек понимается система, на которую не только не действуют внешние силы, но и в которой не происходит превращения механической энергии в другие виды энергии, например, в тепловую энергию или в энергию электромагнитного поля.

Для замкнутой механической системы вследствие однородности времени все моменты времени одинаковы. Поэтому функция Лагранжа не должна явно зависеть от времени. В предыдущем параграфе было показано, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени, то механическая энергия сохраняется, то есть из однородности времени следует закон сохранения энергии для замкнутой механической системы.

Вследствие однородности пространства для замкнутой механической системы все точки пространства равноправны. Поэтому ее функция Лагранжа не должна зависеть от положения механической системы в пространстве. Она может зависеть только от относительных расстояний между материальными точками системы. Положение механической системы как целого в пространстве можно задать с помощью координат ее центра инерции. Если выбрать обобщенные

координаты так, чтобы три из них были координатами центра инерции механической системы, то вследствие однородности пространства эти координаты будут циклическими. Обозначая координаты центра инерции как X, Y, Z, запишем согласно (3.31) сопряженные им сохраняющиеся обобщенные импульсы:

$$p_X = \sum_a \vec{p}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial X}, \quad p_Y = \sum_a \vec{p}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial Y}, \quad p_Z = \sum_a \vec{p}_a \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial Z}. \tag{3.44}$$

При смещении центра инерции координаты всех точек получают одинаковые приращения. Например, при смещении центра инерции вдоль оси OX на ΔX получим $\Delta \vec{r}_a = \vec{i}\Delta X$, и, следовательно,

$$\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial X} = \vec{i}, \quad p_X = \sum_a \vec{p}_a \vec{i} = \vec{P}\vec{i} = P_X. \tag{3.45}$$

Обобщенный импульс p_X равен проекции импульса системы материальных точек на ось OX. Аналогичные выводы можно сделать относительно обобщенных импульсов p_Y и p_Z, то есть для замкнутой системы материальных точек сохраняются все три проекции импульса, и, следовательно, вектор импульса $\vec{P}$ замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

Закон сохранения момента импульса замкнутой системы материальных точек в лагранжевом формализме выводится из изотропно-

сти пространства. Вследствие изотропности пространства ориентация механической системы относительно пространства не должна влиять на ее механические свойства. Пусть одна из обобщенных координат выбрана так, что ее изменение приводит к повороту всей механической системы вокруг некоторой оси на уголφ. Так как механическая система не может реагировать на ориентацию в изотропном пространстве, то координата φ будет циклической. Сопряженный ей обобщенный импульс сохраняется. Как было показано, сопряженный угловой координате обобщенный импульс равен проекции момента импульса механической системы на ось вращения. В изотропном пространстве для замкнутой системы материальных точек такой осью вращения может служить любая ось декартовой системы координат. Поэтому для нее сохраняются все три проекции момента импульса, то есть вектор момента импульса $\vec{M}$ замкнутой механической системы остается постоянным при ее движении.

В некоторых случаях отдельные фундаментальных законы сохранения выполняются для систем материальных точек, взаимодействующих с другими телами. Если внешнее поле обладает некоторыми свойствами симметрии, то им соответствуют законы сохранения. Например, в центрально симметричном поле сохраняется момент импульса механической системы, определенный относительно центра

симметрии поля. Это следует из того, что повороты механической системы относительно оси, проходящей через центр симметрии поля, не влияют на движение механической системы.

3.7. Задачи

3.1. Написать уравнения Лагранжа для материальной точки с массой m, находящейся в потенциальном поле, в следующих координатах:

(a) сферических;

(b) параболических на плоскости, введенных формулами:
$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$.

3.2. Написать уравнения Лагранжа, обобщенные импульсы, выражение для энергии, если функция Лагранжа равна:

(a) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{y}^2 + c\dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}kx^2$;

(b) $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$;

(c) $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - e\varphi - \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}$;

(d) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

3.3. Написать уравнения Лагранжа для следующих механических систем:

(a) Маятник, точка подвеса которого находится на бруске массой m_1, двигающемся горизонтально (рис. 3.1);

(b) Двойной плоский маятник (рис. 3.2);

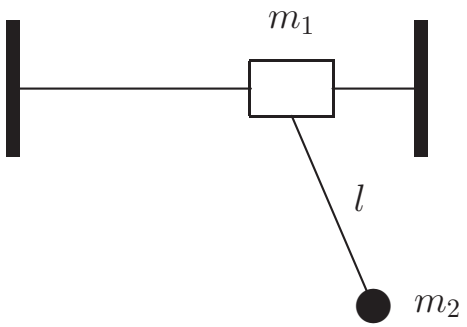

Рис. 3.1

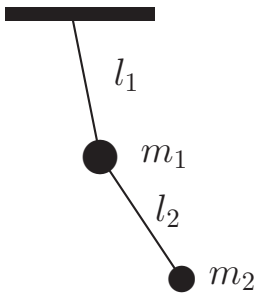

Рис. 3.2

(c) Маятник, длина подвеса которого меняется по закону $l = \sin(\Omega t)$;

(d) Материальная точка массой m может двигаться без трения по окружности радиуса r, вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с диаметром окружности (рис. 3.3).

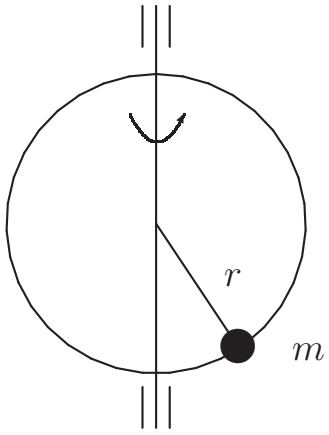

Рис. 3.3

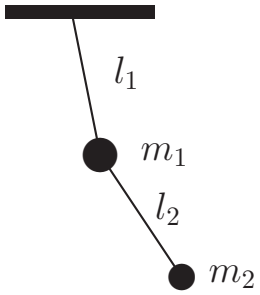

Рис. 3.4

3.4. Материальная точка массой m движется под действием силы тяжести по прямой, вращающейся с угловой скоростью Ω вокруг вертикальной оси. Прямая образует угол α с осью вращения. Найти закон движения материальной точки, если в начальный момент времени она находилась на расстоянии a от оси вращения (рис. 3.4).

3.5. Шарик массой m движется вдоль горизонтальной прямой. Жесткости пружин равны k_1, k_2 (рис. 3.5). Записать и проинтегрировать уравнения Лагранжа.

3.6. На однородную призму А, лежащую на горизонтальной плоско-

сти, положена однородная призма B. Поперечные сечения призм — прямоугольные треугольники. Масса призмы A в n раз больше массы призмы B. Предполагая, что трение между призмами и между призмой A и наклонной плоскостью отсутствует, определить расстояние, на которое продвинется призма A, когда призма B дойдет до горизонтальной плоскости (рис. 3.6).

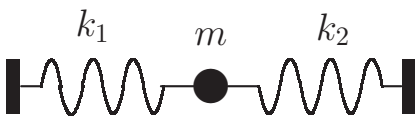

Рис. 3.5

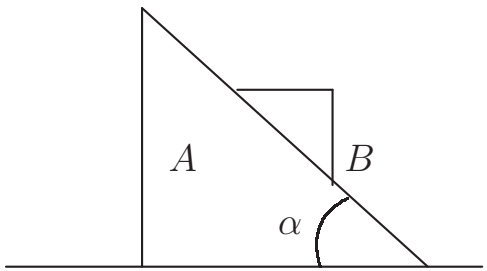

Рис. 3.6

3.7. Материальная точка массой m движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом R. Ее начальная скорость составляет угол α с горизонтом. Считая, что в начальный момент времени она находилась на оси OX, найти ее закон движения. Определить силу давления частицы на цилиндр.

Глава 4

Задача двух тел и классическая теория рассеяния

4.1. Приведенная масса

Рассмотрим задачу о движении двух взаимодействующих только между собой материальных точек. Вследствие однородности и изотропности пространства потенциальная энергия взаимодействия может зависеть только от расстояния между точками. Функция Лагранжа для данной задачи запишется в форме

$$L = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|). \tag{4.1}$$

Рассматриваемая система материальных точек замкнута. Поэтому ее импульс сохраняется, и система отсчета центра инерции является

инерциальной системой отсчета. Задачу будем решать в системе отсчета центра инерции. Начало координат поместим в центр инерции, что дает

$$\vec{R}_{\text{ц.и}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0. \tag{4.2}$$

Введем радиус-вектор $\vec{r}$, направленный от первой материальной точки ко второй:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \tag{4.3}$$

С помощью формул (4.2) и (4.3) выразим векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через вектор $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}. \tag{4.4}$$

Потенциальная энергия теперь зависит только от величины вектора $\vec{r}$. Выражая с помощью формул (4.4) скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ через вектор $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, кинетическую энергию системы двух материальных точек можно записать как кинетическую энергию одной материальной точки с массой

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.5}$$

Выраженная через радиус-вектор $\vec{r}$ функция Лагранжа (4.1) запишется в форме

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U(r). \tag{4.6}$$

Функция Лагранжа (4.6) — это функция Лагранжа одной материальной точки массы m, движущейся в потенциальном поле, зависящем только от расстояния до начала координат. Такое потенциальное поле называется *центральным полем.* Сила, действующая в центральном поле на материальную точку, направлена по прямой, соединяющей материальную точку с центром поля:

$$\vec{f} = -\mathrm{grad}U = -\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{4.7}$$

Масса m, определенная согласно (4.5), называется *приведенной массой.* Следовательно, решение задачи двух тел эквивалентно решению задачи о движении в центральном поле материальной точки с массой, равной приведенной массе. После решения задачи о движении материальной точки в центральном поле координаты двух тел можно получить при помощи формул (4.4).

Если масса одной материальной точки, например m_1, много больше массы другой материальной точки, то из формул (4.4) и (4.5) получим, что приближенно $\vec{r_1} = 0$, $\vec{r_2} = \vec{r}$, $m = m_2$, то есть центр инер-

ции системы двух тел совпадает с более массивным телом, а приведенная масса равна массе менее массивного тела. В этом случае задача двух тел сводится к задаче о движении одного тела в потенциальном поле, создаваемом другим телом.

Поскольку масса Солнца намного больше массы каждой из планет Солнечной системы, то в первом приближении можно пренебречь взаимодействием планет между собой и движением Солнца вокруг центра инерции Солнечной системы. В этом приближении движение отдельной планеты рассматривается как движение материальной точки в поле тяготения Солнца. Учет взаимодействия планет между собой приводит к задаче многих тел, взаимодействующих между собой. Эта задача не может быть сведена к квадратурам и решается приближенными методами.

4.2. Движение в центральном поле

Вследствие сферической симметрии поля сохраняется вектор момента импульса $\vec{M}$, определенный относительно центра поля. Так как $\vec{M} = m\,[\vec{r} \times \vec{v}]$, то векторы $\vec{r}$ и $\vec{v}$ перпендикулярны постоянному вектору $\vec{M}$ и, следовательно, всегда лежат в плоскости, перпендикулярной ему. Поэтому вся траектория лежит в этой плоскости и

является плоской кривой. Направим ось OZ по вектору $\vec{M}$. Тогда траектория будет лежать в плоскости XOY. Выберем в этой плоскости полярную систему координат и функцию Лагранжа запишем в форме

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \tag{4.8}$$

Координата φ является циклической. Сопряженный ей обобщенный импульс сохраняется:

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = M = \text{const}. \tag{4.9}$$

Согласно формуле (3.34) этот обобщенный импульс равен проекции момента импульса материальной точки на ось$0Z$. Будем считать, что постоянная M положительна, что соответствует выбору положительного направления оси $0Z$ по положительному направлению вектора момента импульса. В этом случае всегда $\dot{\varphi} > 0$ и, следовательно, материальная точка в центральном поле движется так, что угол φ монотонно растет.

Закон сохранения (4.9) часто формулируется как закон площадей. Рассмотрим два положения материальной точки на траектории в два бесконечно близких момента времени, как показано на рис. 4.1. Из рисунка видно, что площадь бесконечно малого сектора, ограниченного двумя положениями радиуса-вектора и участком траектории,

равна

$$dS \approx \frac{1}{2} r(t) r(t+dt) d\varphi \approx \frac{1}{2} r^2 d\varphi. \tag{4.10}$$

Из формул (4.9) и (4.10) находим скорость изменения площади с течением времени. Эта величина называется секторной скоростью и в центральном поле равна:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{M}{2m}. \tag{4.11}$$

За равные промежутки времени радиус-вектор материальной точки заметает одинаковые площади. Это утверждение, известное как закон площадей, является другой формулировкой закона сохранения момента импульса. Закон площадей выполняется для любого центрального поля.

Так как функция Лагранжа материальной точки в центральном поле не зависит явно от времени, то сохраняется энергия материальной точки. В полярных координатах выражение для энергии записывается в форме

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r). \tag{4.12}$$

Из выражения (4.9) найдем производную $\dot{\varphi}$ и подставим ее в формулу

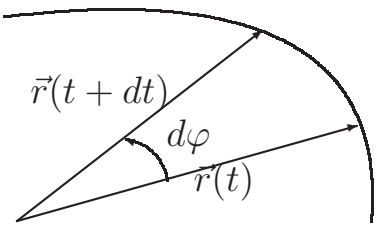

Рис. 4.1

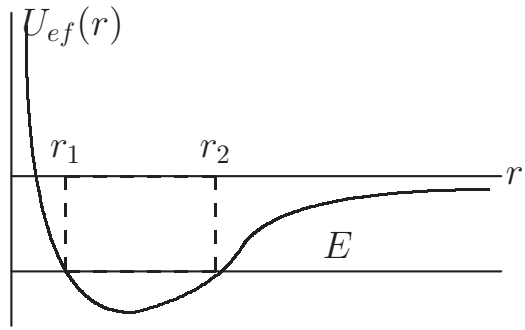

Рис. 4.2

(4.12). В результате получим

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{ef}(r), \tag{4.13}$$

где введено понятие эффективной потенциальной энергии$U_{ef}(r)$, равной

$$U_{ef}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \tag{4.14}$$

Формула (4.13) для энергии совпадает с формулой для энергии материальной точки, движущейся по радиусу и находящейся в потенциальном поле с эффективной потенциальной энергией $U_{ef}(r)$.

Из соотношения (4.13) находим, что

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{ef}(r))}. \tag{4.15}$$

Разделяя в выражении (4.15) переменные и интегрируя его, получим неявную зависимость $r(t)$:

$$t = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{ef}(r))}} + C. \tag{4.16}$$

Выражение (4.15) и интеграл (4.16) имеют смысл только тогда, когда подкоренное выражение не отрицательно, то есть когда выполняется неравенство $E \geq U_{ef}(r)$. Исследование этого неравенства позволяет, не вычисляя интеграла, определить области пространства, в которых возможно движение материальной точки при заданных энергии E и моменте импульса M. Качественно такое исследование можно провести графическим путем, если построить график зависимости $U_{ef}(r)$ и на том же графике провести прямую $E = \text{const}$. Пример такого построения приведен на рис. 4.2. На этом графике условия неравенства $E \geq U_{ef}(r)$ выполняются для значений радиуса в пределах $r_1 \leq r \leq r_2$. Следовательно, при обращении вокруг центра поля материальная точка будет то приближаться к центру на расстояние r_1, то удаляться от него на расстояние r_2.

Найдем теперь уравнение траектории. Так как производные $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ известны, то исключим время путем деления одной производной на другую. В результате получим

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \pm\frac{M}{r^2\sqrt{2m(E - U_{ef}(r))}}. \tag{4.17}$$

Интегрируя выражение (4.17), находим уравнение траектории в полярных координатах:

$$\varphi = \pm\int\frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - U_{ef}(r))}} + C. \tag{4.18}$$

Интеграл можно вычислить только после задания потенциальной энергии $U(r)$. Однако некоторые выводы о форме траектории можно сделать, не вычисляя интеграла. Если положить C равным нулю, то изменение знака φ происходит одновременно с изменением знака $\dot{r}$. Знак $\dot{r}$ меняется в точке, где $\dot{r} = 0$ и где, следовательно, материальная точка находится на минимальном или максимальном удалении от центра поля. Точки минимального или максимального удаления материальной точки от центра поля называются *точками поворота.* Таким образом при $C = 0$ начало отсчета угла φ выбрано от прямой, проведенной от центра поля в точку поворота. Поскольку в этом слу-

чае одинаковым значениям r, лежащим по разные стороны от точки поворота, отвечают одинаковые абсолютные значения угла φ, то траектория материальной точки симметрична относительно направления на точку поворота. Если при движении материальная точка уходит на бесконечность, то траектория состоит из двух симметричных ветвей. При движении без ухода на бесконечность траектория получается многократным отражением участка кривой, расположенного между положениями $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$.

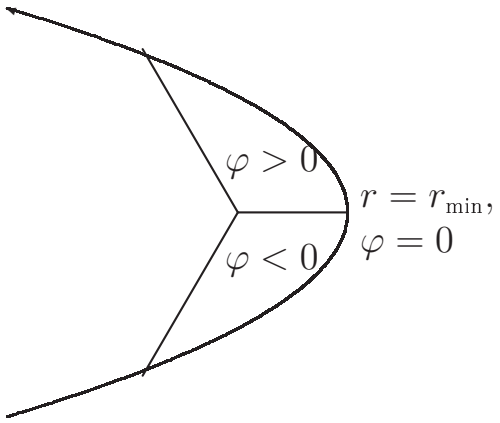

Рис. 4.3

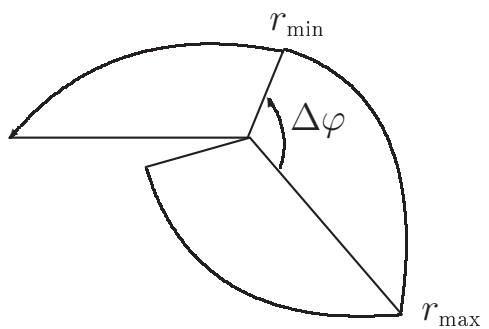

Рис. 4.4

Примеры возможных траекторий приведены на рис. 4.3 и рис. 4.4. Угол $\Delta\varphi$ между положениями $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$ на рис. 4.4 дается формулой

$$\Delta\varphi = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - U_{ef}(r))}}. \tag{4.19}$$

Если при сложении нескольких $\Delta\varphi$ получится угол, кратный 2π, то материальная точка возвратится на уже пройденный участок траектории, и сама траектория будет замкнутой кривой. Условие замкнутости траектории записывается в форме

$$n\Delta\varphi = 2\pi\, m, \tag{4.20}$$

где m, n — целые числа. Если это условие не выполняется, то траектория будет незамкнутой кривой, расположенной в кольце между окружностями с радиусами $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$.

4.3. Задача Кеплера

Рассмотрим важный случай центрального поля, когда потенциальная энергия равна

$$U(r) = \pm\frac{\alpha}{r}. \tag{4.21}$$

Силу, действующую на материальную точку, найдем по формуле

$$\vec{F} = -\nabla U = \pm\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r, \tag{4.22}$$

где $\vec{e}_r$ — единичный вектор, направленный по радиусу. Из формулы (4.22) видно, что знак плюс относится к полю отталкивания, когда сила направлена от центра. Знак минус отвечает полю притяжения. Для рассматриваемого потенциального поля сила обратно пропорциональна квадрату радиуса. Такую зависимость силы от расстояния имеют поле тяготения сферически симметричной массы и электрическое поле точечного или сферически симметричного заряда. Поэтому полученные в этом параграфе результаты при соответствующем выборе постоянной α будут описывать движение в указанных полях.

Уравнение траектории получим, вычисляя интеграл (4.18). Запишем его для поля притяжения, выбирая знак минус в (4.21). Положим также постоянную C равной нулю и выберем знак плюс перед интегралом. Такой выбор постоянной и знака перед интегралом соответствует выбору оси OX в направлении на положение минимального удаления материальной точки от центра. Тогда интеграл имеет вид

$$\varphi = \int \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m(E - \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2})}}\ . \tag{4.23}$$

Интеграл (4.23) приводится к табличному интегралу путем замены $x = M/r$ и выделением полного квадрата под знаком корня. Результат интегрирования можно записать в форме

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{4.24}$$

где введены две новые постоянные: параметр p и эксцентриситет e. Они равны

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \tag{4.25}$$

Уравнение (4.24) задает в полярных координатах одно из конических сечений: гиперболу, параболу или эллипс. Начало полярной системы координат совпадает с одним из фокусов гиперболы или эллипса или с фокусом параболы. Вид конического сечения зависит от величины эксцентриситета e. При $e > 1$ уравнение задает гиперболу. В этом случае положительна энергия материальной точки:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r}. \tag{4.26}$$

Материальная точка, движущаяся по гиперболе, может уйти на бесконечность и будет иметь там ненулевую скорость. При $r \to \infty$ второе слагаемое в (4.26) обращается в нуль и энергия материальной

точки равна ее кинетической энергии $E = mv_\infty^2/2$. Если $E = 0$, то эксцентриситет e равен единице и уравнение (4.24) задает параболу. Материальная точка по-прежнему может уйти на бесконечность, но скорость ее на бесконечности равна нулю. И наконец, при отрицательной энергии E материальной точки ее эксцентриситет $e < 1$. Тогда уравнение (4.24) описывает эллипс. Движение материальной точки ограничено областью вблизи центра поля.

Если пренебречь взаимодействием планет между собой, то полученные для поля притяжения с $U(r) = -\alpha/r$ результаты можно применить к описанию движения планет Солнечной системы. Так как масса Солнца m_o намного превышает массы планет Солнечной системы, то центр поля можно считать совпадающим с центром Солнца, а приведенную массу считать равной массе планеты. Из закона всемирного тяготения имеем $\alpha = \gamma m m_o$. Выразим измеряемые астрономами величины — большую полуось орбиты и период обращения планеты — через энергию и момент импульса планеты. Из рис. 4.5 траектории планеты видно, что

$$a = \frac{1}{2}(r_{\max} + r_{\min}) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (4.27)$$

Размер большой полуоси эллипса не зависит от момента импульса

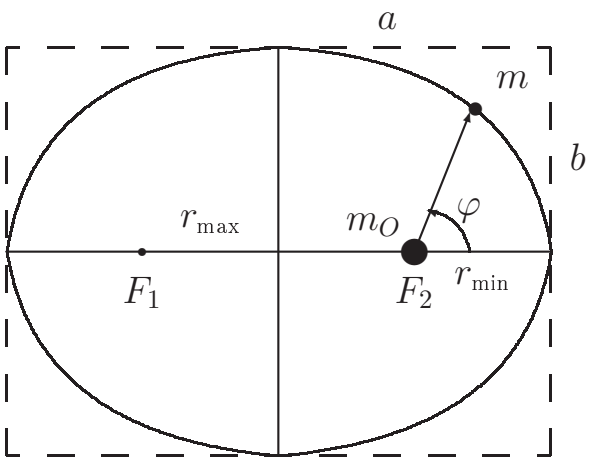

Рис. 4.5

материальной точки и определяется только ее энергией. Период обращения материальной точки вокруг центра найдем путем интегрирования соотношения (4.11) закона площадей. За период обращения вокруг центра площадь, заметаемая радиусом-вектором материальной точки, равна площади эллипса. Используя значения для a и b из (4.27), формулу $S = \pi ab$ для площади эллипса и закон площадей (4.11), получим

$$S = \int_0^T \frac{M}{2m}\,dt = \frac{M}{2m}T = \pi ab. \tag{4.28}$$

Подставляя в (4.28) значения a и b из формул (4.27), найдем период

обращения:

$$T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha}}a^{3/2}. \tag{4.29}$$

Для планет Солнечной системы отношение α/m приближенно равно γm_o. Поэтому для них период обращения зависит только от величины большой полуоси орбиты.

Изложенные результаты для движения материальной точки по эллипсу в центральном поле в приложении к движению планет Солнечной системы открыты Кеплером и носят его имя. Три закона Кеплера формулируются следующим образом.

Закон 1. *Планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Закон 2. *Площади, заметаемые радиусом-вектором планеты за одинаковые промежутки времени, равны.*

Закон 3. *Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы их больших полуосей.*

В заключение приведем уравнение траектории для поля отталкивания, когда $U(r) = \alpha/r$. Интегрирование дает результат:

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos\varphi}. \tag{4.30}$$

Значения e и p по-прежнему даются формулой (4.25). Единственно возможной траекторией в этом случае является гипербола, для которой $E > 0$ и $e > 1$.

4.4. Рассеяние частиц в центральном поле.

Рассмотрим задачу об отклонении однородного пучка частиц, падающих на центр поля из бесконечности и уходящих на бесконечность после взаимодействия с полем. Такая постановка задачи характерна для экспериментов по рассеянию частиц в ядерной физике и физике элементарных частиц. Несмотря на то, что для описания элементарных частиц необходимо использовать квантовую механику, некоторые аспекты таких опытов можно анализировать с помощью классической механики. Схема опыта по рассеянию частиц приведена на рис. 4.6.

Все частицы потока, падающего на рассеивающий центр, имеют вдали от центра одинаковую скорость v_∞ и летят по параллельным траекториям. Расстояние от этой траектории до параллельной ей прямой, проходящей через центр поля, называется *прицельным расстоянием.* Обозначим его через ρ. Введем плотность потока частиц n как отношение числа частиц dN, прошедших через площадку dS, распо-

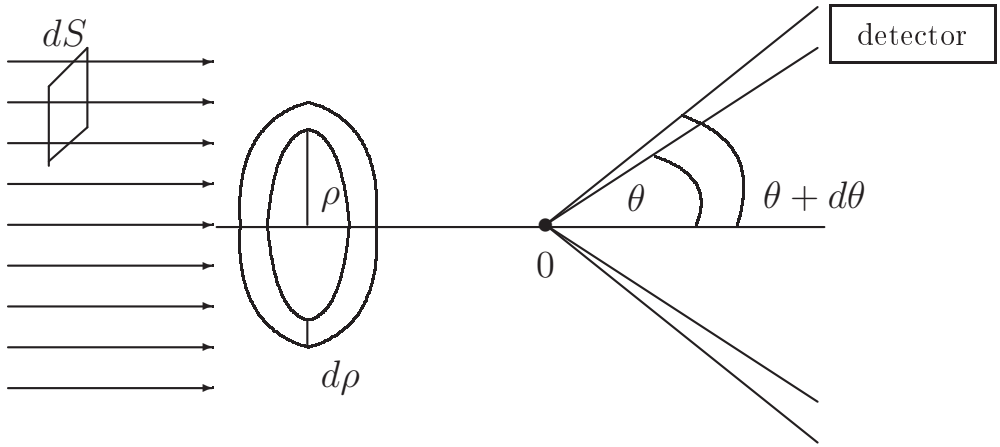

Рис. 4.6

ложенную перпендикулярно потоку, к величине этой площадки:

$$n = \frac{dN}{dS}. \tag{4.31}$$

Поток формируется таким образом, что плотность постоянна по всему поперечному сечению пучка. Рассеянные частицы регистрируются детектором. На опыте измеряется количество частиц$dN(\theta)$, отклоненных на различные углы θ и попадающих в интервал углов между θ и $\theta + d\theta$. Для того чтобы дать интерпретацию опыта, не зависящую

от плотности потока падающих частиц, вводят величину $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{dN(\theta)}{n}. \tag{4.32}$$

Введенная таким образом величина $d\sigma$ называется *эффективным сечением рассеяния.* Размерность ее равна размерности площади. Если считать, что между углом отклонения частицы и ее прицельным расстоянием существует однозначная зависимость, то эффективное сечение рассеяния равно площади кольца с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, проходя через которое на большом расстоянии от рассеивающего центра, частицы отклоняются в интервал углов между θ и $\theta + d\theta$, то есть

$$d\sigma = \frac{dN(\theta)}{n} = \frac{dN(\rho)}{n} = 2\pi\rho d\rho. \tag{4.33}$$

Зависимость $\rho(\theta)$ может быть рассчитана, если известна потенциальная энергия взаимодействия частиц с полем. Тогда эффективное сечение рассеяния запишется в форме

$$d\sigma = 2\pi\rho \left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\theta. \tag{4.34}$$

Здесь берется абсолютное значение производной от ρ по θ, так как в большинстве случаев эта производная отрицательна. Эффективное сечение рассеяния также выражают через элемент телесного угла $d\Omega$,

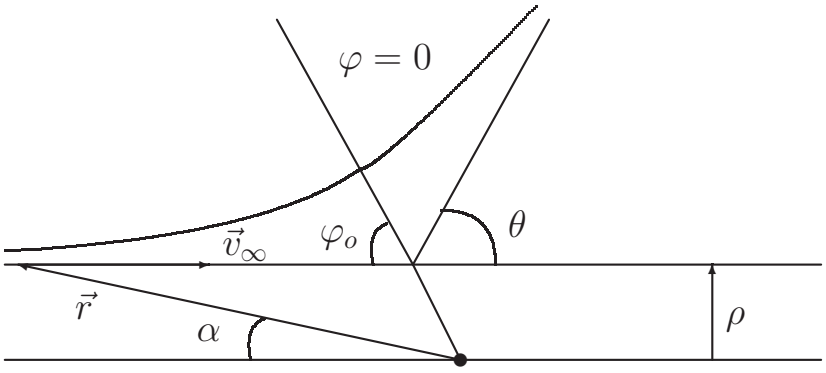

Рис. 4.7

заключенного между конусами с растворамиθ и $\theta+d\theta$. В этом случае имеем

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta, \quad d\sigma = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| d\Omega. \tag{4.35}$$

Найдем эффективное сечение рассеяния для поля отталкивания с потенциальной энергией $U(r) = \alpha/r$. Это поле описывает взаимодействие одноименных точечных зарядов по закону Кулона. На рис.4.7 показана траектория заряда, налетающего на неподвижный рассеивающий центр. Уравнением траектории является гипербола, задаваемая формулой (4.30). На оси симметрии гиперболы $\varphi = 0$. Введем угол φ_o, отсчитываемый от оси симметрии до направления на бесконечно удаленную точку траектории. Значение этого угла можно получить, устремляя r к бесконечности в уравнении гиперболы (4.30),

что дает

$$\cos\varphi_o = \frac{1}{e}. \tag{4.36}$$

Из рис. 4.7 находим, что $\theta = \pi - 2\varphi_o$. Остается выразить эксцентриситет e через прицельное расстояние ρ, чтобы получить зависимость $\rho(\theta)$ и рассчитать эффективное сечение. Для этого запишем выражение для энергии и момента импульса налетающей частицы на бесконечно далеком расстоянии от рассеивающего центра:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad M = |m\,\vec{r}\times\vec{v}| = mv_\infty r\sin\alpha = mv_\infty\rho. \tag{4.37}$$

В результате для эксцентриситета получим

$$e = \sqrt{1 + \frac{m^2v_\infty^4}{\alpha^2}\rho^2}. \tag{4.38}$$

Подставляя полученное значение в формулу (4.36) и учитывая связь φ_o и θ, находим зависимость $\rho(\theta)$:

$$\rho = \frac{\alpha}{mv_\infty^2}\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{4.39}$$

Теперь по формуле (4.34) находим эффективное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\theta/2}{\sin^3\theta/2}d\theta = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\theta/2}. \tag{4.40}$$

Первым опытом, в котором измерялось рассеяние частиц, был опыт Резерфорда по рассеянию α-частиц на ядрах атомов золота. Формула (4.40) дает эффективное сечение рассеяния для этого опыта и поэтому называется формулой Резерфорда.

4.5. Задачи

4.1. Исследовать качественно движение тела с массой m в центральном поле $U(r) = -\alpha/r - \beta/r^2$. Постоянные α и β в задачах считать положительными.

4.2. Когда в центральном поле возможно движение по окружности?

4.3. Найти траекторию частицы с массой m в центральном поле $U(r) = \alpha/r + \beta/r^2$. Выразить изменение направления ее скорости при рассеянии через энергию и момент импульса.

4.4. Найти траекторию частицы с массой m в центральном поле $U(r) = -\alpha/r + \beta/r^2$. Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя последовательными прохождениями перигелия (точки $r = r_{\min}$), период радиальных колебаний и период обращения. При каком условии траектория окажется замкнутой?

4.5. Определить эффективное сечение рассеяния частиц, упруго отскакивающих от твердого шарика с радиусом a.

4.6. Найти эффективное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси $0Z$, при упругом рассеянии на поверхности вращения $r = Az^n, \quad 0 < n < 1$.

4.7. Решить предыдущую задачу для поверхности вращения$r = b \sin z/a$, $(0 < z < \pi a/2)$.

4.8. Найти поверхность вращения, сечение упругого рассеяния на которой совпадает с резерфордовским.

Глава 5

Линейные колебания

5.1. Свободные одномерные колебания

Рассмотрим одномерную механическую систему, то есть механическую систему с одной степенью свободы. Функция Лагранжа произвольной механической системы в обобщенных координатах дается формулой (3.26). В одномерном случае суммация в ней отсутствует. Поэтому индексы можно опустить. В результате функция Лагранжа запишется в форме

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q). \tag{5.1}$$

Пусть в положении $q = q_o$ система имеет положение устойчивого равновесия. В этом положении потенциальная энергия механической системы минимальна. Запишем условие минимума потенциальной энер-

гии:

$$\left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_o} = 0, \quad \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_o} = k > 0. \tag{5.2}$$

Мы предполагаем, что вторая производная d^2U/dq^2, обозначенная здесь буквой k, в положении равновесия отлична от нуля. Если она равна нулю, то колебания становятся нелинейными, или ангармоническими. Ангармонические колебания мы рассматривать не будем. Введем новую обобщенную координату x — отклонение от положения равновесия:

$$x = q - q_o, \quad \dot{x} = \dot{q}. \tag{5.3}$$

Разложим функции $a(q)$ и $U(q)$ в ряд вблизи положения равновесия и, считая эти отклонения малыми, ограничимся в разложении нулевым приближением для $a(q)$ и вторым приближением для $U(q)$. Кинетическая и потенциальная энергии в данном приближении запишутся в форме

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 \approx \frac{1}{2}a(q_o)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2, \quad U(q) \approx U(q_o) + \frac{1}{2}kx^2. \tag{5.4}$$

В разложении для потенциальной энергии уже учтены условия (5.2) и обозначения (5.3). В выражении для кинетической энергии введено обозначение $\mu = a(q_o)$ и вследствие того, что обобщенная скорость

также мала, в разложении $a(q)$ берется только нулевое приближение. Постоянная $U(q_o)$ не сказывается на уравнениях движения. Поэтому положим ее равной нулю. Окончательно с точностью до членов второго порядка малости функция Лагранжа записывается в форме

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \tag{5.5}$$

Ценность полученного результата заключается в том, что функция Лагранжа любой одномерной механической системы, удовлетворяющей сформулированным выше условиям, в данном приближении имеет вид (5.5). Индивидуальность механической системы проявляется только в значениях постоянных μ и k. Поэтому вся теория линейных колебаний является общей для любых систем, совершающих малые колебания.

Если в механической системе присутствует трение, то считается, что его можно описать при помощи диссипативной функции (3.11). В диссипативной функции рассматривается такое же приближение, как и в кинетической энергии. В принятом приближении для диссипативной функции имеем

$$\Phi = \frac{1}{2}\alpha_o\dot{x}^2, \quad \alpha_o = \alpha(q_o). \tag{5.6}$$

Запишем уравнения Лагранжа с диссипативной функцией в приближении малых колебаний. Для одномерной системы уравнение Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}. \tag{5.7}$$

Подставляя в (5.7) функцию Лагранжа (5.5) и диссипативную функцию (5.6), приходим к дифференциальному уравнению

$$\mu\ddot{x} + kx = -\alpha_o\dot{x}. \tag{5.8}$$

Разделим это уравнение на μ и введем обозначения:

$$\omega_o^2 = \frac{k}{\mu}, \quad 2\lambda = \frac{\alpha_o}{\mu}. \tag{5.9}$$

В результате получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающее малые свободные одномерные колебания при наличии трения:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = 0. \tag{5.10}$$

Согласно теории дифференциальных уравнений, решение уравнения (5.10) ищем в форме $x = \exp(\nu t)$. Характеристическое уравнение имеет корни:

$$\nu_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}, \quad \nu_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2}. \tag{5.11}$$

Если $\lambda \geq \omega_o$, что отвечает сильному трению, то решение уравнения (5.10) записывается в экспоненциальной форме:

$$x = C_1 e^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_o^2})t} + C_2 e^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_o^2})t}, \quad \text{для } \nu_1 \neq \nu_2, \tag{5.12}$$

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}, \quad \text{для } \nu_1 = \nu_2. \tag{5.13}$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные. В обоих случаях абсолютная величина смещения x монотонно убывает с ростом времени, и, следовательно, механическая система приближается к положению равновесия, не совершая колебаний. Если $\lambda < \omega_o$, что означает слабое трение, то решение уравнения (5.10) записывается через тригонометрические функции. Введем обозначение

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}. \tag{5.14}$$

Общее решение можно записать в двух формах:

$$x = e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \quad x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \beta). \tag{5.15}$$

Переход от одной формы к другой осуществляется простыми тригонометрическими преобразованиями. Два набора постоянных связаны соотношениями:

$$a = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad tg\beta = -\frac{B}{A}. \tag{5.16}$$

В отсутствие трения, когда $\lambda = 0$ и $\omega = \omega_o$, решение имеет вид

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \quad x = a\cos(\omega t + \beta). \tag{5.17}$$

Решение (5.17) описывает свободные малые колебания около положения равновесия. Величина ω называется *частотой колебаний.* Частота определяется свойствами механической системы и не зависит от начальных условий. *Амплитуда колебаний* a и *начальная фаза* β определяются начальными условиями. Энергия системы, совершающей колебания в отсутствие трения, сохраняется и пропорциональна квадрату амплитуды:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \tag{5.18}$$

Уравнение малых колебаний часто удобно представлять в комплексной форме. Так как комплексное число $A\exp(i\omega)$, где A — комплексная амплитуда $A = a\exp(i\beta)$, по формулам Эйлера записывается в виде

$$Ae^{i\omega t} = ae^{i(\omega t+\beta)} = a\cos(\omega t + \beta) + ia\sin(\omega t + \beta), \tag{5.19}$$

то решение (5.17) дается его действительной частью:

$$x = Re[Ae^{i\omega t}] = a\cos(\omega t + \beta). \tag{5.20}$$

Если над комплексными величинами производятся только линейные операции (сложение, вычитание, умножение на действительные величины, дифференцирование и интегрирование), то действия с действительной и комплексной частями комплексного числа производятся независимо. В то же время иметь экспоненты в формулах удобнее, если выполняются операции дифференцирования или интегрирования, так как при этих операциях экспонента не меняет своего вида. Поэтому во всех расчетах, где производятся только линейные операции, косинусы можно заменить на экспоненты, опуская знак реальной части. Тогда в конце вычислений из полученного в комплексной форме результата необходимо взять только его действительную часть.

При наличии трения уравнения (5.15) описывают колебания, амплитуда которых уменьшается по экспоненциальному закону. Такие колебания называются *затухающими колебаниями.* Скорость убывания амплитуды определяется показателем λ. Как видно из формулы (5.14), трение также уменьшает частоту колебаний.

5.2. Вынужденные одномерные колебания

Часто механические системы, совершающие малые колебания, подвергаются воздействию внешней вынуждающей силы, зависящей от

времени. Пусть потенциальная энергия одномерной системы в поле вынуждающей силы равна $U^{\text{вын}}(q,t)$. Разложим ее в ряд вблизи положения равновесия, ограничиваясь приближением первого порядка,

$$U^{\text{вын}}(q,t) \approx U^{\text{вын}}(0,t) + \left.\frac{\partial U^{\text{вын}}(q,t)}{\partial q}\right|_{q=q_o} x = U^{\text{вын}}(0,t) - f(t)\,x, \quad (5.21)$$

где введено обозначение $(-f(t))$ для производной от потенциальной энергии по координате, вычисленной в положении равновесия. Слагаемое $U^{\text{вын}}(0,t)$ не зависит от обобщенных координат и обобщенных скоростей и поэтому не дает вклада в уравнения Лагранжа. Отбросим его и запишем функцию Лагранжа механической системы, находящейся в поле внешней вынуждающей силы:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + f(t)\,x. \quad (5.22)$$

При подстановке ее в уравнение (5.7) получим вместо уравнения (5.10) уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{1}{\mu}f(t). \quad (5.23)$$

Уравнение (5.23) — это уже неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение дается суммой общего решения однородного урав-

нения (5.10) и частного решения уравнения (5.23):

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \beta) + \tilde{x}. \tag{5.24}$$

Наиболее интересным случаем вынужденных колебаний является случай, когда внешняя обобщенная сила представляет собой гармоническую функцию

$$f(t) = f_o \cos\gamma t = Re[f_o e^{i\gamma t}], \tag{5.25}$$

где f_o — действительная постоянная. Для гармонической вынуждающей силы уравнение (5.23) удобно записать и решать в комплексной форме:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{1}{\mu} f_o e^{i\gamma t}. \tag{5.26}$$

В правой части уравнения (5.26) стоит экспонента. Поэтому его частное решение $\tilde{x}$ также ищем в форме экспоненты $\tilde{x} = B\exp(i\gamma t)$. Подставляя $\tilde{x}$ в такой форме в уравнение (5.26), находим постоянную B:

$$B = \frac{f_o}{\mu(\omega_o^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} = \frac{f_o(\omega_o^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma)}{\mu((\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2)}. \tag{5.27}$$

Представим постоянную B в экспоненциальной форме $B = b\exp(i\delta)$,

где

$$b = |B| = \frac{f_o}{\mu\sqrt{(\omega_o^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad tg\delta = -\frac{2\lambda\gamma}{\omega_o^2 - \gamma^2}. \tag{5.28}$$

Тогда действительная часть общего решения уравнения(5.23) с гармонической вынуждающей силой (5.25) запишется в виде

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \beta) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{5.29}$$

В отсутствие трения ($\lambda = 0$) вынужденные колебания (5.29) являются суммой свободных колебаний с частотой ω_o и вынужденных колебаний с частотой вынуждающей силы γ и амплитудой, зависящей от частоты:

$$x = a\cos(\omega_o t + \beta) + \frac{f_o}{\mu(\omega_o^2 - \gamma^2)}\cos\gamma t. \tag{5.30}$$

Фаза вынужденных колебаний совпадает с фазой вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний растет при $\gamma \to \omega_o$. Если $\gamma = \omega_o$, то наступает *резонанс,* и решение (5.30) не имеет смысла. В этом случае частное решение уравнения (5.26) необходимо искать в виде $\tilde{x} = Bt\exp(i\omega_o t)$. Для постоянной B получаем значение

$$B = -\frac{if_o}{2\omega_o\mu}. \tag{5.31}$$

Уравнение малых колебаний в случае резонанса принимает вид

$$x = a\cos(\omega_o t + \beta) + \frac{f_o t}{2\mu\omega_o}\sin\gamma t. \tag{5.32}$$

При резонансе фаза вынужденных колебаний на $\pi/2$ отличается от фазы вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний монотонно растет с течением времени, и колебания быстро перестают быть малыми.

Рассмотрим поведение системы вблизи резонанса, когда частота вынуждающей силы мало отличается от частоты свободных колебаний. Положим, что $\gamma = \omega_o + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll \omega_o$. Выражение (5.30), записанное в комплексной форме, можно привести к виду

$$x = (a + be^{i(\varepsilon t - \beta)})e^{i(\omega_o t + \beta)}. \tag{5.33}$$

В выражении (5.33) нужно учитывать только действительную часть, которая равна

$$x = a_1(t)\cos(\omega_o t + \delta(t)), \quad \text{где} \tag{5.34}$$

$$a_1(t) = |a + be^{i(\varepsilon t - \beta)}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t - \beta)}. \tag{5.35}$$

Уравнение (5.34) можно интерпретировать как уравнение колебаний с частотой ω_o, амплитуда $a_1(t)$ и начальная фаза $\delta(t)$ которых медленно меняются с частотой ε. Как видно из (5.35), амплитуда заключена

в пределах

$$|a - b| \leq a_1(t) \leq a + b. \tag{5.36}$$

Если a и b близки друг к другу, то временами колебания будут почти прекращаться, а после опять возобновляться. Такое поведение системы называют *биениями.*

Перейдем к общему случаю, когда присутствует трение ($\lambda \neq 0$). При наличии трения первое слагаемое в (5.29) быстро обращается в нуль за счет экспоненциального множителя. В установившемся режиме остается только второе слагаемое. Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы, но отстают от нее по фазе. Начальная фаза вынужденных колебаний, как видно из (5.27) и (5.28), лежит в пределах $-\pi < \delta < 0$. При сильном трении, когда $\lambda^2 > \omega_o^2/2$, амплитуда вынужденных колебаний монотонно убывает с ростом частоты вынуждающей силы. Если трение мало, то амплитуда максимальна при резонансной частоте $\gamma_o = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2}$.

Рассмотрим отдельно случай, когда трение очень мало: $\lambda \ll \omega_o$. Тогда в первом приближении по λ резонансная частота γ_o совпадает с частотой ω_o. Вблизи резонанса положим $\gamma = \omega_o + \varepsilon$, где $\varepsilon \ll \omega_o$. В первом приближении по λ и ε для амплитуды и начальной фазы

вынужденных колебаний получим

$$b = \frac{f_o}{2\mu\omega_o\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}}, \quad tg\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \tag{5.37}$$

При резонансе, как и в отсутствие трения, колебания отстают от вынуждающей силы на $\pi/2$. Однако амплитуда остается при этом ограниченной. Как было показано ранее, энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. График квадрата амплитуды в зависимости от ε приведен на рис. 5.1. Это — типичная резонансная кривая. Если обозначить через ε_1 частоту, для которой квадрат амплитуды уменьшается в два раза, то находим, что $\varepsilon_1 = \lambda$. Для характеристики систем, совершающих вынужденные колебания, вводится понятие добротности. *Добротность* — это отношение максимальной амплитуды для резонансной частоты к амплитуде, отвечающей близкой к нулю частоте вынуждающей силы. Используя выражение (5.28) для амплитуды и считая λ малой величиной, найдем для добротности Q значение:

$$Q = \frac{b(\gamma=\omega_o)}{b(\gamma=0)} = \frac{\omega_o}{2\lambda} = \frac{\omega_o}{2\varepsilon_1}, \tag{5.38}$$

то есть чем выше добротность, тем меньше полуширина ε_1 резонансной кривой и тем выше поднимается ее пик.

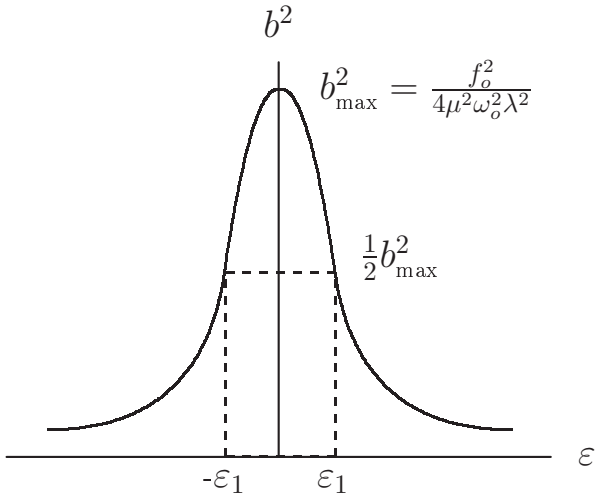

Рис. 5.1

5.3. Свободные многомерные колебания

Обобщенные координаты положения равновесия механической системы с несколькими степенями свободы обозначим через q_{io}. Для смещений из положения равновесия и обобщенных скоростей имеем

$$x_i = q_i - q_{i0}, \quad \dot{x}_i = \dot{q}_i. \tag{5.39}$$

Как и в одномерном случае, потенциальную энергию механической системы разложим в ряд до членов второго порядка малости:

$$U(q_i) = U(q_{io} + x_i) \approx U(q_{io}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_{ij}x_i x_j. \tag{5.40}$$

Здесь s — число степеней свободы. При записи формулы (5.40) учтено, что вследствие минимума потенциальной энергии в положении равновесия первые производные от нее равны нулю, и введено обозначение

$$k_{ij} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{q_i = q_{io}}. \tag{5.41}$$

Коэффициенты k_{ij} постоянны и, как следует из их определения (5.41), симметричны по индексам i, j, то есть они задают симметричную постоянную матрицу. Так как по определению $U(q_{io})$ есть минимальное значение потенциальной энергии, то двойная сумма в разложении (5.40) должна быть положительной при любых значениях x_i. Матрицы, для которых такая сумма всегда положительна, называются *положительно определенными.* Таким образом, матрица k_{ij} — это симметричная положительно определенная матрица постоянных коэффициентов. В выражении (3.25) кинетической энергии зависящие в общем случае от координат коэффициенты $a_{ij}(q_i)$ также разлагаем в ряд вблизи положения равновесия. Поскольку обобщенные скорости $\dot{x}_i$ считаются малыми, то в разложении можно ограничиться нулевым приближением:

$$a_{ij}(q_i) \approx a_{ij}(q_{io}) = \mu_{ij}, \quad T \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j. \tag{5.42}$$

Матрица μ_{ij} — это также симметричная матрица постоянных коэффициентов. Поскольку кинетическая энергия всегда положительна, то матрица μ_{ij}, как и матрица k_{ij}, является положительно определенной.

Запишем функцию Лагранжа многомерной механической системы в приближении малых колебаний. Постоянную $U(q_{io})$ в потенциальной энергии можно опустить. Используя формулы (5.40) и (5.42), для функции Лагранжа в данном приближении получим

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_{ij}x_ix_j. \tag{5.43}$$

Как и в одномерном случае, зависимость функции Лагранжа (5.43) от обобщенных координат x_i и обобщенных скоростей $\dot{x}_i$ задана явно. Форма этой зависимости одинакова для всех механических систем, удовлетворяющих поставленным выше условиям. Свойства конкретной механической системы проявляются в функции Лагранжа только через значения постоянных коэффициентов k_{ij} и μ_{ij}.

Чтобы записать уравнения Лагранжа для функции Лагранжа (5.43), вычислим производные от нее по x_l и $\dot{x}_l$. Эти производные равны

$$\frac{\partial L}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^{s}k_{lj}x_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_l} = \sum_{j=1}^{s}\mu_{lj}\dot{x}_j. \tag{5.44}$$

Ограничимся только уравнениями Лагранжа в отсутствие трения. Подстановка в уравнения Лагранжа частных производных из (5.44) дает

$$\sum_{j=1}^{s}(\mu_{lj}\ddot{x}_j + k_{lj}x_j) = 0. \tag{5.45}$$

Уравнения Лагранжа (5.45) представляют собой однородную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Согласно теории таких уравнений, решение их ищется в форме

$$x_j = A_j e^{i\omega t}, \tag{5.46}$$

где A_j и ω — постоянные, которые необходимо найти. При подстановке x_j из (5.46) в уравнения Лагранжа (5.45) получим характеристическую систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A_j:

$$\sum_{j=1}^{s}(-\omega^2\mu_{lj} + k_{lj})A_j = 0. \tag{5.47}$$

Так как система уравнений (5.47) — однородная система, то она имеет отличные от нуля решения для A_j только тогда, когда ее определитель равен нулю. Условие равенства нулю определителя

$$\det\|-\omega^2\mu_{lj} + k_{lj}\| = 0 \tag{5.48}$$

дает уравнение для нахождения постоянной ω. Если система имеет s степеней свободы, то матрицы μ_{ij} и k_{ij} имеют размерность s. Поэтому уравнение (5.48) будет алгебраическим уравнением степени s относительно ω^2. Такое уравнение имеет s корней, которые обозначим как ω_α^2. Греческий индекс для обозначения номера решения введен специально для того, чтобы отличать номер решения от номера координаты. Корни ω_α^2 могут быть кратными, но вследствие положительной определенности матриц μ_{ij} и k_{ij} они обязательно будут положительными. Поэтому ω_α являются действительными числами. Они определяют частоты колебаний, которые могут происходить в механической системе, и называются *собственными частотами.*

Для каждой частоты ω_α система уравнений (5.47) становится линейно зависимой. Поэтому одно из уравнений системы, которое линейно выражается через другие, можно отбросить. В случае кратных корней таких отбрасываемых уравнений будет несколько. В оставшейся системе уравнений одно или для кратных корней несколько неизвестных из A_j переносим в правую часть и получившуюся систему уравнений решаем. Решение системы — набор постоянных $A_{i\alpha}$ — можно рассматривать как вектор в s-мерном линейном пространстве. Кратному корню ω_α отвечает линейное подпространство, каждый вектор которого будет решением системы (5.47). Размерность

подпространства равна кратности корня. Таким путем находятся s векторов $A_{i\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$.

Подставим два вектора с различными номерами α и β в систему уравнений (5.47) и запишем вытекающие оттуда соотношения:

$$-\omega_\alpha^2 \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} A_{j\alpha} = \sum_{j=1}^{s} k_{ij} A_{j\alpha}, \qquad -\omega_\beta^2 \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} A_{j\beta} = \sum_{j=1}^{s} k_{ij} A_{j\beta}. \quad (5.49)$$

Домножая первое из них на $A_{i\beta}$, а второе на $A_{i\alpha}$, суммируя еще по индексу i и вычитая одно из другого, получим результат:

$$(\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2) \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} A_{i\alpha} A_{j\beta} = 0. \quad (5.50)$$

Если $\omega_\alpha \neq \omega_\beta$, то двойная сумма в (5.50) равна нулю. Для кратных корней, когда $\omega_\alpha = \omega_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, в линейном подпространстве решений можно всегда подобрать векторы, для которых двойная сумма также обратится в нуль. Наконец, для одинаковых векторов $(\alpha = \beta)$ двойная сумма не определена. Вследствие положительной определенности матрицы μ_{ij} она положительна. Можно потребовать, чтобы эта сумма равнялась единице. В результате получим следующие алгебраические условия, которым удовлетворяют векторы Ai_α:

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} A_{i\alpha} A_{j\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (5.51)$$

Двойную сумму в (5.51) можно рассматривать как определение скалярного произведения в линейном пространстве векторов $A_{i\alpha}$. Тогда соотношения (5.51) будут условиями ортонормированности векторов $A_{i\alpha}$, $A_{i\beta}$. При выполнении условий (5.51) из уравнений (5.47) получим

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} k_{ij}A_{i\alpha}A_{j\beta} = \omega_\alpha^2\delta_{\alpha\beta}. \tag{5.52}$$

Из (5.52) видно, что при положительно определенной матрице k_{ij} квадраты частот ω_α^2 будут положительными.

Подставляя полученные решения для $A_{i\alpha}$ в (5.46), получим s частных решений системы (5.45):

$$x_{i\alpha} = A_{i\alpha}e^{i\omega_\alpha t}. \tag{5.53}$$

Так как система дифференциальных уравнений (5.45) — однородная система, то ее общее решение дается суммой частных решений, домноженных на произвольные постоянные:

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{s} C_\alpha x_{i\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{s} C_\alpha A_{i\alpha}e^{i\omega_\alpha t}. \tag{5.54}$$

Решение (5.54) записано в комплексной форме. Представим постоянные C_α в виде $C_\alpha = a_\alpha \exp(i\varphi_\alpha)$ и перейдем к действительной записи

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{s} A_{i\alpha}a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \tag{5.55}$$

Мы видим, что зависимость каждой координаты от времени задается в виде конечной суммы гармонических колебаний. В эту сумму входят только колебания с собственными частотами. Амплитуды a_α и начальные фазы φ_α определяются начальными условиями. Коэффициенты $A_{i\alpha}$ не зависят от начальных условий.

Обозначим посредством Θ_α отдельные колебания, входящие в сумму (5.55). Тогда решение (5.55) запишется в форме

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{s} A_{i\alpha}\Theta_\alpha. \tag{5.56}$$

Выражения (5.56) можно рассматривать как формулы преобразования от координат x_i к координатам Θ_α, где матрица координатного преобразования дается постоянными $A_{i\alpha}$. Если применить это координатное преобразование непосредственно к функции Лагранжа, то можно получить

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}(\sum_{\alpha=1}^{s}A_{i\alpha}\dot{\Theta}_\alpha)(\sum_{\beta=1}^{s}A_{j\beta}\dot{\Theta}_\beta) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{\Theta}_\alpha^2, \tag{5.57}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}k_{ij}(\sum_{\alpha=1}^{s}A_{i\alpha}\Theta_\alpha)(\sum_{\beta=1}^{s}A_{j\beta}\Theta_\beta) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_\alpha^2\Theta_\alpha^2, \tag{5.58}$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot{\Theta}_\alpha^2 - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\omega_\alpha^2\Theta_\alpha^2. \tag{5.59}$$

При выводе этих формул использовались условия нормировки (5.51), выражение (5.52) и свойство перестановочности сумм с разными индексами суммирования.

Функция Лагранжа (5.59) имеет наиболее простой вид. Координаты Θ_α, в которых функция Лагранжа принимает вид (5.59), называются *нормальными координатами.* Собственные частоты ω_α также называются *нормальными частотами.* Уравнения Лагранжа для каждой из нормальных координат имеют вид уравнений одномерных свободных колебаний:

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \tag{5.60}$$

Очевидно, что решение уравнений (5.60) для каждой нормальной координаты – это одномерное гармоническое колебание

$$\Theta_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \tag{5.61}$$

Полученный результат полностью согласуется с формулами (5.55) и (5.56).

Преобразование (5.56) к нормальным координатам было проведено нами после решения системы дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания. Методами линейной алгебры это преобразование можно сделать до записи уравнений Лагранжа. Для этого нужно найти преобразование координат, которое одновременно при-

водит к диагональной форме две симметричные матрицы — μ_{ij} и k_{ij}, обращая одну из них в единичную. Тогда уравнения Лагранжа примут вид (5.60) и решение их не будет представлять никаких трудностей.

Как правило, нормальные координаты не являются координатами каких-либо частей механической системы, а представляют собой расчетные величины. Однако можно задать такие начальные данные, когда все координаты механической системы будут изменяться по гармоническому закону с одной из нормальных частот. Для этого начальные данные нужно выбрать так, чтобы амплитуды всех нормальных колебаний, кроме одной, были равны нулю. Тогда в суммах (5.55) останется только по одному слагаемому, которое и будет определять частоту малых колебаний для всех координат.

5.4. Задачи

5.1. Выразить амплитуду и начальную фазу одномерных колебаний через начальные данные x_o и v_o.

5.2. Найти частоту малых колебаний частицы массы m в следующих потенциальных полях:

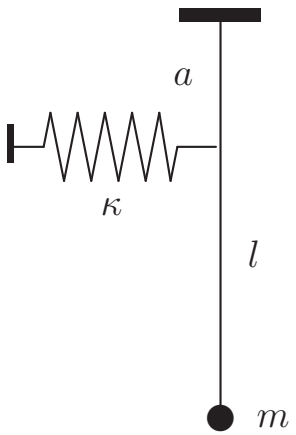

Рис. 5.2

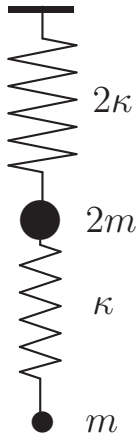

Рис. 5.3

(a) $U(x) = V\cos(\alpha x) - F\,x, \quad \alpha, V, F$ — постоянные;

(b) $U(x) = B(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$.

5.3. Найти частоты малых колебаний следующих механических систем:

(a) шарик на пружинках из задачи 3.3b;

(b) математический маятник длиной l, который подкреплен пружиной жесткости κ, отстоящей от точки подвеса на расстоянии a (рис. 5.2);

(c) математический маятник из предыдущей задачи, перевернутый точкой подвеса вниз;

(d) материальная точка массой m, которая может двигаться вертикально в поле силы тяжести и поддерживается во взвешенном состоянии над горизонтальной плоскостью отталкивающей силой, обратно пропорциональной расстоянию до плоскости (коэффициент пропорциональности λ);

(e) материальная точка на вращающейся окружности из задачи 3.3d.

5.4. Найти свободные колебания механической системы, изображенной на рис. 5.3. Массы двигаются только по вертикали в поле силы тяжести. Найти нормальные координаты и нормальные частоты.

5.5. Найти малые колебания двойного математического маятника из задачи 3.3c при условии $l_1 = l_2$. Рассмотреть случай, когда $m_1 \gg m_2$. Как будут происходить колебания, если в начальный момент времени отклонить из положения равновесия только массу m_1 и отпустить ее?

5.6. Найти малые колебания линейной системы из трех масс, двигающихся только по прямой линии, соединяющей их (рис. 5.4).

5.7. Найти малые колебания трех одинаковых масс, соединенных оди-

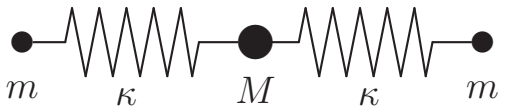

Рис. 5.4

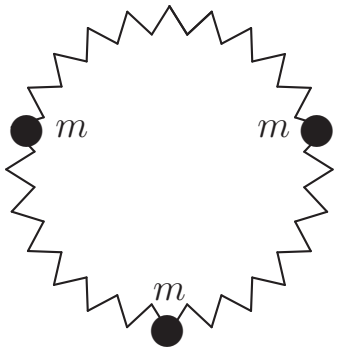

Рис. 5.5

наковыми пружинками и движущимися по окружности (рис.5.5).

5.8. Найти амплитуду малых колебаний одномерной механической системы после действия сил вида:

(a) $F = F_o\frac{t}{\tau}$ при $0 < t < \tau$, $F = F_o$ при $t > \tau$;

(b) $F = F_o\frac{t}{\tau}$ при $0 < t < \tau$, $F = 0$ при $t > \tau$;

(c) $F = F_o$ при $0 < t < \tau$, $F = 0$ при $t > \tau$;

(d) $F = F_o \sin\omega t$ при $0 < t < T$, $F = 0$ при $t > T$;

частота свободных колебаний системы ω, T — период колебаний, начальные данные при $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = 0$.

5.9. На осциллятор с трением (параметры m, λ, ω_o) действует вынуждающая сила вида $f(t) = F_1 \cos\omega t + f_2 \sin 2\omega t$. Найти среднюю

мощность, передаваемую этой силой осциллятору.

Глава 6

Твердое тело

6.1. Кинематика твердого тела

Твердое тело в классической механике определяется как система материальных точек, расстояние между которыми не изменяется. Это может быть система из отдельных материальных точек, соединенных жесткими стержнями, или сплошное тело. Положение твердого тела относительно некоторой системы координат XYZ можно задать следующим образом (рис. 6.1). С твердым телом жестко связывается декартова система координат xyz, которую в дальнейшем будем называть *подвижной системой координат.* Координаты начала подвижной системы координат задаются вектором $\vec{R}_o$. Ориентацию подвижной системы координат относительно неподвижной си-

стемы координат обычно задают с помощью углов Эйлера. Для определения углов Эйлера совместим начала подвижной и неподвижной систем координат (рис. 6.2).

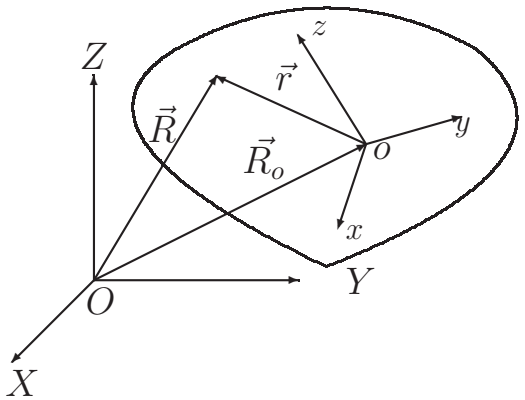

Рис. 6.1

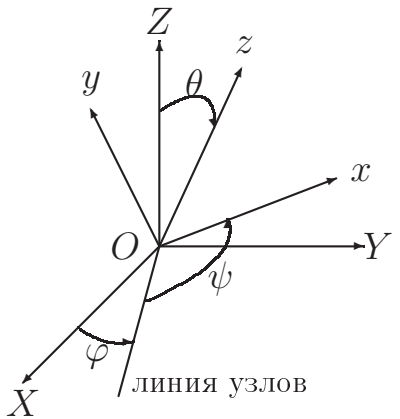

Рис. 6.2

Один из углов Эйлера — это угол θ между осями OZ и oz, отсчитываемый от оси OZ. Линия пересечения плоскостей XOY и xoy называется *линией узлов.* Второй угол Эйлера φ — это угол между осью OX и линией узлов. Третий угол Эйлера ψ отсчитывается в плоскости xoy от линии узлов до оси ox. Три угла Эйлера полностью определяют ориентацию подвижной системы координат относительно неподвижной. Задание трех координат подвижного нача-

ла координат и трех углов Эйлера полностью определяет положение твердого тела. Поэтому твердое тело имеет шесть степеней свободы.

Координаты любой точки твердого тела можно задать как относительно неподвижной системы координат с помощью радиуса-вектора $\vec{R}$, так и с помощью радиуса-вектора $\vec{r}$ относительно подвижной системы координат (рис. 6.1). Из рис. 6.1 видно, что

$$\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r}. \tag{6.1}$$

Дифференцируя равенство (6.1) по времени, получим следующее выражение для скорости некоторой точки твердого тела:

$$\vec{v} = \vec{V}_o + \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{6.2}$$

Здесь $\vec{V}_o$ — скорость подвижного начала координат. Так как вектор $\vec{r}$ проведен в твердом теле, то его длина остается постоянной и он испытывает только вращение. Направление оси вращения может быть различным в разные моменты времени. Направление оси вращения в данный момент времени зададим единичным вектором $\vec{n}$, а угол поворота при вращении вокруг нее обозначим через Φ. Тогда, используя формулу (3.33), производную от $\vec{r}$ запишем в виде

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\Phi}\frac{d\Phi}{dt} = [\vec{n} \times \vec{r}]\frac{d\Phi}{dt}. \tag{6.3}$$

Введем вектор мгновенной угловой скорости

$$\vec{\Omega} = \frac{d\Phi}{dt}\vec{n}. \tag{6.4}$$

Вектор угловой скорости направлен по оси вращения и связан с направлением вращения правилом правого буравчика. С учетом сделанных определений скорость произвольной точки твердого тела можно представить в виде суммы скорости подвижного начала координат и скорости, обусловленной вращением тела:

$$\vec{v} = \vec{V}_o + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \tag{6.5}$$

Угловая скорость твердого тела не зависит от положения подвижного начала координат. Перенесем начало подвижной системы координат из точки o в точку o' вдоль вектора $\vec{l}$, как показано на рис. 6.3. Из рисунка и формулы (6.5) получим новое выражение для скорости:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}\,' + \vec{l}, \\ \vec{v} &= \vec{V}_o + \vec{\Omega} \times \vec{l} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,' = \vec{V}_{o'} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,'. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Здесь $\vec{V}_{o'}$ — скорость нового начала подвижной системы координат, $\vec{r}\,'$ — координата точки твердого тела относительно новой подвижной системы координат. Последнее равенство в (6.6) аналогично равенству в формуле (6.5) с той же самой угловой скоростью $\vec{\Omega}$, что доказывает утверждение о независимости угловой скорости от выбора

начала подвижной системы координат. Поэтому можно говорить об угловой скорости вращения твердого тела без указания, где выбрано начало подвижной системы координат.

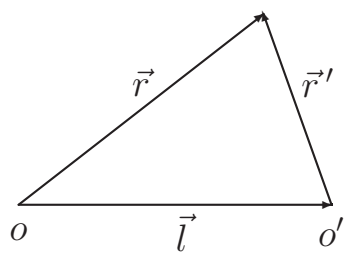

Рис. 6.3

Как и другие векторы, векторы угловой скорости можно складывать. Запишем сумму трех угловых скоростей, каждая из которых получается при изменении только одного из углов Эйлера. В результате получим

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{e}_{\text{узл}} + \dot{\varphi}\vec{K} + \dot{\psi}\vec{k}, \tag{6.7}$$

где векторы $\vec{K}$ и $\vec{k}$ — это единичные векторы, направленные соответственно вдоль осей OZ и oz, вокруг которых происходит вращение при изменении углов φ и ψ. Единичный вектор $\vec{e}_{\text{узл}}$ направлен вдоль линии узлов, которая является осью вращения при изменении углаθ. Формула (6.7) дает разложение вектора угловой скорости по трем направлениям, которые не совпадают с направлениями координатных

осей. Спроектируем векторы $\vec{K}$ и $\vec{e}_{\text{узл}}$ на подвижные оси, что дает

$$\vec{e}_{\text{узл}} = \vec{i}\cos\psi - \vec{j}\sin\psi, \tag{6.8}$$

$$\vec{K} = \vec{k}\cos\theta + \sin\theta(\vec{i}\sin\psi + \vec{j}\cos\psi). \tag{6.9}$$

Подставляя разложения (6.8) и (6.9) в формулу (6.7) и собирая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим проекции вектора угловой скорости на подвижные оси:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \Omega_y &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \Omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Формулы (6.10) называются *кинематическими формулами Эйлера.* Они позволяют найти вектор угловой скорости, если задан закон изменения углов Эйлера как функция времени. Аналогичным образом после проектирования векторов $\vec{k}$ и $\vec{e}_{\text{узл}}$ на неподвижные оси можно получить проекции вектора угловой скорости на неподвижные оси.

6.2. Тензор инерции

Запишем момент импульса и кинетическую энергию твердого тела. Согласно формулам (1.28) и (1.32) их можно представить в виде

$$\vec{M} = \vec{M}_{\text{вращ}} + \mu\vec{R} \times \vec{V}_{\text{ц.и}}, \tag{6.11}$$

$$T = T_{\text{вращ}} + \frac{\mu V_{\text{ц.и}}^2}{2}. \tag{6.12}$$

Здесь $\vec{M}_{\text{вращ}}$ и $T_{\text{вращ}}$ — момент импульса и кинетическая энергия твердого тела в системе отсчета центра инерции твердого тела. В системе отсчета центра инерции твердое тело может только вращаться. Поэтому момент импульса и кинетическая энергия связаны только с вращением и должны выражаться через угловую скорость твердого тела. Для вычисления момента импульса начало подвижной системы координат поместим в центр инерции твердого тела и перейдем в систему отсчета центра инерции. Подставляя скорость из формулы (6.5) в определение момента импульса и учитывая, что $\vec{V}_o = 0$, получим

$$\vec{M}_{\text{вращ}} = \sum_a m_a[\vec{r}_a \times \vec{v}_a] = \sum_a m_a[\vec{r}_a \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}_a]]. \tag{6.13}$$

Будем рассматривать только момент импульса и кинетическую энергию, обусловленные вращением тела, и отбросим индекс «вращ». Рас-

крывая в формуле (6.13) двойное векторное произведение, найдем для момента импульса:

$$\vec{M} = \sum_a m_a(\vec{\Omega} r_a^2 - \vec{r}_a(\vec{\Omega}\vec{r}_a)). \tag{6.14}$$

Спроектируем равенство (6.14) на оси координат. Для проектирования следует выбрать подвижные оси координат, которые жестко связаны с твердым телом. Проекция на ось ox имеет вид

$$M_x = \sum_a m_a(\Omega_x r_a^2 - x_a(\Omega_x x_a + \Omega_y y_a + \Omega_z z_a)) \tag{6.15}$$

и может быть записана в форме

$$M_x = I_{11}\Omega_x + I_{12}\Omega_y + I_{13}\Omega_z \tag{6.16}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_a m_a(r_a^2 - x_a^2) = \sum_a m_a(y_a^2 + z_a^2), \\ I_{12} &= -\sum_a m_a x_a y_a, \\ I_{13} &= -\sum_a m_a x_a z_a. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Аналогичным образом получаются проекции на оси oy и oz. Все три проекции можно записать в виде

$$M_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\Omega_j. \tag{6.18}$$

Здесь индексы i, j задают номер координатной оси. Величины I_{ij} являются компонентами симметричного тензора второго ранга, называемого *тензором инерции.* Компоненты тензора инерции записываются в виде следующей симметричной матрицы:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum\limits_a m_a(y_a^2 + z_a^2) & -\sum\limits_a m_a x_a y_a & -\sum\limits_a m_a x_a z_a \\ -\sum\limits_a m_a x_a y_a & \sum\limits_a m_a(x_a^2 + z_a^2) & -\sum\limits_a m_a y_a z_a \\ -\sum\limits_a m_a x_a z_a & -\sum\limits_a m_a y_a z_a & \sum\limits_a m_a(x_a^2 + y_a^2) \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Если твердое тело является сплошным, а не состоит из отдельных материальных точек, то суммы в (6.19) заменяются интегралами по объему твердого тела. Например, компонента I_{11} тензора инерции вычисляется по формуле

$$I_{11} = \iiint \rho(y^2 + z^2)\, dV. \tag{6.20}$$

Выразим теперь через тензор инерции кинетическую энергию вращения твердого тела. В системе отсчета центра инерции имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum_a m_a \vec{v}_a \vec{v}_a = \frac{1}{2}\sum_a m_a \vec{v}_a[\vec{\Omega} \times \vec{r}_a] = \frac{1}{2}\sum_a m_a \vec{\Omega}[\vec{r}_a \times \vec{v}_a] = \frac{1}{2}\vec{M}\vec{\Omega}. \tag{6.21}$$

Подставляя в формулу (6.21) выражения для проекций момента импульса из (6.18), получим для кинетической энергии твердого тела

следующую формулу:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_{ij}\Omega_i\Omega_j. \tag{6.22}$$

Тензор инерции определяется распределением масс в твердом теле и является характеристикой твердого тела, не зависящей от характера движения твердого тела. Диагональные компоненты тензора инерции равны моментам инерции при вращении твердого тела вокруг осей, совпадающих с координатными осями подвижной системы координат. Недиагональные компоненты тензора инерции называются *центробежными моментами инерции.* Так как тензор инерции является симметричным тензором второго ранга, то преобразованием координат его можно привести к диагональной форме, когда недиагональные компоненты будут равны нулю. Оси декартовой системы координат, в которой тензор инерции имеет диагональную форму, называются *главными осями инерции.* Диагональные компоненты тензора инерции в главных осях инерции называются *главными моментами инерции* и обычно записываются с одним индексом: I_1, I_2, I_3. В главных осях инерции момент импульса и кинетическая энергия твердого тела записываются в особенно простой форме:

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_x^2 + I_2\Omega_y^2 + I_3\Omega_z^2), \tag{6.23}$$

$$M_x = I_1\Omega_x, \quad M_y = I_2\Omega_y, \quad M_z = I_3\Omega_z. \tag{6.24}$$

Если твердое тело обладает некоторой симметрией, то направления главных осей инерции совпадают с осями симметрии твердого тела. Поэтому при вычислении тензора инерции для таких твердых тел оси координат направляют по осям симметрии твердого тела.

6.3. Уравнения движения твердого тела

Для получения уравнений движения твердого тела запишем его функцию Лагранжа. В качестве обобщенных координат выберем три координаты центра инерции твердого тела: X, Y, Z, задающие его положение относительно неподвижной системы отсчета, и три угла Эйлера: θ, φ, ψ, определяющие ориентацию подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат. Начало подвижной системы координат поместим в центр инерции твердого тела, а оси подвижной системы координат направим по главным осям инерции твердого тела. Тогда функция Лагранжа твердого тела будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}(I_1\Omega_x^2 + I_2\Omega_y^2 + I_3\Omega_z^2) - U(X, Y, Z, \theta, \varphi, \psi). \tag{6.25}$$

При таком выборе подвижной системы координат в формуле для кинетической энергии твердого тела отделяются слагаемые, описывающие кинетическую энергию поступательного движения тела и кинетическую энергию его вращения. Проекции угловой скорости, согласно формулам (6.10), выражаются через углы Эйлера и не содержат координат центра инерции твердого тела.

Уравнения движения твердого тела разобьются на две группы уравнений. Первая группа получается при дифференцировании по координатам центра инерции. Она имеет вид уравнений второго закона Ньютона для материальной точки, масса которой равна массе твердого тела и координаты которой совпадают с координатами центра инерции твердого тела:

$$\mu\ddot{X} = -\frac{\partial U}{\partial X}, \quad \mu\ddot{Y} = -\frac{\partial U}{\partial Y}, \quad \mu\ddot{Z} = -\frac{\partial U}{\partial Z}. \tag{6.26}$$

В левой части этих уравнений стоят проекции ускорения центра инерции, в правой — проекции силы, приложенной к центру инерции. Уравнения (6.26) совпадают с уравнениями движения материальной точки, имеющей массу твердого тела и координаты, равные координатам центра инерции твердого тела. Их решение дает закон движения центра инерции твердого тела. Центр инерции твердого тела движется как материальная точка, масса которой равна массе твер-

дого тела.

Другая группа уравнений движения для твердого тела получается при дифференцировании функции Лагранжа по углам Эйлера. Найдем производные по $\dot{\psi}$ и ψ. Используем для этого функцию Лагранжа (6.25) и формулы Эйлера (6.10). Вычисления дают

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \Omega_z \frac{\partial \Omega_z}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \Omega_z, \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = I_1 \Omega_x \frac{\partial \Omega_x}{\partial \psi} + I_2 \Omega_y \frac{\partial \Omega_y}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \psi} = (I_1 - I_2)\Omega_x \Omega_y - \frac{\partial U}{\partial \psi}\,. \tag{6.28}$$

Смысл частной производной $\frac{\partial U}{\partial \psi}$ можно уяснить, если ее рассматривать как производную от сложной функции, когда вначале берутся производные по координатам отдельных точек твердого тела:

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \sum_a \left(\frac{\partial U}{\partial X_a}\frac{\partial X_a}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial Y_a}\frac{\partial Y_a}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial Z_a}\frac{\partial Z_a}{\partial \psi}\right) = -\sum_a \vec{f}_a \frac{\partial \vec{R}_a}{\partial \psi}\,. \tag{6.29}$$

Используя формулу (3.33) для производной радиуса-вектора по угловой координате, найдем

$$-\frac{\partial U}{\partial \psi} = \sum_a \vec{f}_a [\vec{k} \times \vec{R}_a] = \vec{k} \sum_a [\vec{R}_a \times \vec{f}_a] = K_z, \tag{6.30}$$

где K_z — проекция на подвижную ось oz момента действующих на твердое тело сил. В результате уравнение Лагранжа по координате

ψ принимает вид

$$I_3\dot{\Omega}_z + (I_2 - I_1)\Omega_x\Omega_y = K_z. \tag{6.31}$$

Это уравнение записано в проекции на ось oz подвижной системы координат. Уравнения Лагранжа по координатам θ и φ дадут проекции уравнений движения соответственно на ось узлов и ось OZ неподвижной системы координат. Эти проекции обычно не используются. Вместо них записывают уравнения в проекциях на оси ox и oy подвижной системы координат. Вследствие равноправности всех осей декартовой системы координат эти уравнения можно получить из (6.31) циклической перестановкой индексов. Они имеют вид

$$I_1\dot{\Omega}_x + (I_3 - I_2)\Omega_y\Omega_z = K_x, \tag{6.32}$$

$$I_2\dot{\Omega}_y + (I_1 - I_3)\Omega_x\Omega_z = K_y. \tag{6.33}$$

Уравнения (6.31)—(6.33) называются *уравнениями движения твердого тела в форме Эйлера.* Они записаны в подвижной, жестко связанной с твердым телом системе координат. Их решение дает угловую скорость вращения твердого тела.

Найдем решение уравнений Эйлера для свободного симметричного волчка. *Симметричным волчком* называется тело, у которого два главных момента инерции, например I_1 и I_2, равны. Свободным волчок будет тогда, когда момент внешних сил равен нулю. Полагая в

уравнениях Эйлера $I_1 = I_2$ и $\vec{K} = 0$, получим, что $\Omega_z = const$. Оставшиеся два уравнения принимают вид

$$\dot{\Omega}_x - \omega\Omega_y = 0, \quad \dot{\Omega}_y + \omega\Omega_x = 0, \quad \text{где } \omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\Omega_z. \tag{6.34}$$

Уравнения (6.34) имеют следующие решения:

$$\Omega_x = a\sin(\omega t + \alpha), \quad \Omega_y = a\cos(\omega t + \alpha), \tag{6.35}$$

где a и α — постоянные интегрирования, то есть проекция вектора $\vec{\Omega}$ на плоскость xoy подвижной системы координат вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Рассмотрим теперь движение волчка с точки зрения неподвижного наблюдателя. Так как момент внешних сил равен нулю, то сохраняется вектор момента импульса волчка. Направим вдоль этого вектора ось OZ неподвижной системы координат (рис. 6.4). Проекция момента импульса на ось oz подвижной системы координат $M_z = I_3\Omega_z$ остается постоянной. Так как, согласно рис. 6.4, эта проекция равна $M_z = M\cos\theta$, то угол θ остается постоянным, то есть ось oz подвижной системы координат, совпадающая с осью симметрии волчка, описывает конус вокруг оси OZ неподвижной системы координат. Полагая в кинематических формулах Эйлера $\dot{\theta}$ равным нулю, нахо-

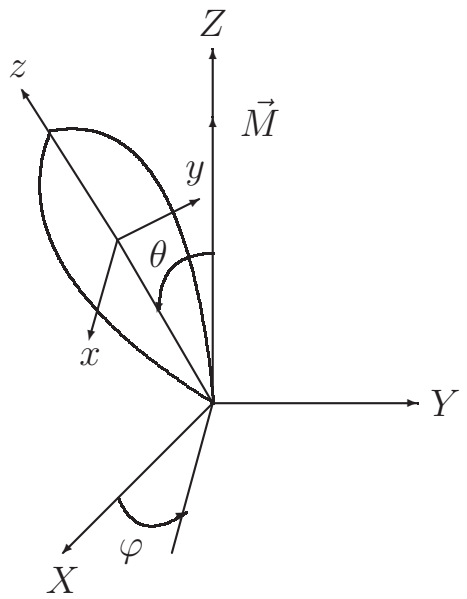

Рис. 6.4

дим

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2}}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{I_1 \sin\theta} = \frac{M}{I_1}\,. \tag{6.36}$$

Постоянная угловая скорость $\dot{\varphi}$ — это скорость, с которой ось волчка описывает конус вокруг направления постоянного момента. Говорят, что ось волчка совершает регулярную прецессию. Скорость вращения волчка вокруг своей оси равна Ω_z. Она также может быть выражена

через момент импульса:

$$\Omega_z = \frac{M_z}{I_3} = \frac{M\cos\theta}{I_3}\,. \tag{6.37}$$

6.4. Задачи

6.1. Движение тела, имеющего неподвижную точку, задано уравнениями

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}t, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \pi t.$$

Определить скорость точки тела, имеющей по отношению к подвижной системе координат координаты: $0, 0, 32$.

6.2. В вершинах квадрата со стороной $2a$ расположены массы M и m. Найти компоненты тензора инерции относительно осей xyz и $x'y'z'$. Оси oz и oz' направлены перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 6.5).

6.3. Найти тензор инерции твердого тела, представляющего собой равнобедренный треугольник, в вершинах которого расположены одинаковые массы.

6.4. Найти тензор инерции плоской однородной пластины с массойm, имеющей форму прямоугольника со сторонами a и b.

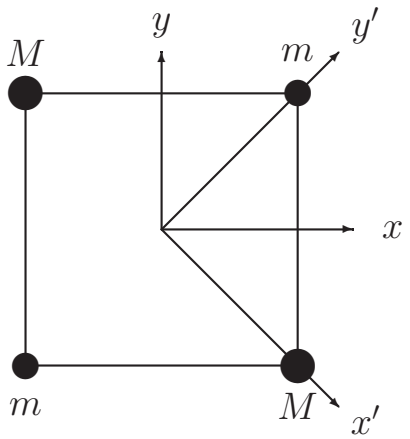

Рис. 6.5

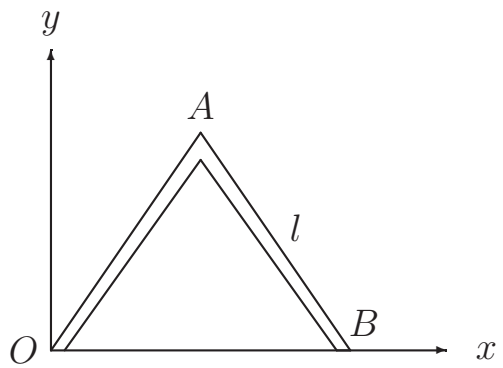

Рис. 6.6

6.5. Для пластины из предыдущей задачи найти кинетическую энергию и момент импульса при ее вращении вокруг оси, проходящей по одной из диагоналей, и при вращении вокруг оси, проходящей по одной из сторон пластины.

6.6. Найти тензор инерции однородного цилиндра, имеющего массу m, радиус R и высоту H.

6.7. Найти тензор инерции однородного прямоугольного параллелепипеда, имеющего массу m и длины ребер $a, \quad b, \quad c$.

6.8. Однородный цилиндр имеющий радиус R и массу m, скатывается

с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найти закон его движения.

6.9. Найти частоту малых колебаний для цилиндра, имеющего радиус r и массу m, который катается без проскальзывания по внутренней поверхности цилиндра радиуса R. Рассмотреть первое приближение по r/R.

6.10. Решить аналогичную задачу для шарика радиуса r, катающегося без проскальзывания по внутренней поверхности сферы радиуса R. Сравнить полученную частоту с частотой колебаний математического маятника.

6.11. Найти кинетическую энергию механической системы, изображенной на рис. 6.6. Стержни имеют длину l и массу m. Стержень OA вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг точки O. Стержень AB одним концом скользит по оси Ox.

Глава 7

Канонические уравнения

7.1. Получение канонических уравнений

Уравнения Лагранжа (3.8) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат q_i. Число уравнений равно числу степеней свободы s. Известно, что порядок дифференциальных уравнений можно понизить путем введения новых переменных и увеличением количества уравнений. В классической механике в качестве дополнительного набора переменных выбирают обобщенные импульсы

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \,. \tag{7.1}$$

Для замены переменных в уравнениях Лагранжа используется известное в теории дифференциальных уравнений преобразование Лежандра. В данном случае для этого запишем дифференциал функции Лагранжа как функции переменных $q_i, \dot{q}_i$ и t:

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\, dq_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt = \sum_i \left(p_i\, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\, dq_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt. \quad (7.2)$$

Используя тождество

$$p_i\, d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i\, dp_i,$$

преобразуем равенство (7.2) к виду

$$d\Big(L - \sum_i p_i \dot{q}_i\Big) = \sum_i \left(-\dot{q}_i\, dp_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\, dq_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\, dt. \quad (7.3)$$

В левой части формулы (7.3) стоит дифференциал от полной энергии механической системы (3.39), взятый со знаком минус. Для того чтобы использовать равенство (7.3), необходимо энергию записать как функцию переменных q_i, p_i и t, дифференциалы которых стоят в правой части равенства (7.3). Энергия механической системы, выраженная через обобщенные координаты, обобщенные импульсы и время, играет важную роль в механике. Она называется *функцией*

Гамильтона и обозначается буквой H:

$$H = H(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \tag{7.4}$$

Из формулы (7.3) и определения дифференциала H как функции переменных q_i, p_i и t получаем следующие выражения для частных производных от функции Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{7.5}$$

Первое из равенств (7.5) является соотношением обратным определению обобщенного импульса (7.1), так как позволяет выразить обобщенные скорости $\dot{q}_i$ через обобщенные импульсы p_i. С помощью второго равенства из (7.5) производные от функции Лагранжа по координатам в уравнении Лагранжа можно заменить на производные от функции Гамильтона. Производя эту замену в уравнениях Лагранжа, записанных согласно (3.35) через обобщенные импульсы, и добавляя к полученным уравнениям первое из равенств (7.5), получаем систему уравнений:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{7.6}$$

Уравнения (7.6) называются *уравнениями Гамильтона.* Это система дифференциальных уравнений первого порядка относительно

удвоенного набора неизвестных q_i и p_i. Число уравнений в два раза больше числа уравнений Лагранжа и равно $2s$. Как и уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона получаются из одной скалярной функции — функции Гамильтона. Преимуществом системы (7.6) является еще и то, что уравнения разрешены относительно производных от координат и импульсов. Вследствие простоты уравнений Гамильтона их также называют *каноническими уравнениями* механики.

Канонические уравнения можно получить из модифицированного принципа наименьшего действия. Для этого из определения (7.4) выразим функцию Лагранжа через функцию Гамильтона и полученное выражение подставим в интеграл действия (2.22). В результате действие приводится к виду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \, dq_i - H \, dt. \tag{7.7}$$

Считая в выражении (7.7) обобщенные координаты и обобщенные импульсы независимыми переменными, запишем вариацию действия

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i (\delta p_i \, dq_i + p_i \, \delta(dq_i) - (\frac{\partial H}{\partial q_i} \, \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \, \delta p_i) \, dt). \tag{7.8}$$

Разобьем интеграл на сумму нескольких интегралов. Во втором интеграле выполним интегрирование по частям. Как и при выводе урав-

нений Лагранжа, используем перестановочность операций варьирования и дифференцирования. Записывая опять все под одним интегралом, в результате получим

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i (\delta p_i (dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt) - \delta q_i (dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\, dt)). \qquad (7.9)$$

Поскольку δq_i и δp_i — независимые вариации, то из требования, чтобы вариация действия обращалась в нуль, следуют равенства

$$dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dt = 0, \quad dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\, dt = 0. \qquad (7.10)$$

После деления их на dt получим канонические уравнения (7.6). Таким образом канонические уравнения выводятся из принципа наименьшего действия, если действие представить в виде (7.7).

В качестве примера рассмотрим получение функции Гамильтона и канонических уравнений в полярной системе координат для материальной точки, движущейся в плоскости. Функция Лагранжа для этой задачи приведена в формуле (3.18). Найдем для нее обобщенные импульсы:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r, \varphi), \\ p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \end{aligned} \qquad (7.11)$$

Запишем энергию системы и с помощью формул (7.11) выразим ее через обобщенные импульсы. В результате получим функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r,\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r,\varphi). \qquad (7.12)$$

Теперь вычисляем производные от функции Гамильтона:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{2p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}. \qquad (7.13)$$

Значения производных подставляем в формулы (7.6) и получаем канонические уравнения в полярных координатах:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}, \quad \dot{p_r} = \frac{2p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \dot{p_\varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \qquad (7.14)$$

7.2. Фазовое пространство, скобки Пуассона

Для наглядного геометрического изображения решений канонических уравнений (7.6) вводится понятие *фазового пространства.* Фазовое пространство — это абстрактное пространство $2s$ измерений, на координатных осях которого откладываются обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Система координат в фазовом про-

странстве считается декартовой системой координат. Решение канонических уравнений дает $2s$ функций $q_i(t)$ и $p_i(t)$. В каждый момент времени эти функции определяют в фазовом пространстве одну точку. Эта точка называется *изображающей точкой* и полностью определяет состояние механической системы. С течением времени значения функций $q_i(t)$ и $p_i(t)$ изменяются, и изображающая точка перемещается по фазовому пространству, описывая кривую, которая называется *фазовой траекторией.* Движение механической системы с любым конечным числом степеней свободы всегда изображается в фазовом пространстве как траектория изображающей точки. От размерности механической системы зависит только размерность фазового пространства.

Канонические уравнения — это система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому начальные данные для нее задаются только на сами неизвестные функции. Задание в некоторый момент времени t_o начальных данных $p_i(t_o)$ и $q_i(t_o)$ означает задание точки в фазовом пространстве. Поскольку начальные данные полностью определяют частное решение канонических уравнений, то из каждой точки фазового пространства выходит только одна фазовая траектория. Поэтому фазовые траектории не пересекаются.

В статистической физике вводится понятие *статистического ансамбля.* Статистический ансамбль — это множество идентичных механических систем, для которых заданы различные начальные данные. В фазовом пространстве статистический ансамбль изобразится множеством точек, которые можно рассматривать как частицы сплошной среды, называемой *фазовой жидкостью.* Если в начальный момент времени в фазовой жидкости выделить некоторый объем, то при движении каждой частицы фазовой жидкости по своей фазовой траектории этот объем будет перемещаться и деформироваться. Однако вследствие выполнения канонических уравнений величина этого объема не меняется при его перемещении, то есть фазовая жидкость является *несжимаемой жидкостью.* Это утверждение носит название теоремы Лиувилля. Теорема Лиувилля применяется для обоснования функции распределения в статистической физике.

Рассмотрим произвольную функцию координат импульсов и времени $f(q_i, p_i, t)$ и найдем от нее полную производную по времени. Так как координаты и импульсы зависят от времени, то производную считаем как производную от сложной функции. В результате получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right). \tag{7.15}$$

Производные от координат и импульсов по времени с помощью канонических уравнений (7.6) заменим на производные от функции Гамильтона. Тогда выражение (7.15) приводится к виду

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right). \tag{7.16}$$

Определим новую величину, называемую *скобкой Пуассона* функций H и f, согласно формуле

$$(H, f) = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right). \tag{7.17}$$

Тогда полная производная от функции $f(q_i, p_i, t)$ запишется в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (H, f). \tag{7.18}$$

Формула (7.18) дает производную по времени от любой функции координат, импульсов и времени. Если в качестве таких функций возьмем обобщенные координаты q_i, то получим первую группу канонических уравнений:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = 0, \quad (H, q_i) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{7.19}$$

Точно так же при подстановке в скобку Пуассона (7.17) вместо функции f обобщенных импульсов p_i из (7.18) получается вторая группа

канонических уравнений. Таким образом, формула (7.18) включает в себя и канонические уравнения. При построении квантовой механики Гейзенберг использовал обобщение формулы (7.18) для получения производной по времени для операторов, описывающих физические величины в квантовой механике.

Если некоторая функция координат и импульсов не зависит явно от времени и ее скобка Пуассона с функцией Гамильтона H равна нулю, то эта функция остается постоянной при движении механической системы, и, следовательно, имеется закон сохранения. Например, скобка Пуассона функции Гамильтона с функцией Гамильтона тождественно равна нулю. Поэтому если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то она остается постоянной. Поскольку функция Гамильтона равна энергии механической системы, то это означает, что выполняется закон сохранения механической энергии.

7.3. Канонические преобразования

Форма уравнений Лагранжа не изменяется при любых невырожденных преобразованиях от обобщенных координат q_i к другим обоб-

щенным координатам Q_i:

$$q_i = f_i(Q_i, t). \tag{7.20}$$

Это свойство, называемое *ковариантностью уравнений,* вытекает из того, что действие (2.22) выражается через скалярную функцию Лагранжа, которая может быть записана в любых координатах. В уравнениях Гамильтона (7.6) независимыми переменными являются обобщенные координаты q_i и обобщенные импульсы p_i. Поэтому можно рассматривать любые невырожденные преобразования вида

$$q_i = f_i(Q_i, P_i, t), \quad p_i = F_i(Q_i, P_i, t) \tag{7.21}$$

к новым координатам Q_i и импульсам P_i. Однако не всякое преобразование вида (7.21) сохраняет форму канонических уравнений. Если в новых переменных Q_i и P_i канонические уравнения механики попрежнему имеют форму канонических уравнений:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \tag{7.22}$$

то такие преобразования называются *каноническими преобразованиями.* Функция Гамильтона в новых переменных обозначена как H', так как она может отличаться от функции Гамильтона в старых переменных.

Канонические преобразования можно получить на основе вариационного принципа. В новых переменных действие имеет вид

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i P_i \, dQ_i - H' \, dt. \tag{7.23}$$

Поскольку канонические уравнения в старых и новых переменных описывают одну механическую систему, то действия S и S' могут отличаться только на постоянную, вариация которой равна нулю. Следовательно, подынтегральные выражения в них отличаются на дифференциал произвольной функции координат и времени:

$$\sum_i p_i \, dq_i - H \, dt - \sum_i P_i \, dQ_i + H' \, dt = dF(q_i, Q_i, t). \tag{7.24}$$

Если задать такую функцию, то согласно равенству (7.24), частные производные от нее равны

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' - H = \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{7.25}$$

Формулы (7.25) содержат $2s$ соотношений, связывающих старые и новые переменные, и одно соотношение, определяющее новую функцию Гамильтона H'. Поэтому эти формулы задают в неявном виде каноническое преобразование. Функция $F(Q_i, q_i, t)$ называется *производящей функцией* канонического преобразования. Задавая различные

производящие функции, можно получать различные канонические преобразования.

В качестве примера рассмотрим каноническое преобразование для одномерной механической системы, совершающей линейные колебания, — гармонического осциллятора. Функция Гамильтона гармонического осциллятора имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}. \tag{7.26}$$

Возьмем производящую функцию $F(q, Q, t) = 0.5\, m\omega q^2 \operatorname{ctg} Q$. Из формул (7.25) получим следующее каноническое преобразование и новую функцию Гамильтона:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q, \quad H' = H = \omega P. \tag{7.27}$$

В новых переменных канонические уравнения приобретают особенно простой вид:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0. \tag{7.28}$$

Легко находится их решение: $Q = \omega t + C_1$, $P = C_2$. Подстановка этого решения в формулы преобразования (7.27) дает зависимость q и p от времени, что полностью решает задачу о гармоническом осцилляторе.

7.4. Уравнение Гамильтона—Якоби в частных производных

Теория канонических преобразований используется для получения еще одного метода интегрирования уравнений механики. Можно задаться целью найти такое каноническое преобразование, чтобы в новых переменных функция Гамильтона H' обращалась в нуль. Тогда в правых частях канонических уравнений будут нули, и решение этих уравнений приобретает особенно простой вид:

$$Q_i = A_i = \text{const}, \quad P_i = B_i = \text{const}. \tag{7.29}$$

В этом случае формулы канонического преобразования (7.21) дадут зависимость координат q_i и импульсов p_i от времени и постоянных A_i и B_i, которые можно считать постоянными интегрирования. Основная трудность в этом методе состоит в нахождении производящей функции. Производящая функция, обращающая в нуль функцию Гамильтона, обычно обозначается буквой S. Заменяя в формулах (7.25) F на S и учитывая соотношения (7.29), запишем их в форме

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, A_i, t)}{\partial q_i}, \quad B_i = -\frac{\partial S(q_i, A_i, t)}{\partial A_i}, \tag{7.30}$$

$$0 = \frac{\partial S(q_i, A_i, t)}{\partial t} + H(q_i, p_i, t). \tag{7.31}$$

Равенство (7.31) можно превратить в уравнение для отыскания функции S. Для этого обобщенные импульсы, входящие в функцию Гамильтона, нужно, согласно (7.30), заменить на производные от S по координатам. Так как функция S находится из дифференциального уравнения, то постоянные A_i можно считать постоянными интегрирования и опустить их при записи уравнения. В результате получаем уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) = 0. \tag{7.32}$$

Уравнение (7.32) называется уравнением *Гамильтона—Якоби в частных производных.*

Для механической системы, имеющей s степеней свободы, уравнение Гамильтона—Якоби содержит $s+1$ частных производных. Его решение будет содержать $s+1$ произвольных постоянных. Одна из этих постоянных несущественна. Она может быть просто добавлена к функции S. Для решения задач механики остальные s постоянных должны обязательно присутствовать в решении. Любое решение уравнения Гамильтона—Якоби в частных производных, содержащее s существенных произвольных постоянных, называется его *полным интегралом.* Если полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби найден, то s произвольных постоянных можно считать новыми ко-

ординатами. Вычисляя производные от функции S по постоянным интегрирования и используя второе равенство из (7.30), получим s алгебраических уравнений, дающих неявную зависимость координат q_i от времени. В эти уравнения также будут входить $2s$ постоянных интегрирования. В результате получаем общее решение задачи механики для механической системы с заданной функцией Гамильтона.

Во многих случаях полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби в частных производных находится методом разделения переменных, когда решение ищется как сумма функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, и функция S записывается в форме

$$S(q_i, t) = f_o(t) + f_1(q_1) + f_2(q_2) + \ldots + f_s(q_s). \tag{7.33}$$

Если решения в таком виде можно найти, то говорят, что переменные полностью разделяются. Чаще встречаются случаи, когда отделяются только некоторые переменные. В частности, если функция Гамильтона явно не зависит от времени, то отделяется время. Решение ищется в форме $S = f_o(t) + W(q_i)$. Уравнение Гамильтона—Якоби принимает вид

$$\frac{df_o}{dt} = -H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}). \tag{7.34}$$

Функция Гамильтона равна энергии механической системы. Если функ-

ция Гамильтона не зависит явно от времени, то энергия сохраняется, и уравнение (7.34) приводит к двум уравнениям:

$$\frac{df_o}{dt} = -E, \quad H(q_i, \frac{\partial W}{\partial q_i}) = E. \tag{7.35}$$

Первое из этих уравнений имеет решение $f_o = -Et$. Поэтому остается решить только второе уравнение и записать решение в форме

$$S = -Et + W(q_i). \tag{7.36}$$

Рассмотрим сейчас решение задачи о гармоническом осцилляторе с помощью уравнения Гамильтона—Якоби в частных производных. Функция Гамильтона для этой задачи дается формулой (7.26). Поскольку функция Гамильтона явно не зависит от времени, то функцию S выбираем в форме (7.36). Уравнение для функции W имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = E. \tag{7.37}$$

Находим решение этого уравнения и записываем функцию S:

$$S = -Et + \int \sqrt{2m(E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2)}\, dq. \tag{7.38}$$

В решение (7.38) входит одна постоянная интегрирования E. Согласно положениям метода уравнения Гамильтона—Якоби берем частную

производную по этой постоянной и приравниваем ее к новой постоянной:

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t + \int (2mE - m^2\omega^2 q^2)^{-\frac{1}{2}} m\, dq = C \tag{7.39}$$

Остается посчитать неопределенный интеграл и из полученного выражения найти q. В результате получаем обычное уравнение малых колебаний, в котором амплитуда выражена через энергию колебаний:

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega(t + C)). \tag{7.40}$$

7.5. Задачи

7.1. Найти функцию Гамильтона и записать канонические уравнения материальной точки с массой m, движущейся в потенциальном поле U, в следующих системах координат:

(a) декартовых;

(b) цилиндрических;

(c) сферических;

(d) параболических на плоскости, введенных формулами:
$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$.

7.2. Написать функцию Гамильтона и канонические уравнения, если функция Лагранжа равна:

(a) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + c(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$,

(b) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

7.3. Проинтегрировать канонические уравнения и найти закон движения частицы, функция Гамильтона которой равна

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{k}{2}x^2 + \lambda(\frac{p^2}{2} + \frac{k}{2}x^2)^2.$$

7.4. Найти функцию Гамильтона и записать канонические уравнения сферического маятника длиной l и с массой m. (Сферический маятник — это материальная точка на подвесе, совершающая неплоское движение.)

7.5. Вычислить следующие скобки Пуассона:

$$(x_i, x_j), \quad (p_i, x_j), \quad (M_i, x_j), \quad (M_i, p_j), \quad (M_i, M_j),$$

где x_i, p_i, M_i — соответственно декартовы компоненты радиуса-вектора, импульса и момента импульса материальной точки массы m.

7.6. Свободная точка с массой m движется в поле силы тяжести. Составить для нее уравнение Гамильтона—Якоби в частных производных. найти его полный интеграл и первые интегралы уравнений движения материальной точки.

Глава 8

Механика сплошной среды

8.1. Метод Эйлера описания сплошной среды

Механика сплошной среды изучает движение газообразных, жидких и твердых деформируемых тел. При этом не учитывается молекулярное строение вещества, а предполагается его непрерывное распределение. В сплошной среде можно выделить малый объем ΔV, имеющий массу Δm, и устремить ΔV к нулю. В этом пределе выделенный объем можно рассматривать как материальную точку, или частицу сплошной среды. Сплошная среда состоит из бесконечного числа таких частиц и, следовательно, является механической системой с бесконечным числом степеней свободы. Границы между частицами не определены, и поэтому частицы нельзя пересчитать. Для то-

го чтобы различать отдельные частицы сплошной среды, можно воспользоваться следующим приемом. Предположим, что в начальный момент времени положение каждой частицы известно и определяется тремя координатами: x_o, y_o, z_o, или радиусом-вектором $\vec{r}_o$. В любой другой момент времени положение этих частиц будет задаваться радиусом-вектором $\vec{r}(t, \vec{r}_o)$. Здесь координаты x_o, y_o, z_o радиуса-вектора $\vec{r}_o$ выделяют индивидуальную частицу среды. Они заменяют номер частицы, используемый в механике системы материальных точек. Однако в отличие от номера частицы начальные параметры x_o, y_o, z_o изменяются непрерывно. Выделив таким способом отдельные частицы сплошной среды, для них можно вычислить различные механические величины. Например, скорость и ускорение частиц сплошной среды определяется по формулам:

$$\vec{v} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right|_{\vec{r}_o=\mathrm{const}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{w} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{r}_o=\mathrm{const}} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{8.1}$$

Частная производная при $\vec{r}_o = \mathrm{const}$ в механике сплошных сред называется *полной производной* и обозначается как полная производная. Метод описания сплошной среды, когда все характеристики сплошной среды отслеживаются из начальной конфигурации, называется *методом Лагранжа.*

По известной зависимости $\vec{r}(t, \vec{r}_o)$ можно найти зависимость $\vec{r}_o(t, \vec{r})$.

Подстановка зависимости $\vec{r}_o(t,\vec{r})$ в формулы (8.1) приведет к тому, что скорость и ускорение будут зависеть от времени t и радиуса-вектора $\vec{r}$. Таким образом, от задания величин для отмеченных частиц сплошной среды совершается переход к заданию тех же величин во всех точках пространства, где имеется сплошная среда. В результате получаются заданными поле скоростей, поле ускорений и поля других величин, характеризующих сплошную среду. Метод описания сплошной среды, когда все характеристики сплошной среды задаются как функции координат и времени безотносительно к тому, какие частицы сплошной среды они описывают, называется *методом Эйлера.*

При описании сплошной среды по методу Эйлера для вычисления полных производных по времени для отдельных частиц сплошной среды следует радиус-вектор $\vec{r}$, входящий в аргумент функций, представить как радиус-вектор отмеченной частицы сплошной среды $\vec{r}(t,\vec{r}_o)$. Например, если плотность сплошной среды задана по методу Эйлера как функция координат и времени $\rho(\vec{r},t)$, то вычисление полной производной по времени от нее дает

$$\frac{d\rho}{dt} = \left.\frac{\partial\rho(\vec{r}(\vec{r}_o,t),t)}{\partial t}\right|_{\vec{r}_o=\mathrm{const}} = \left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\mathrm{const}} + (\vec{v}\nabla)\rho, \qquad (8.2)$$

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

По тому же правилу вычисляется поле ускорений сплошной среды:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}. \tag{8.3}$$

8.2. Дифференциальные и интегральные соотношения, подвижный объем

В механике сплошной среды многие величины задаются своими плотностями. Например, плотность массы, плотность импульса и плотность момента импульса определяются по формулам:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \qquad \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V} = \rho \vec{v}, \qquad \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta V} = \rho[\vec{r} \times \vec{v}]. \tag{8.4}$$

Тогда те же величины для конечного объема сплошной среды получаются интегрированием по объему:

$$m = \int\limits_V \rho\, dV, \qquad \vec{p} = \int\limits_V \rho \vec{v}\, dV, \qquad \vec{M} = \int\limits_V \rho[\vec{r} \times \vec{v}]\, dV. \tag{8.5}$$

Уравнения механики сплошной среды также могут быть записаны в дифференциальной и интегральной формах. Объем, по которому

ведется интегрирование, может быть фиксированным или подвижным. Под *подвижным объемом* в механике сплошной среды понимают объем, который движется вместе со сплошной средой. Поэтому частицы сплошной среды не пересекают поверхность, ограничивающую подвижный объем.

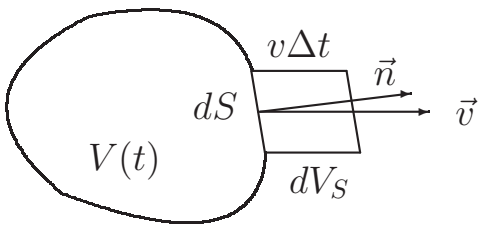

Рис. 8.1

При вычислении производных по времени по подвижному объему необходимо учитывать, что с течением времени подвижный объем может измениться. Как видно из рис. 8.1, за время Δt площадка dS поверхности, ограничивающей объем, сместится на расстояние $v\Delta t$. За счет этого смещения объем увеличится на $dV_S = \vec{v}\vec{n}\Delta t\, dS$. Все изменение объема получается интегрированием этого увеличения по замкнутой поверхности, ограничивающей подвижный объем:

$$\Delta V = \oint\limits_S dV_S = \Delta t \oint\limits_S \vec{v}\vec{n}\, dS. \tag{8.6}$$

Если некоторая величина A задана объемной плотностью ρ_A и вычислена интегрированием по подвижному объему $V(t)$, то ее приращение за время Δt складывается из двух частей: приращения, вызванного изменением плотности внутри объема, и приращения за счет изменения объема:

$$\Delta A = \Delta t \int\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho_A}{\partial t}\, dV + \Delta t \oint\limits_S \rho_A \vec{v}\vec{n}\, dS. \tag{8.7}$$

Разделив соотношение (8.7) на Δt и устремив Δt к нулю, получим производную от величины A, вычисленной по подвижному объему:

$$\frac{dA}{dt} = \int\limits_{V(t)} \frac{\partial \rho_A}{\partial t}\, dV + \oint\limits_S \rho_A \vec{v}\vec{n}\, dS. \tag{8.8}$$

Поверхностный интеграл в формуле (8.8) с помощью теоремы Остроградского—Гаусса можно преобразовать в объемный:

$$\oint\limits_S \rho_A \vec{v}\vec{n}\, dS = \int\limits_V \nabla(\rho_A \vec{v})\, dV. \tag{8.9}$$

Подстановка этого объемного интеграла в равенство (8.8) приводит к следующим выражениям для производной по подвижному объему:

$$\frac{dA}{dt} = \int\limits_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \nabla(\rho_A \vec{v})\right) dV = \int\limits_{V(t)} \left(\frac{d\rho_A}{dt} + \rho_A \nabla \vec{v}\right) dV. \tag{8.10}$$

Переход от одной формы к другой осуществляется при помощи соотношения (8.2).

Если положить $\rho_A = 1$, то величина A равна подвижному объему, и формула (8.10) дает производную от подвижного объема, которая равна

$$\frac{dV}{dt} = \int\limits_{V(t)} \nabla\vec{v}\, dV. \tag{8.11}$$

Если $\nabla\vec{v} = 0$, то величина подвижного объема остается постоянной при движении сплошной среды. Такая сплошная среда называется *несжимаемой средой.*

Положим в формуле (8.10) $A = m$. Так как частицы сплошной среды не пересекают границ подвижного объема, то $m = \mathrm{const}$, и производная от массы равна нулю. Поэтому нулю должны быть равны подынтегральные выражения в (8.10), что дает уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}) = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{v} = 0. \tag{8.12}$$

Уравнения (8.12) называются *уравнениями неразрывности* и выражают собой закон сохранения массы. Такие же уравнения выполняются для любой физической величины (например заряда), которая остается постоянной внутри подвижного объема.

Найдем сейчас производную по времени от импульса сплошной среды, заключенной в подвижном объеме. Из определения импульса (8.5) и выражения (8.10) для производной имеем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \rho\vec{v}\,dV = \int\limits_{V(t)} (\rho\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\vec{v}))\,dV. \tag{8.13}$$

Сумма во внутренних скобках под знаком интеграла (8.13) обращается в нуль вследствие уравнения неразрывности (8.12). В результате получаем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \int\limits_{V(t)} \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,dV. \tag{8.14}$$

Аналогичным образом можно показать, что производная от момента импульса конечного объема сплошной среды вычисляется по формуле

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \int\limits_{V(t)} \rho[\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}]\,dV. \tag{8.15}$$

8.3. Малые деформации и вращения сплошной среды

Рассмотрим смещение малого объема сплошной среды (рис. 8.2). Здесь 0 — некоторая выделенная точка сплошной среды, координаты которой приближенно можно считать координатами малого объема. Вектор $\vec{a}$ проведен из точки 0 в произвольную точку объема. После смещения они занимают новое положение, отмеченное штрихами. Векторы $\vec{u}_o$ и $\vec{u}$ задают соответственно смещения точек 0 и конца вектора $\vec{a}$. Из рис. 8.2 находим, что

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{u} - \vec{u}_o. \tag{8.16}$$

Точку 0 можно рассматривать как начало подвижной, связанной с малым объемом, системы координат. Тогда вектор $\vec{a}$ будет радиусом-вектором начала вектора $\vec{u}$. Считая $|\vec{a}|$ малой величиной, разложим вектор $\vec{u}$ в ряд:

$$\vec{u}(\vec{a}) = \vec{u}(0) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} a_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} a_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} a_z = \vec{u}(0) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} a_j. \tag{8.17}$$

В формуле (8.17) и в последующих формулах этого параграфа производные по координатам вычисляются в точке 0. Подставляя это

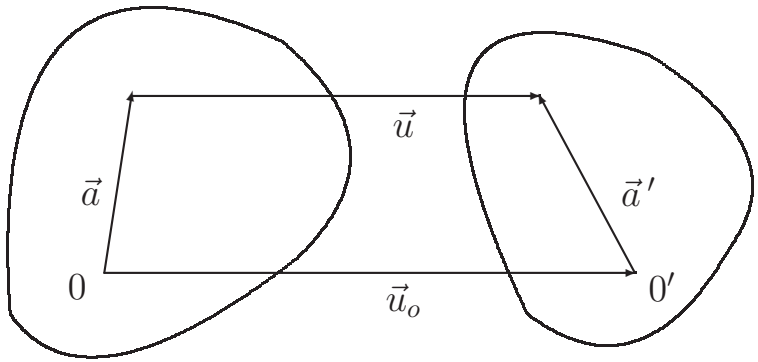

Рис. 8.2

разложение для вектора смещения в формулу (8.16), получим

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} a_j. \tag{8.18}$$

Сумму из выражения (8.18) проектируем на ось, определяемую индексом i, и преобразуем ее следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} a_j = \frac{1}{2} \sum_j (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) a_j + \frac{1}{2} \sum_j (\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) a_j \tag{8.19}$$

Введем две величины: *тензор деформации* ε_{ij} и *вектор поворота* $\vec{\chi}$, согласно формулам

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}), \quad \vec{\chi} = \frac{1}{2}[\nabla \times \vec{u}]. \tag{8.20}$$

Проекции вектора $\vec{\chi}$ стоят в скобках последней суммы выражения (8.19). После введения этих величин из формулы (8.18) следует, что проекция вектора $\vec{a}\,'$ на декартову ось, номер которой дается индексом i, принимает вид

$$a'_i = a_i + \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} a_j + [\vec{\chi} \times \vec{a}]_i. \tag{8.21}$$

Сравнивая последнее слагаемое в выражении (8.21) с формулой (3.33) для изменения радиуса-вектора $\vec{r}$ при повороте механической системы, можно прийти к выводу, что это слагаемое описывает поворот вектора $\vec{a}$ и, следовательно, всего малого объема на угол χ вокруг оси, направленной вдоль вектора $\vec{\chi}$. Поэтому вектор $\vec{\chi}$ назван *вектором поворота.*

Слагаемое, содержащее ε_{ij}, описывает деформацию малого объема. Для того чтобы убедиться в этом, запишем выражение, аналогичное (8.21), для некоторого другого вектора $\vec{b}$, проведенного в малом объеме из точки 0. Будем рассматривать только малые деформации, когда вторыми степенями тензора деформации можно пренебречь. В приближении малых деформаций скалярное произведение$\vec{a}\,'\vec{b}\,'$ записывается в виде

$$\vec{a}\,'\vec{b}\,' = \vec{a}\vec{b} + 2\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} a_i b_j. \tag{8.22}$$

Выберем сейчас векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равными и направленными вдоль одной из координатных осей, например оси ox. Пусть длина их до деформации равна l. Тогда из формулы (8.22) получим

$$l'^2 = l^2 + 2\varepsilon_{11} l^2, \quad l' \approx l(1+\varepsilon_{11}), \quad \frac{l'-l}{l} = \varepsilon_{11}. \tag{8.23}$$

Следовательно, диагональные компоненты тензора деформации равны относительным удлинениям отрезков, ориентированных в начальном положении вдоль координатных осей. Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выбраны единичными и ориентированными соответственно вдоль осей ox и oy. Тогда $\vec{a}\vec{b} = 0$, и для скалярного произведения этих векторов после деформации согласно формуле (8.22) найдем

$$\vec{a}'\vec{b}' = 2\varepsilon_{12}. \tag{8.24}$$

Записывая величину скалярного произведения через $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)$, где угол φ есть отклонение угла между векторами от первоначально прямого угла, и считая вследствие малости деформаций угол φ малым, получим

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\vec{a}'\vec{b}' = a'b'\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) \approx \frac{\varphi}{2}. \tag{8.25}$$

Недиагональные компоненты тензора деформаций характеризуют сдвиг, или скашивание, первоначально прямых углов, образованных в ма-

лом объеме сплошной среды параллельными координатным осям отрезками.

Если перемещение малого объема сплошной среды происходит за время Δt, то вектор смещения можно записать в виде $\Delta\vec{u} = \vec{v}\,\Delta t$, где $\vec{v}$ — поле скоростей сплошной среды. Для тензора деформации и вектора поворота за этот интервал времени получим выражения, содержащие частные производные от скорости:

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\Delta t, \quad \Delta\vec{\chi} = \frac{1}{2}\left[\nabla \times \vec{v}\right]\Delta t. \tag{8.26}$$

После деления этих выражений на Δt и устремления Δt к нулю приходим к величинам, которые называются *тензором скорости деформации* и *вектором угловой скорости вращения* сплошной среды:

$$d_{ij} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad \vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\chi}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\nabla \times \vec{v}\right]. \tag{8.27}$$

Подстановка $\vec{v}\,\Delta t$ вместо $\vec{u}$ в формулу (8.17) приводит к равенству

$$\vec{v}(\vec{a}) = \vec{v}(0) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j}a_j, \tag{8.28}$$

которое по форме совпадает с выражением (8.18). Преобразуя формулу (8.28) тем же способом, каким преобразовывалась формула (8.18),

получим

$$v_i = v_{oi} + \sum_{j=1}^{3} d_{ij} a_j + [\vec{\omega} \times \vec{a}]_i. \tag{8.29}$$

Введем вектор скорости деформации сплошной среды, проекции которого равны

$$D_i = \sum_j d_{ij} a_j. \tag{8.30}$$

Тогда выражение (8.29) может быть записано в векторной форме

$$\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{a} + \vec{D}. \tag{8.31}$$

Этот результат известен как теорема Коши—Гельмгольца. Скорость частицы среды разлагается на три составляющих — скорость центра частицы $\vec{v}_o$, скорость вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции $\vec{\omega} \times \vec{a}$, и скорость деформации $\vec{D}$.

Если деформация отсутствует, то формула (8.31) напоминает формулу (6.5) для скорости точки твердого тела. Отличие угловой скорости вращения сплошной среды от угловой скорости вращения твердого тела состоит в том, что для сплошной среды угловая скорость является функцией координат и различна для разных точек сплошной среды.

8.4. Уравнения движения сплошной среды

Для выделенного подвижного объема сплошной среды, как для любой системы материальных точек, должен выполняться закон изменения импульса. На выделенный объем действуют два вида сил. Во первых, это — силы, действующие на все частицы объема, или *массовые силы.* Во вторых, это — силы, действующие на поверхность объема со стороны соседних слоев сплошной среды, или *поверхностные силы.* Массовые силы задают при помощи плотности силы, отнесенной к единице массы. Поверхностные силы задают при помощи плотности, отнесенной к единице поверхности. Другими словами, плотность массовых и плотность поверхностных сил определяются соотношениями:

$$\vec{\Phi} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} = \frac{\Delta \vec{F}}{\rho \Delta V}, \quad \vec{f} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}. \tag{8.32}$$

Сумма сил, действующих на объем, тогда определится суммой интегралов по объему и по поверхности от этих плотностей. Используем выражение (8.14) для производной от импульса и запишем закон изменения импульса некоторого подвижного объема сплошной среды в

виде

$$\int\limits_{V(t)} \rho \frac{d\vec{v}}{dt}\, dV = \int\limits_{V(t)} \rho \vec{\Phi}\, dV + \oint\limits_{S} \vec{f}\, dS. \tag{8.33}$$

Поверхностная сила $\vec{f}\, dS$, действующая на элементарную площадку dS поверхности, ограничивающей выделенный объем, в общем случае зависит от ориентации этой площадки. Ориентацию площадки задают нормалью к ней $\vec{n}$. Зависимость плотности поверхностной силы $\vec{f}$ от ориентации площадки может быть представлена в тензорной форме:

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, n_j. \tag{8.34}$$

Здесь индексы означают номер проекции на оси декартовой системы координат. Величина σ_{ij} является тензором второго ранга и называется *тензором напряжений.* Тензор напряжений играет важную роль в механике сплошной среды. С помощью тензора напряжений рассчитываются поверхностные силы, действующие в любой точке сплошной среды.

Подставим выражение плотности поверхностной силы через тензор напряжений (8.34) в поверхностный интеграл в формуле (8.33) и преобразуем его в объемный. Для этого воспользуемся теоремой Остроградского—Гаусса. Запишем ее вначале в индексной форме для

произвольного вектора $\vec{A}$:

$$\oint\limits_S \vec{A}\vec{n}\,dS = \int\limits_V \nabla\vec{A}\,dV, \quad \Longrightarrow \quad \oint\limits_S \sum_j A_j n_j\,dS = \int\limits_V \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_j}\,dV. \tag{8.35}$$

По аналогии с правой частью формулы (8.35) проекции поверхностной силы преобразовываются к объемным интегралам следующим образом:

$$\oint\limits_S f_j\,dS = \oint\limits_S \sum_j \sigma_{ij} n_j\,dS = \int\limits_V \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\,dV \tag{8.36}$$

Записывая теперь уравнение (8.33) в проекциях на оси декартовой системы координат и преобразуя с помощью выражения (8.36) поверхностный интеграл в объемный, получим соотношение

$$\int\limits_{V(t)} (\rho\frac{dv_i}{dt} - \rho\Phi_i - \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j})\,dV = 0. \tag{8.37}$$

Так как равенство (8.37) должно выполняться для любого подвижного объема, то отсюда следует, что выражение в скобках равно нулю. Это приводит к уравнению

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \rho\Phi_i + \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \tag{8.38}$$

Так как уравнение (8.38) выражает закон изменения импульса, записанный для каждой точки сплошной среды, то оно играет в механике сплошной среды ту же роль, что второй закон Ньютона для механики материальной точки. Уравнение (8.38) называется *уравнением движения сплошной среды.* Оно связывает ускорение сплошной среды с действующими на среду силами и с напряжениями, возникающими в сплошной среде.

Запишем теперь закон изменения момента импульса для подвижного объема сплошной среды. Производная от момента импульса дается формулой (8.15). В сумму моментов сил входят моменты массовых и поверхностных сил, которые соответственно будут задаваться объемным и поверхностным интегралами. В результате уравнение закона изменения момента импульса принимает вид

$$\int\limits_{V(t)} \rho[\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}]\, dV = \int\limits_{V(t)} \rho[\vec{r} \times \vec{\Phi}]\, dV + \oint\limits_{S} [\vec{r} \times \vec{f}]\, dS. \tag{8.39}$$

Запишем это уравнение в проекциях на декартовы оси и подставим в левую часть производную от вектора $\vec{v}$ из уравнения (8.38). Тогда интегралы, содержащие массовые силы в левых и правых частях уравнений, взаимно уничтожатся. Останутся только члены, содержащие тензор напряжений. Например, проекция уравнения (8.39) на

ось ox примет вид

$$\int\limits_{V(t)} \sum_j (y\frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j} - z\frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j})\, dV = \oint\limits_S \sum_j (y\sigma_{3j}n_j - z\sigma_{2j}n_j)\, dS. \qquad (8.40)$$

Если поверхностный интеграл в правой части равенства (8.40) с помощью теоремы Остроградского—Гаусса (8.35) преобразовать к объемному, то после сокращений получится равенство

$$\int\limits_{V(t)} (\sigma_{32} - \sigma_{23})\, dV = 0. \qquad (8.41)$$

Откуда следует, что $\sigma_{32} = \sigma_{23}$. Проекции на другие оси дадут условия: $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}$. Таким образом, из закона изменения момента импульса вытекает, что тензор напряжений является *симметричным тензором.* Вследствие симметрии он имеет только шесть независимых компонент.

Так как тензор напряжений не задан и определяется в процессе решения задачи о движении сплошной среды, то число неизвестных в уравнениях (8.38) больше числа уравнений. Поэтому уравнения (8.38) должны быть дополнены. Одним из таких дополнительных уравнений является уравнение неразрывности (8.12), которое выполняется для любой сплошной среды. После этого по-прежнему число неизвестных будет больше числа уравнений. Получить необходимое число

уравнений можно только привлекая дополнительные гипотезы о поведении сплошной среды. Необходимость привлечения этих гипотез очевидна, так как под действием одних и тех же внешних сил разные среды ведут себя по-разному. В качестве дополнительных соотношений, замыкающих систему уравнений движения сплошной среды, привлекают уравнения, которые связывают напряжения в сплошной среде с ее деформацией или скоростью деформации. Выбор этих соотношений определяет модель сплошной среды, которую будут описывать уравнения. Для таких сред, как газы, жидкости, упругие тела, соответствующие модели получаются из простых предположений о связи напряжений с характеристиками сплошной среды.

8.5. Простые модели сплошных сред

Самой простой моделью сплошной среды является *идеальная жидкость.* Она пригодна для описания жидкостей и газов с малой вязкостью. Для идеальной жидкости тензор напряжений задается в виде

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \tag{8.42}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Вследствие (8.42) для плотности поверхностной силы получим

$$f_i = -pn_i, \quad \vec{f} = -p\vec{n}, \tag{8.43}$$

то есть в идеальной жидкости поверхностная сила всегда направлена по нормали к площадке. Ее величина не зависит от ориентации площадки и определяется одной скалярной функцией p, называемой давлением. Давление — положительная величина. В формуле (8.42) выбран знак минус потому, что в реальных сплошных средах, для которых пригодна модель идеальной жидкости, сила давления всегда направлена внутрь выделенного объема сплошной среды противоположно внешней нормали.

Более полно свойства реальных жидкостей и газов учитываются в модели *вязкой жидкости.* Для вязкой жидкости тензор напряжений определяется не только давлением, но и тензором скорости деформации сплошной среды. Для вязкой жидкости тензор напряжений принимается в форме

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} + \lambda(\sum_k d_{kk})\,\delta_{ij}, \tag{8.44}$$

где μ и λ — постоянные коэффициенты, называемые первым и вторым *коэффициентами вязкости.* Если среда несжимаема, что вы-

полняется для большинства жидкостей, то для нее $\Sigma_k d_{kk} = 0$ и в выражении (8.44) последнее слагаемое пропадает. Мы ограничимся только случаем несжимаемой вязкой жидкости.

Для понимания, что представляет из себя вязкая жидкость, определенная зависимостью (8.44), рассмотрим такое течение жидкости, когда скорость частиц параллельна оси ox и зависит только от координаты y. Выберем внутри жидкости объем, имеющий площадку, нормаль к которой параллельна оси oy (рис. 8.3). Тогда тензор скорости деформаций, тензор напряжений и векторы, изображенные на рис. 8.3, будут иметь следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
v_x &= v(y), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0, \\
d_{12} &= d_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad n_x = 0, \quad n_y = 1, \quad n_z = 0, \\
\sigma_{11} &= \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\
\Delta f_n &= \Delta f_{ny} = \sigma_{11}\,\Delta S = -p\ \Delta S, \\
\Delta f_\tau &= \Delta f\tau x = \sigma_{12}\ \Delta S = \mu\frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta S.
\end{aligned} \tag{8.45}$$

Следовательно, в вязкой жидкости наряду с силой давления возникает касательная к выделенной площадке сила. Если $\frac{\partial v}{\partial y} > 0$, то верхние

слои жидкости увлекают нижние слои с силой, пропорциональной величине этой производной. Коэффициент пропорциональности — это коэффициент вязкости μ.

Сплошная среда, для которой тензор напряжений и тензор деформации связаны линейной зависимостью, называется *идеально упругим телом.* Само уравнение линейной зависимости называется *законом Гука,* который для изотропных сред может быть записан в одной из двух форм:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\sum_k \varepsilon_{kk})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{8.46}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}(\sum_k \sigma_{kk})\,\delta_{ij}. \tag{8.47}$$

Постоянные λ и μ называются *постоянными Ламе* и не имеют никакого отношения к таким же постоянным в модели вязкой жидкости. Постоянная E называется *модулем Юнга,* постоянная ν – *коэффициентом Пуассона.* Для того чтобы найти связь этих двух наборов постоянных, необходимо в уравнениях (8.46) и (8.47) положить $i = j$ и просуммировать их. В результате получаются формулы:

$$E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{8.48}$$

Для уяснения смысла закона Гука, задаваемого формулами (8.46)

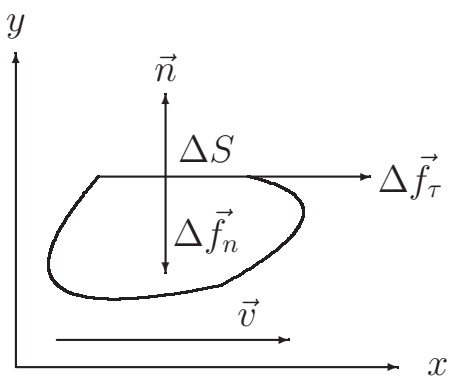

Рис. 8.3

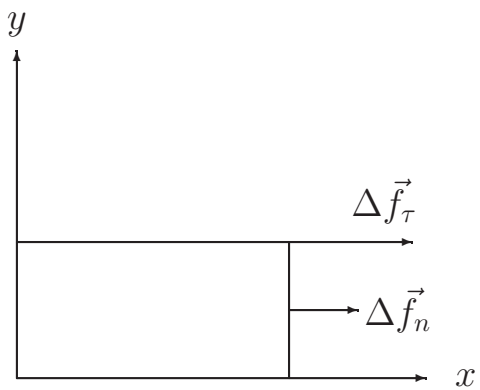

Рис. 8.4

и (8.47), рассмотрим прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям (рис. 8.4). Если поверхностные силы приложены только перпендикулярно к двум его торцам в направлении оси ox, то для тензора напряжений и тензора деформаций получим

$$\sigma_{11} = \frac{\Delta f_n}{\Delta S}, \quad \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\sigma_{11} = \frac{1}{E}\frac{\Delta f_n}{\Delta S}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}. \tag{8.49}$$

Так как ε_{11} — это относительное удлинение образца вдоль оси ox, то формула (8.49) дает известное выражение закона Гука для удлинения образца. Она также показывает, что при удлинении образец будет становиться тоньше. Если же поверхностные напряжения приложены

по касательной к торцам, как на рисунке вдоль оси ox, то получим деформацию сдвига, которая описывается формулами

$$\sigma_{12} = \frac{\Delta f \tau}{\Delta S}, \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{12} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} = \frac{1}{2\mu}\,\frac{\Delta f \tau}{\Delta S}. \tag{8.50}$$

Поскольку 2μ является коэффициентом пропорциональности между касательными напряжениями и сдвигами сплошной среды, то коэффициент μ называется *модулем сдвига.*

Рассмотренные здесь модели сплошных сред базируются на значительной идеализации свойств реальных сред. Построение более полных моделей требует привлечения законов термодинамики и выходит за рамки механики.

8.6. Уравнение движения идеальной жидкости

Уравнение движения идеальной жидкости получается, если в уравнение движения сплошной среды (8.38) подставить тензор напряжений (8.42) идеальной жидкости. В результате получим уравнение

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Phi} - \frac{1}{\rho}\,\nabla p. \tag{8.51}$$

Оно содержит пять неизвестных величин: три проекции скорости, плотность среды и давление. Трех проекций уравнения (8.51) недо-

статочно для их определения. Поэтому уравнение (8.51) дополняется уравнением неразрывности и еще одним уравнением, в качестве которого обычно берется зависимость плотности от давления $\rho = \rho(p)$. Жидкость, плотность которой зависит только от давления, называется *баротропной жидкостью.* Уравнение (8.51) является уравнением в частных производных и поэтому должно быть дополнено граничными условиями. Решение уравнения движения идеальной жидкости в аналитической форме возможно только в простейших случаях. Для большинства реальных задач решение получается численными методами. Рассмотрим два простых решения этого уравнения.

Если жидкость покоится, то уравнение (8.51) переходит в уравнение гидростатики:

$$\vec{\Phi} = \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{8.52}$$

Для баротропной жидкости его можно записать в виде

$$\vec{\Phi} = \nabla \int \frac{dp}{\rho(p)}. \tag{8.53}$$

В уравнении (8.53) справа стоит градиент. Поэтому это уравнение имеет решение только тогда, когда и слева стоит градиентный вектор, то есть, когда сила имеет потенциал: $\vec{\Phi} = -\nabla u$. Тогда из равенства двух градиентов следует условие, которое позволяет найти давление

в идеальной жидкости, находящейся в потенциальном поле:

$$u + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \text{const} \tag{8.54}$$

В частности, если потенциальное поле — это поле силы тяжести, жидкость несжимаема и ось oz направлена вертикально вверх, то из (8.54) получим обычную формулу для давления жидкости, находящейся в поле силы тяжести,

$$u = gz, \quad p = \text{const} - \rho g z. \tag{8.55}$$

Найдем сейчас одно из частных решений уравнения движения идеальной жидкости для случая движущейся жидкости. Полная производная по времени в левой части уравнения (8.51) может быть записана в форме

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}. \tag{8.56}$$

Если внешние силы потенциальны, то уравнение (8.56) допускает безвихревое движение, когда $\vec{\omega} = 0$, и, следовательно, вектор скорости имеет потенциал $\vec{v} = \nabla\varphi$. Если жидкость баротропна, то при всех сделанных предположениях уравнение движения идеальной жидко-

сти записывается в форме

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+u+\int\frac{dp}{\rho}\right)=0. \tag{8.57}$$

Первым интегралом уравнения (8.57) является равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+u+\int\frac{dp}{\rho}=f(t). \tag{8.58}$$

Функция $f(t)$ определяется начальными данными. Решение (8.58) называется *решением Коши.* Если движение идеальной жидкости стационарно и все характеристики среды не зависят от времени, то решение Коши переходит в *решение Бернулли:*

$$\frac{v^2}{2}+u+\int\frac{dp}{\rho}=\text{const}. \tag{8.59}$$

Для несжимаемой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, решение Бернулли принимает известный из элементарной физики вид:

$$\rho\frac{v^2}{2}+\rho gz+p=\text{const}. \tag{8.60}$$

8.7. Звуковые волны в идеальной жидкости

Рассмотрим распространение небольших возмущений по идеальной баротропной жидкости. Будем считать что давление и плотность

только на малые добавки p' и ρ' отличаются от постоянных давления p_o и плотности ρ_o в покоящейся жидкости, то есть

$$p = p_o + p', \qquad \rho(p_o + p') \approx \rho_o + \frac{1}{c^2}p'. \tag{8.61}$$

В формуле (8.61) использовано разложение функции $\rho(p)$ в ряд по малому параметру p' и введено обозначение

$$\frac{1}{c^2} = \left.\frac{dp}{d\rho}\right|_{p_o}. \tag{8.62}$$

Внешние силы оказывают малое влияние на распространение звуковых волн. Поэтому будем считать, что плотность массовых сил $\vec{\Phi}$ равна нулю. Кроме того, можно считать, что скорости смещения отдельных частиц сплошной среды малы, и поэтому можно пренебречь вторыми степенями скоростей и произведениями vp'. При всех сделанных предположениях в уравнении движения идеальной жидкости полная производная согласно формуле (8.56) может быть приближенно заменена на частную производную. В результате уравнение движения идеальной жидкости (8.51) и уравнение неразрывности (8.12) записываются в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o}\nabla p', \qquad \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p'}{\partial t} = -\rho_o \nabla \vec{v}. \tag{8.63}$$

Умножим теперь первое из уравнений (8.63) на ρ_o и применим к его обеим частям оператор ∇. Второе уравнение из (8.63) продифференцируем по времени. Поскольку частные производные по времени и по координатам можно переставлять, то части полученных уравнений, содержащие скорость, будут равны. Из этого следует равенство

$$\Delta p' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0, \tag{8.64}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнение (8.64) — это волновое уравнение. Его решением являются *звуковые волны.* Следовательно, малые возмущения давления в идеальной жидкости распространяются в виде звуковых волн. Величина c, определенная согласно (8.62) является скоростью распространения звуковой волны, или *скоростью звука.* Скорость звука различна в различных средах и определяется сжимаемостью этих сред. Если считать, что при распространении звуковой волны в воздухе давление и объем связаны уравнением адиабаты, то формула (8.62) дает правильное значение для скорости звука в воздухе.

8.8. Задачи

8.1. Найти тензор малых деформаций и вектор поворота для вектора смещения

$$\vec{u} = (x - z)\,\vec{i} + (y + z)\,\vec{j} - xy\,\vec{k}.$$

8.2. Найти в эйлеровой форме скорость и ускорение сплошной среды, зависимость плотности среды от времени, если движение среды в лагранжевой форме задано уравнениями:

$$x = x_o(1 + t), \quad y = y_o(1 + t)^2, \quad z = z_o(1 + t)^3.$$

8.3. Найти тензор скорости деформации и вектор угловой скорости вращения среды, поле скоростей которой дается формулой

$$\vec{v} = (x^2y + y^3)\,\vec{i} - (x^3 + xy^2)\,\vec{j}.$$

8.4. Поле скоростей сплошной среды задано формулами:

$$v_x = -yF(r), \quad v_y = xF(r), \quad v_z = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найти: а) закон движения и траектории индивидуальных частиц сплошной среды; б) ускорение и скорость вращения сплошной среды; в) тензор скорости деформации.

8.5. Записать уравнение неразрывности в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.

8.6. На горизонтальной поверхности имеется отверстие, из которого с постоянным напором вытекает несжимаемая жидкость, растекающаяся радиально по всей поверхности. Найти поле скоростей и поле ускорений.

8.7. Жидкость находится в резервуаре. Одна из стенок резервуара представляет прямоугольник, две стороны которого горизонтальны, а две другие наклонены под углом α к горизонту. Найти силу, действующую со стороны жидкости на эту стенку.

8.8. Найти форму свободной поверхности несжимаемой жидкости в сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси.

8.9. Найти давление и плотность в зависимости от высоты для адиабатически равновесной атмосферы, уравнение состояния которой $p = k\rho^{\gamma}$.

8.10. Идеальная несжимаемая жидкость течет по трубе переменного сечения. Найти изменение давления в жидкости при переходе из области, где скорость жидкости v_1 и сечение трубы S_1, в область

с сечением S_2. Рассмотреть случай, когда сечение S_2 находится ниже сечения S_1 на расстоянии H.

Приложение

П.1. Полярные координаты на плоскости

Полярные координаты r и φ на плоскости определяются формулами:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Координатными линиями полярной системы координат являются лучи, выходящие из начала координат, и окружности с центром в начале координат. На луче, линии r, угловая координата φ постоянна. На окружности, линии φ, постоянен радиус r. Через каждую точку плоскости, исключая начало координат, проходят две координатные линии, которые определяют полярные координаты точки. Начало координат – это особая точка. Для нее полярные координаты не определены. Например, на рис. П.1 через точку A проходят координатные линии $r = r_o$ и $\varphi = \varphi_o$. Единичные векторы, касательные в данной точке к координатным линиям, служат базисом полярной системы координат. Эти векторы ортогональны друг другу. Поэтому система

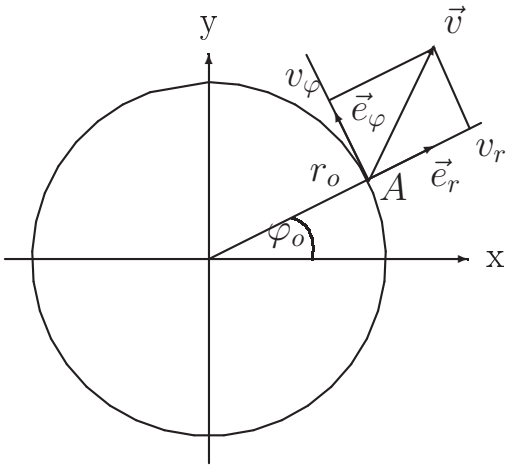

Рис. П.1

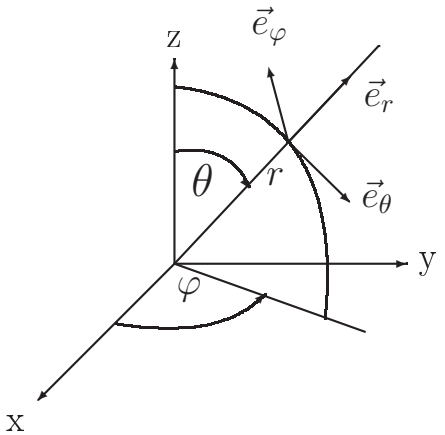

Рис. П.2

координат называется ортогональной. Для получения проекций некоторого вектора на базис полярной системы координат необходимо в точке, где задан вектор, построить базисные векторы и спроектировать вектор на направления, определяемые базисными векторами. Пример построения базиса и получения проекций вектора скорости $\vec{v}$ в точке A приведен на рис. П.1.

Выразим радиус-вектор произвольной точки через полярные координаты:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = r\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin\varphi\,\vec{j}.$$

Разложение базисных векторов полярной системы координат по осям декартовой системы координат дается формулами:

$$\vec{e}_r = \frac{1}{h_r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}, \quad h_r = 1, \tag{П.1}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}, \quad h_\varphi = r. \tag{П.2}$$

Коэффициенты h_r и h_φ называются коэффициентами Ламе и определяются из условия единичности базисных векторов. Формулы (П.1) – (П.2) также можно получить путем проектирования векторов $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$ на декартовы оси.

Считая радиус-вектор $\vec{r}$ функцией координат r и φ, запишем его дифференциал. Частные производные от радиуса-вектора с помощью формул (П.1) – (П.2) выразим через базисные векторы. В результате получим:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\,d\varphi = dr\,\vec{e}_r + r d\varphi\,\vec{e}_\varphi.$$

Поскольку базисные векторы единичны, то коэффициенты при них задают бесконечно малые длины вдоль соответствующих координатных линий:

$$dl_r = dr, \quad dl_\varphi = r d\varphi.$$

Поделив полученные выражения на dt, найдем формулы для вектора скорости, проекций вектора скорости и квадрата скорости в полярных координатах:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi, \tag{П.3}$$

$$v_r = \frac{dl_r}{dt} = \dot{r}, \quad v_\varphi = \frac{dl_\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}, \tag{П.4}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2. \tag{П.5}$$

П.2. Цилиндрические координаты

Цилиндрические координаты получаются добавлением к полярным координатам оси oz декартовой системы координат. Поскольку ось oz — декартова ось, то формулы (П.3) – (П.5) претерпевают незначительные изменения:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k},$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z},$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

П.3. Сферические координаты

Преобразование к сферической системе координат задается формулами:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\sin\theta, \\
y &= r\sin\varphi\sin\theta, \\
z &= r\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Выбор углов θ, φ и базисные векторы сферической системы координат показаны на рис. П.2. Разложение базиса сферической системы координат по осям декартовой системы координат и коэффициенты Ламе имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \cos\varphi\sin\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}, \\
\vec{e}_\theta &= \frac{1}{h_r}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}, \\
\vec{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\sin\theta\,\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\,\vec{j}, \\
h_r &= 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Дифференциал радиуса-вектора и бесконечно малые длины вдоль координатных линий даются выражениями:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\,d\varphi = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\,\vec{e}_\varphi, \\ dl_r &= dr, \quad dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r\sin\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда для вектора скорости, ее проекций на базис сферической системы координат и квадрата скорости получаются формулы:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi, \\ v_r &= \frac{dl_r}{dt} = \dot{r}, \quad v_\theta = \frac{dl_\theta}{dt} = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = \frac{dl_\varphi}{dt} = r\sin\theta\dot{\varphi}, \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

П.4. Общий случай ортогональных криволинейных координат

Обозначим ортогональные криволинейные координаты q_i, где i пробегает значения $1, 2, 3$. Формулы преобразования к криволинейным координатам задаются при помощи трех функций:

$$x = f_1(q_i), \quad y = f_2(q_i), \quad z = f_3(q_i). \tag{П.6}$$

Проекции базисных векторов на оси декартовых координат получаются по формулам:

$$\vec{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}.$$

Коэффициенты Ламе h_i вычисляются из условия нормировки базисных векторов на единицу. Ортогональность базисных векторов обеспечивается выбором функций $f_j(q_i)$ в формулах преобразования (П.6). Дифференциал радиуса-вектора и бесконечно малые длины вдоль координатных линий записываются в виде:

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= h_1 dq_1\,\vec{e}_1 + h_2 dq_2\,\vec{e}_2 + h_3 dq_3\,\vec{e}_3, \\ dl_1 &= h_1 dq_1, \quad dl_2 = h_2 dq_2, \quad dl_3 = h_3 dq_3. \end{aligned}$$

Для вектора скорости, проекций скорости на базис криволинейной системы координат и квадрата скорости справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= h_1\dot{q}_1\,\vec{e}_1 + h_2\dot{q}_2\,\vec{e}_2 + h_3\dot{q}_3\,\vec{e}_3, \\ v_1 &= h_1\dot{q}_1, \quad v_2 = h_2\dot{q}_2, \quad v_3 = h_3\dot{q}_3, \\ v^2 &= h_1^2\dot{q}_1^2 + h_2^2\dot{q}_2^2 + h_3^2\dot{q}_3^2. \end{aligned}$$

Дополнительная литература

Г. Голдстейн. Классическая механика. М., 1975.

Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. М., 1988.

И. И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. М., 1970.

Я. П. Терлецкий. Теоретическая механика. М., 1987.