УДК 519.111.1

В.М. КОТОВ, В.А. МОЩЕНСКИЙ

О РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ*

It is proven reducibility of recurrent relations under consideration to recurrent relations for functions of one variable. Also special recurrent relations are studied.

В литературе о рекуррентных соотношениях (РС) речь идет о рекуррентных соотношениях для функции одного аргумента [1–3 и др.]. Но в учебном курсе по дискретной математике и математической логике приводится рекуррентное соотношение для биномиальных коэффициентов:

$$q(m, n) = q\,(m–1, n) + q\,(m–1, n–1) \text{ при } 1 \le n \le m,$$

где $q(m, n)\| = \|\binom{m}{n}\| = \|C^m_n$ – функция двух аргументов, которое может быть использовано при индуктивном доказательстве формулы бинома Ньютона.

В настоящее время большую роль РС играют в теории сложности вычислений, когда сложность решения самой задачи удается оценить через сложность решения некоторых ее подзадач, что выражается соответствующим РС. Но в этой же теории правомерны и задачи, для которых требуется оценить сложность вычисления как функцию некоторых сложностей вычислений. Так, сложностью вычисления данной задачи назовем величину, равную некоторой линейной комбинации ее временной и емкостной сложностей вычислений. (Такой подход вполне реалистичен, ибо чаще всего объем памяти более «ценная величина», нежели время.) В этом случае при оценке сложности вычисления самой задачи через ее подзадачи возникает РС для функции нескольких аргументов. Здесь мы рассмотрим РС некоторых видов для функции n аргументов ($n \ge 2$) и найдем их решения.

1. Рекуррентным соотношением для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ натуральных аргументов называется равенство, левая часть которого есть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а правая – некоторая функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n, n$ и значений вида $f(x_1 - i_1, \ldots, x_n - i_n)$, где в каждом из них все i_k – натуральные числа и хотя бы для одного κ ($1 \le \kappa \le$ n) $i_\kappa \ge 1$.

Первой особенностью РС для функций нескольких аргументов по сравнению с РС для функции одного аргумента является то, что для каждого из них требуется задать бесконечно много начальных значений, ибо нужно будет знать значения $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

---

* Авторы статьи – сотрудники кафедры дискретной математики и алгоритмики.

Например, для *РС*

$$f(m,n) = f(m-1,n) + f(m,n-1) \tag{1}$$

при $m, n \geq 1$ требуется знать значения $f(0,n)$ и $f(m,0)$ для всех натуральных n и m, ибо нужно находить $f(1,n)$ и $f(m,1)$, если такие значения не задаются рекуррентно.

Можно указать универсальный алгоритм сведения каждого РС для функции нескольких аргументов к соответствующему РС для функции одного аргумента. Он состоит в следующем. Пусть данное РС есть РС для функции m аргументов, $m \geq 2$. Возьмем некоторую функцию, биективно отображающую N^m на N (N – множество всех натуральных чисел). С ее помощью наборы длины m взаимно однозначно отображаются в натуральные числа и, следовательно, из исходного РС для функции m аргументов получаем РС для функции одного аргумента. Но в такой кодировке «близкие» наборы длины m представляются, вообще говоря, «далекими» числами. Поэтому даже в случае получения линейного РС с постоянными коэффициентами его характеристическое уравнение будет иметь большую степень, а еще остается декодирование, т. е. нахождения по полученному решению соответствующего набора длины m. Например, РС (1) с помощью функции

$$c(m,n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m,$$

биективно отображающей N^2 на N ([4], с. 60), преобразуется в РС

$$q(c(m,n)) = q(c(m-1,n)) + q(c(m,n-1)),$$

которое эквивалентно линейному РС с постоянными коэффициентами

$$q(r+m+n+1) = q(r+1) + q(r) \tag{2}$$

при $r \geq 0$, где $r = c(m-1,n)$; его характеристическое уравнение имеет степень $m+n+1$. После нахождения корней этого уравнения и определения решения РС (2) нужно по этому решению найти соответствующий набор длины 2, который и будет решением РС (1).

Согласно изложенному эффективные алгоритмы нахождения решений РС для функций нескольких аргументов без использования приведенного универсального алгоритма представляют интерес. Поскольку на сегодняшний день общей теории решения РС для функций одного аргумента не существует ([1], с. 75), то, естественно, ее нет и для решений РС для функций нескольких аргументов.

2. Для начала рассмотрим РС для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, в правой части которых встречаются функциональные значения $f(x_1, ..., x_i - j, x_{i+1}, ..., x_n)$ при разных значениях j и никаких других функциональных значений. Примером такого РС является

$$f(m,n,r) = f(m-1,n,r) + f(m-2,n,r) \tag{3}$$

при n, $r \geq 0$ и $m \geq 2$. Ясно, что его можно рассматривать как РС для функции одного аргумента $q(x_i)$, потому что его решение, по существу, будет и решением исходного РС для функции многих аргументов. К примеру, можно считать, что РС (3) задает последовательность Фибоначчи для начальных значений, которые мы выберем.

3. Теперь опишем серию РС для функций нескольких аргументов и найдем их решения. В дальнейшем вместо a^n пишем $\exp_a(n)$.

3.1. Для функции натуральных аргументов $f(x_1, ..., x_n)$, $n \geq 2$, зададим следующее РС:

$$f(x_1, ..., x_n) = \exp_a\left(\sum_{i=1}^{n} i_k\right) f(x_1 - i_1, x_2 - i_2, ..., x_n - i_n) \tag{4}$$

при $x_\kappa \geq i_\kappa$ $(1 \leq k \leq n)$, где $a > 1$, $i_k \in N$, и хотя бы для одного k выполнено $i_k \geq 1$; если для некоторых k выполнено $i_k \geq 1$, то при $x_k < i_k$ начальное значение положим равным функции $\exp_a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \times \right.$ $\left. \times sg\left(x_k \dot{-} \left(i_k \dot{-} 1\right)\right)\right)$ и можно убедиться, что эта функция является решением РС (4) при $x_\kappa \geq i_\kappa$ $(1 \leq k \leq n)$ и, конечно, удовлетворяет указанным начальным значениям.

3.2. Теперь для той же функции, что и п. 3.1, определим для каждого $\kappa \geq 1$ РС

$$f(x_1, ..., x_n) = n^{-sg(k-1)}\left(\sum_{i-1}^{n} a_i^k \cdot f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i - k, x_{i+1}, ..., x_n)\right) \tag{5}$$

при каждом $x_i \geq k$, где $a_i (1 \leq i \leq n)$ – положительные действительные числа; при $x_i < k$ начальные значения укажем ниже, ибо они будут зависеть от *к*.

РС (5) при k=1 имеет вид

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, ..., x_n) \qquad (5\ a)$$

при каждом $x_i \geq 1$; если же $x_i < 1$ $(1 \leq i \leq n)$, то начальное значение полагаем равным $\exp_a (x_1 + ... + x_{i-1} + x_{i+1} + x_n)$, где $a = \sum_{i-1}^{n} a_i$. При $k \geq 2$ это же РС (5) запишется таким образом:

$$f(x_1, ..., x_n) = n^{-1} (\sum_{i-1}^{n} a_i^k f\left(x_1, ..., x_{i-1}, x_i - k, x_{i+1}, ..., x_n\right)) \qquad (5\ б)$$

при каждом $x_i \geq k$; если $x_i < k$ $(1 \leq i \leq n)$, то начальное значение полагаем равным $\exp_{a_1} x_1 ... \exp_{a_{i-1}} x_{i-1} \times$ $\times \exp_{a_{i_{i+1}}} x_{i+1} ... \exp_{a_n} x_n$ (считаем $\exp_1 a = 1$). Оказывается, что решением РС (5 *а*) является функция $\exp_a (\sum_{i-1}^{n} x_i)$, где $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, а решением РС (5 *б*) – функция

$$\exp_{a_1}\left(x_1 \cdot sg\left(x_1 \dot{-} \left(k-1\right)\right)\right) \cdot \ldots \cdot \exp_{a_n}\left(x_n \cdot sg\left(x_n \dot{-} \left(k-1\right)\right)\right) \text{ при каждом } x_i \geq k.$$

Заметим, что решение РС (5) меняется при изменении k от 1 до 2.

В заключение отметим, что и метод итераций (наряду с другими см. п. 2) может применяться при нахождении решений РС для функций нескольких аргументов, например, для нахождения решения РС

$$f(m, n) = f(m-1, n-1) + m + n$$

при $m, n \geq 1$ с начальными значениями $f(0, n) = f(m, 0) = 0$.

1. Матросов В.Л., Стеценко В.А. Лекции по дискретной математике. М., 1997.
2. Котов В.М., Мощенский В.А. Рекуррентные соотношения и основные методы их решения. Мн., 2006.
3. Мощенский А.В., Мощенский В.А. Математические основы информатики. Мн., 2002.
4. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1986.

Поступила в редакцию 18.01.07.

Владимир Михайлович Котов – доктор физико-математических наук, профессор.
Владимир Андреевич Мощенский – кандидат физико-математических наук, доцент.