УДК 519.8

Е.Е. ГУРЕВСКИЙ

О ЯДРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ТРАЕКТОРНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ

In this note, the vector combinatorial minimax problem of finding the Pareto set is considered. The structure of its stability kernel, which is the set of solutions that preserve Pareto optimality for «small» perturbations of the minimax criteria parameters, is described.

При исследовании поведения оптимальных решений векторных дискретных задач как функции входных параметров возникают различные понятия устойчивости, являющиеся дискретными аналогами свойств непрерывности и полунепрерывности по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, задающего функцию выбора (см., например, [1]). Изучению устойчивости как скалярных, так и векторных задач дискретной оптимизации посвящен ряд публикаций (см., например, [2–7]). В контексте этих постановок естественно возникает вопрос: как устроено ядро устойчивости задачи, т. е. множество всех тех решений, которые сохраняют свою оптимальность при любых независимых изменениях параметров задачи в пределах «малой» окрестности. В настоящей статье описано строение ядра устойчивости нелинейных (с критериями вида MINMAX) векторных траекторных (комбинаторных) задач.

Пусть заданы множество $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $m \geq 2$, множество траекторий $T \subseteq 2^E \setminus \{\varnothing\}$, $|T| \geq 2$, и матрица $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}$. Пусть частными критериями вектор-функции $f(t, A) = (f_1(t, A),$ $f_2(t, A), \ldots, f_n(t, A))$, $n \geq 1$, являются критерии вида MINMAX:

$$f_i(t, A) = \max_{j\in N(t)} a_{ij} \to \min_{t\in T}, i \in N_n,$$

где $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$. Под векторной ($n$-критериальной) траекторной задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу поиска множества Парето (множества эффективных траекторий) $P^n(A) = \{t \in T : \forall\, t' \in T \ (t \,\overline{\succ_A}\, t')\}$, где $\overline{\succ_A}$ – отрицание бинарного отношения, задаваемого формулой

$$t \succ_A t' \Leftrightarrow f(t, A) \geq f(t', A) \ \&\ f(t, A) \neq f(t', A).$$

Здесь сравнение векторов ведется покомпонентно.

Отметим, что в схему скалярных (однокритериальных) траекторных задач (с линейными, минимаксными и другими критериями) вкладываются многие экстремальные комбинаторные задачи, в частности, задачи на графах (о коммивояжере, паросочетаниях, остовах и др.), задачи булева программирования и некоторые задачи теории расписаний.

Следуя [7–11], под ядром устойчивости $Ker^n(A)$ задачи $Z^n(A)$ будем понимать множество всех эффективных траекторий задачи, устойчивых к «малым» возмущениям элементов матрицы A. Тем самым

$$Ker^n(A) = \{t \in P^n(A) : \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall\, B \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ (t \in P^n(A + B))\},$$

где $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n\times m} : \|B\| < \varepsilon\}$ – множество возмущающих матриц, $\|B\| = \max\{|b_{ij}| : (i, j) \in N_n \times N_m\}$.

В [8] было показано, что ядро устойчивости минимаксной задачи $Z^n(A)$ содержит множество Смейла (множество строго эффективных траекторий) [12] $Sm^n(A) = \{t \in T : \forall\, t' \in T \setminus \{t\} \ \ (t \,\overline{\succcurlyeq_A}\, t')\}$, где $t \succcurlyeq_A t' \Leftrightarrow f(t, A) \geq f(t', A)$. В данной работе этот результат уточняется, а именно описано строение всего множества $Ker^n(A)$. Отметим, что исследования ядра устойчивости векторных целочисленных задач линейного и квадратичного программирования были проведены в [9–11] (см. также [7]).

Положим

$$Q^n(t, A) = \{t' \in P^n(A) \setminus \{t\} : f(t, A) = f(t', A)\},$$

$$U^n(A) = \{t \in P^n(A) \setminus Sm^n(A) : \forall\, t' \in Q^n(t, A) \ \ \forall\, i \in N_n \ \ (N_i(t, A) \subseteq N_i(t', A))\},$$

где $N_i(t, A) = \{j \in N(t) : a_{ij} = f_i(t, A)\}$.

Свойство 1. Если $t' \succcurlyeq_A t$, то $t \,\overline{\succ_A}\, t'$.

Свойство 2. Для любых траекторий $t, t' \in T$ верна цепочка импликаций:

$$N_i(t, A) \subseteq N_i(t', A) \Rightarrow f_i(t \setminus t', A) < f_i(t', A) \Rightarrow f_i(t, A) \leq f_i(t', A),$$

причем если $t \setminus t' = \varnothing$, то полагаем $f_i(\varnothing, A) = -\infty$.

Теорема. *Ядро устойчивости* $Ker^n(A)$ *задачи* $Z^n(A)$ *совпадает с множеством* $Sm^n(A) \cup U^n(A)$.

Доказательство. Сначала докажем включение $Sm^n(A) \subseteq Ker^n(A)$. Пусть $t \in Sm^n(A)$. Тогда для любой траектории $t' \in T \setminus \{t\}$ существует такой индекс $p = p(t') \in N_n$, что $f_p(t, A) < f_p(t', A)$. Поэтому ввиду непрерывности функции $f_p(t, A)$ на множестве параметров из $\mathbf{R}^m$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'$ при $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Отсюда $t \in P^n(A+B)$ при $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Следовательно, $t \in Ker^n(A)$ (ввиду $t \in P^n(A)$).

Далее покажем, что $U^n(A) \subseteq Ker^n(A)$. Пусть $t \in U^n(A)$, $t' \in T \setminus \{t\}$. Тогда $Q^n(t, A)$ непусто. Если $t' \in Q^n(t, A)$, то $N_i(t, A) \subseteq N_i(t', A)$, $i \in N_n$, и потому согласно свойству 2 $f_i(t \setminus t', A) < f_i(t', A)$, $i \in N_n$. Поэтому существует такое число $\varepsilon_1(t') > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon_1(t'))$ верны неравенства $f_i(t \setminus t', A+B) < f_i(t', A+B)$, $i \in N_n$, т. е. в силу свойства 2 $t' \underset{A+B}{\not\succ} t$. Откуда $t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'$ на основании свойства 1. Если $t' \notin Q^n(t, A)$, то согласно включению $t \in P^n(A)$ существует такой индекс $k \in N_n$, что $f_k(t, A) < f_k(t', A)$, и потому в этом случае найдется такое число $\varepsilon_2(t') > 0$, что $t \underset{A+B}{\overline{\succ}} t'$ при любой матрице $B \in \mathcal{B}(\varepsilon_2(t'))$.

Резюмируя, получаем, что $t \in P^n(A+B)$ при любой матрице $B \in \mathcal{B}(\varepsilon^0)$, где $\varepsilon^0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon_1(t') : t' \in Q^n(t, A)\}$, $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_2(t') : t' \notin Q^n(t, A)\}$. Следовательно, $t \in Ker^n(A)$.

Наконец, покажем, что никакая эффективная траектория задачи $Z^n(A)$, не принадлежащая множеству $Sm^n(A) \cup U^n(A)$, не является элементом ядра устойчивости задачи $Z^n(A)$. Поскольку для всякой такой траектории t существуют траектория $t^0 \in Q^n(t, A)$ и индексы $p \in N_n$, $k \in N_m$ с условием $k \in N_p(t, A) \setminus N_p(t^0, A)$, то, построив возмущающую матрицу $B^0 = [b_{ij}^0] \in \mathbf{R}^{n \times m}$ по правилу

$$b_{ij}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } i = p,\ j = k, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $0 < \delta < \varepsilon$, убеждаемся в справедливости следующих соотношений:

$$f_i(t, A+B^0) = a_{pk} + \delta > f_i(t, A) = f_i(t^0, A) = f_i(t^0, A+B^0), i = p,$$

$$f_i(t, A+B^0) = f_i(t, A) = f_i(t^0, A) = f_i(t^0, A+B^0), i \neq p.$$

Отсюда $t \notin P^n(A+B^0)$ при $B^0 \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, т. е. $t \notin Ker^n(A)$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что ядро устойчивости задачи $Z^n(A)$ совпадает с множеством Парето $P^n(A)$ тогда и только тогда, когда для любых траекторий $t, t' \in P^n(A)$ из равенства $f(t, A) = f(t', A)$ следуют равенства $N_i(t, A) = N_i(t', A)$, $i \in N_n$. Кроме того, нетрудно построить числовой пример задачи $Z^n(A)$ с пустым ядром устойчивости.

1. Tanino T., Sawaragi Y. // Journal of Optimization Theory and Applications. 1980. Vol. 30. № 2. P. 229.
2. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. // Discrete Applied Mathematics. 1995. Vol. 58. № 2. P. 169.
3. Chakravarti N., Wagelmans A. // Operations Research Letters. 1998. Vol. 23. № 1. P. 1.
4. Libura M., van der Poort E.S., Sierksma G., van der Veen J. A.A. // Discrete Applied Mathematics. 1998. Vol. 87. № 1-3. P. 159.
5. van Hoesel S., Wagelmans A. // Ibid. 1999. Vol. 91. № 1-3. P. 251.
6. Libura M., Nikulin Y. // Control and Cybernetics. 2004. Vol. 33. № 3. P. 511.
7. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев, 2003.
8. Ефимчик Н.Е., Подкопаев Д.П. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1996. № 1. С. 48.
9. Емеличев В.А., Никулин Ю.Н. // Кибернетика и системный анализ. 2001. № 2. С. 83.
10. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. // Там же. 2004. № 1. С. 63.
11. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. // Там же. 2005. № 4. С. 90.
12. Smale S. // Journal of Mathematical Economics. 1974. Vol. 1. № 3. P. 213.

Поступила в редакцию 10.10.07.

Евгений Евгеньевич Гуревский – студент 5-го курса механико-математического факультета.