УДК 517.983:519.86

П.П. ЗАБРЕЙКО, А.Н. ТАНЫГИНА

ПРОДУКТИВНОСТЬ ОТКРЫТОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА – ФОРДА В ПРОСТРАНСТВАХ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

The article is devoted to the productivity criterion for the open Leontiev – Ford model in the spaces of bounded continuous functions. Two cases are separated: the case, when $\partial\Omega_+ = \varnothing$ for the space Ω_+ of commodities, and the case, when $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$.

Настоящая работа посвящена критерию продуктивности открытой модели Леонтьева – Форда [1, 2] в пространствах ограниченных непрерывных функций. Следует отметить, что критерий продуктивности открытой модели Леонтьева – Форда в конечномерных пространствах был доказан в [3], в идеальных пространствах – в [4]. Однако подходы из [3, 4] оказываются неприменимыми для открытой модели Леонтьева – Форда в пространствах ограниченных непрерывных функций.

1. Пусть Ω – нормальное топологическое пространство, τ – топология на Ω. Напомним [5], что топологическое пространство называется *нормальным*, если выполняются следующие условия: а) множество, состоящее из единственной точки, замкнуто; б) у любых двух непересекающихся замкнутых множеств существуют непересекающиеся окрестности. Через $C(\Omega)$ будем обозначать пространство всех вещественнозначных ограниченных и непрерывных на множестве Ω функций. Норму в $C(\Omega)$ определим равенством $\|f\|_{C(\Omega)} = \sup\limits_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$.

Рассмотрим уравнение

$$z = Az + w, \tag{1}$$

где $A : C(\Omega) \to C(\Omega)$ – линейный положительный (относительно конуса вещественнозначных неотрицательных ограниченных и непрерывных на множестве Ω функций) оператор, $z, w \in C(\Omega)$. Под открытой моделью Леонтьева – Форда в пространстве $C(\Omega)$ будем понимать модель, описываемую уравнением (1) при выполнении следующих условий: 1) задано разбиение множества Ω на два непустых непересекающихся множества Ω_+ и Ω_-; 2) функция $z : \Omega \to \mathbb{R}$ является неизвестной, причем предполагается, что $z \geq 0$ на множестве Ω; 3) функция $w_+ = w|_{\Omega_+} : \Omega_+ \to \mathbb{R}$ является заданной, причем $w_+ \geq 0$ и $w_+ \not\equiv 0$ на Ω_+; функция $w_- = w|_{\Omega_-} : \Omega_- \to \mathbb{R}$ является неизвестной, причем $w_- \leq 0$ на Ω_-. Множество Ω_+ интерпретируется как пространство благ, множество Ω_- – пространство ущербов; функция $z_+ = z|_{\Omega_+}$ описывает объемы благ, производимых в системе, функция $z_- = z|_{\Omega_-}$ – объемы ущербов, возникающих в процессе производства и уничтожаемых в системе, функция $w_+ = w|_{\Omega_+}$ – объемы потребляемых благ, функция $w_- = w|_{\Omega_-}$ – объемы ущербов, остающихся в природе в результате производства. Из условий 2) и 3) следует, что уравнение (1) оказывается недоопределенным: по заданной функции w_+ нужно искать функции z и w_-.

В силу представления множества Ω в виде $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ($\Omega_+ \cap \Omega_- = \varnothing$) имеет место равенство $\partial\Omega_+ = \partial\Omega_-$, где через ∂M обозначается граница множества $M \subseteq \Omega$.

Согласно условию 3) функция w неотрицательна на множестве Ω_+ и неположительна на множестве Ω_-. В силу непрерывности w это возможно тогда и только тогда, когда i) либо $\partial\Omega_+ = \varnothing$; ii) либо $w|_{\partial\Omega_+} = 0$, т. е. сужение функции w на границу множества Ω_+ равно нулю.

Приведем определение продуктивности открытой модели Леонтьева – Форда в пространстве $C(\Omega)$ (далее – модели (1)). Рассмотрим вначале случай, когда $\partial\Omega_+ = \varnothing$, а затем случай, когда $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$. Всюду в дальнейшем через $C(\Omega_+)$ и $C(\Omega_-)$ будем обозначать пространства вещественнозначных ограниченных непрерывных функций, определенных соответственно на множествах Ω_+ и Ω_-.

В случае, когда $\partial\Omega_+ = \varnothing$, пространство $C(\Omega)$ допускает разложение в прямую сумму своих замкнутых подпространств $C^+(\Omega)$ и $C^-(\Omega)$, где $C^+(\Omega)$ – множество вещественнозначных ограниченных непрерывных на Ω функций, принимающих нулевые значения на Ω_-, $C^-(\Omega)$ – множество вещественнозначных ограниченных непрерывных на Ω функций, принимающих нулевые значения на Ω_+.

В силу разложимости пространства $C(\Omega)$ в прямую сумму своих замкнутых подпространств исследование модели (1) при выполнении равенства $\partial\Omega_+ = \varnothing$ аналогично исследованию, проведенному в [4] для открытой модели Леонтьева – Форда в идеальных пространствах. Поэтому, как и в работе [4], определение продуктивности модели (1) для рассматриваемого случая естественно сформулировать следующим образом: модель (1) *продуктивна*, если для любой неотрицательной функции $c \in C(\Omega_+)$ существуют ее вещественнозначное ограниченное непрерывное продолжение F_c на все множество Ω, удовлетворяющее условию $F_c(\omega) \le 0$ при $\omega \in \Omega_-$, и неотрицательная функция $z \in C(\Omega)$ такие, что выполняется соотношение

$$z = Az + F_c. \tag{2}$$

Отметим, что в случае, когда $\partial\Omega_+ = \varnothing$, всякую неотрицательную функцию $c \in C(\Omega_+)$ можно продолжить по непрерывности на все множество Ω любой функцией $\tilde{c} \in C(\Omega_-)$.

Перейдем к случаю, когда $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$. Будем считать, что множество Ω_+ является замкнутым, откуда $\partial\Omega_+ \subseteq \Omega_+$. В данном случае пространство $C(\Omega)$ не допускает разложения в прямую сумму подпространств $C^+(\Omega)$ и $C^-(\Omega)$ в силу того, что не всякую функцию $f_1 \in C(\Omega_+)$ можно продолжить по непрерывности нулем на все множество Ω и аналогично не всякую функцию $f_2 \in C(\Omega_-)$ можно продолжить по непрерывности нулем на все множество Ω. Кроме того, в рассматриваемом случае ни одна модель (1) не может удовлетворять приведенному выше определению продуктивности. Действительно, пусть $c \in C(\Omega_+)$ – неотрицательная функция, $c(\omega_0) > 0$ для некоторого $\omega_0 \in \partial\Omega_+$ и F_c – вещественнозначное ограниченное непрерывное продолжение функции c на множество Ω. Тогда $F_c(\omega_0) = c(\omega_0) > 0$. В силу непрерывности функция F_c сохраняет знак в некоторой окрестности $U(\omega_0)$ точки ω_0, т. е. $F_c(\omega) > 0$ для любого $\omega \in U(\omega_0)$. В то же время в силу определения граничной точки $U(\omega_0) \cap \Omega_- \neq \varnothing$. Поэтому неравенство $F_c \le 0$ нарушается в точках $\omega \in U(\omega_0) \cap \Omega_-$, что противоречит требованию неположительности функции F_c на множестве Ω_-.

Вследствие вышесказанного, изменим определение продуктивности модели (1) в случае, когда $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$. Поскольку необходимым условием разрешимости уравнения (1) является требование $w|_{\partial\Omega_+} = 0$, то исследование модели в рассматриваемом случае будем проводить в пространстве $C_0(\Omega)$ вещественнозначных ограниченных и непрерывных на Ω функций, принимающих нулевые значения на $\partial\Omega_+$:

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f|_{\partial\Omega_+} = 0\}.$$

Последнее означает, что в уравнении (1) оператор A предполагается действующим в пространстве $C_0(\Omega)$, т. е. $A : C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$, а функции $z, w \in C_0(\Omega)$.

Как нетрудно видеть, пространство $C_0(\Omega)$ допускает разложение в прямую сумму своих замкнутых подпространств $C_0^+(\Omega)$ и $C_0^-(\Omega)$, где $C_0^+(\Omega)$ – множество вещественнозначных ограниченных непрерывных на Ω функций, принимающих нулевые значения на $\partial\Omega_+ \cup \Omega_-$, $C_0^-(\Omega)$ – множество вещественнозначных ограниченных непрерывных на Ω функций, принимающих нулевые значения на $\partial\Omega_+ \cup \Omega_+ = \Omega_+$.

Модель (1) в случае, когда $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$, будем называть *продуктивной*, если для любой неотрицательной функции $c \in C_0(\Omega_+)$, где

$$C_0(\Omega_+) = \{f \in C(\Omega_+):\ f|_{\partial\Omega_+} = 0\},$$

существуют ее вещественнозначное ограниченное непрерывное продолжение $F_c \in C_0(\Omega)$ на все множество Ω, удовлетворяющее условию $F_c(\omega) \le 0$ при $\omega \in \Omega_-$, и неотрицательная функция $z \in C_0(\Omega)$ такие, что выполняется соотношение (2).

Отметим, что всякую неотрицательную функцию $c \in C_0(\Omega_+)$ можно продолжить по непрерывности нулем на все множество Ω, т. е. множество продолжений $F_c \in C_0(\Omega)$ функции c не пусто.

2. Приведем критерий продуктивности модели (1) в случае, когда $\partial\Omega_+ = \varnothing$.

Как уже отмечалось ранее, исследование модели в рассматриваемом случае аналогично исследованию, проведенному в [4] для открытой модели Леонтьева – Форда в идеальных пространствах. Поэтому критерий продуктивности, доказанный в [4] для идеальных пространств, переносится на модель (1) с учетом, однако, того факта, что пространство $C(\Omega_+)$ не является правильным [6, 7].

Поскольку при $\partial\Omega_+ = \varnothing$ пространство $C(\Omega)$ допускает разложение в прямую сумму своих замкнутых подпространств $C^+(\Omega)$ и $C^-(\Omega)$, действие оператора A на неотрицательную функцию $z \in C(\Omega)$

$$z(\omega) = \begin{cases} x(\omega), & \omega \in \Omega_+, \\ y(\omega), & \omega \in \Omega_- \end{cases} \tag{3}$$

можно определить равенством

$$Az(\omega) = \begin{cases} A_{11}x(\omega) + A_{12}y(\omega), & \text{если} \quad \omega \in \Omega_+, \\ A_{21}x(\omega) + A_{22}y(\omega), & \text{если} \quad \omega \in \Omega_-, \end{cases} \tag{4}$$

где A_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – линейные положительные операторы, $A_{11}: C(\Omega_+) \to C(\Omega_+)$, $A_{12}: C(\Omega_-) \to C(\Omega_+)$, $A_{21}: C(\Omega_+) \to C(\Omega_-)$, $A_{22}: C(\Omega_-) \to C(\Omega_-)$. При этом операторы A_{ij} $(i, j = 1, 2)$ определяются следующим образом:

$$A_{11} = PB_1, \quad A_{12} = PB_2, \quad A_{21} = QB_1, \quad A_{22} = QB_2,$$

где $B_1: C(\Omega_+) \to C(\Omega)$ – сужение оператора A на $C(\Omega_+)$, $B_2: C(\Omega_-) \to C(\Omega)$ – сужение оператора A на $C(\Omega_-)$, $P: C(\Omega) \to C(\Omega_+)$ – оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f \in C(\Omega)$ ее сужение на множество Ω_+, $Q: C(\Omega) \to C(\Omega_-)$ – оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f \in C(\Omega)$ ее сужение на множество Ω_-.

Напомним [6], что линейный оператор $G: X \to X$, действующий в упорядоченном банаховом пространстве X, называется *монотонно компактным*, если он положителен и из $f_1 \le f_2 \le \ldots \le f_n \le \ldots \le f$ (или $f_1 \ge f_2 \ge \ldots \ge f_n \ge \ldots \ge f$) вытекает сходимость последовательности $(Gf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ по норме пространства X.

В работе [4] продуктивность модели и монотонная компактность оператора A_{11} влекли выполнение неравенства

$$\rho(A_{11}) < 1, \tag{5}$$

где через $\rho(\cdot)$ обозначается спектральный радиус соответствующего оператора. В настоящей работе будет приведено новое достаточное условие выполнения неравенства (5). Для этого нам понадобится следующее определение.

Пусть X – пространство всех вещественнозначных функций, заданных на произвольном множестве T. Положительный оператор $G : X \to X$ будем называть (o)-*полунепрерывным сверху* или *обладающим свойством Фату*, если $G(\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} G\xi_n$ для любой неубывающей последовательности $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ функций из X, где под сходимостью в X понимается (o)-сходимость [8].

Лемма. Пусть $G : X \to X$ – линейный положительный (o)-полунепрерывный сверху оператор, удовлетворяющий следующим условиям: 1) для любого $f \ge 0$, $f \in X$ существует $z \ge 0$, $z \in X$ такое, что $z - Gz \ge f$; 2) для некоторого $m \in \mathbb{N}$ оператор G^m переводит неубывающие ограниченные по упорядоченности последовательности в последовательности, (o)-сходящиеся в X. Тогда оператор $I - G$ положительно обратим.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\partial\Omega_+ = \varnothing$. Если $\rho(A_{11}) < 1$, то модель (1) является продуктивной.

Обратно, пусть модель (1) продуктивна и выполнено одно из следующих условий: а) оператор A_{11} монотонно компактен; б) оператор A_{11} (o)-полунепрерывен сверху и существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что оператор A_{11}^m переводит неубывающие ограниченные по упорядоченности последовательности в последовательности, (o)-сходящиеся в $C(\Omega_+)$. Тогда $\rho(A_{11}) < 1$.

3. Приведем критерий продуктивности модели (1) в случае, когда $\partial\Omega_+ \ne \varnothing$. Согласно замечаниям п. 1 анализ модели в данном случае проводится при предположении, что $A : C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$ и множество Ω_+ замкнуто.

Обозначим через $C_0(\overline{\Omega}_-)$ пространство вещественнозначных ограниченных непрерывных на $\overline{\Omega}_-$ функций, принимающих нулевые значения на $\partial\Omega_+$:

$$C_0(\overline{\Omega}_-) = \{f \in C(\overline{\Omega}_-) : f|_{\partial\Omega_+} = 0\}.$$

Поскольку пространство $C_0(\Omega)$ допускает разложение в прямую сумму своих замкнутых подпространств $C_0^+(\Omega)$ и $C_0^-(\Omega)$, то, как и в предыдущем случае (см. п. 2), действие оператора A на неотрицательную функцию $z \in C_0(\Omega)$ вида (3) можно определить равенством (4), где $A_{11} : C_0(\Omega_+) \to C_0(\Omega_+)$, $A_{12} : C_0(\overline{\Omega}_-) \to C_0(\Omega_+)$, $A_{21} : C_0(\Omega_+) \to C_0(\overline{\Omega}_-)$, $A_{22} : C_0(\overline{\Omega}_-) \to C_0(\overline{\Omega}_-)$. Линейные положительные операторы A_{ij} $(i, j = 1, 2)$ определяются следующим образом:

$$A_{11} = PB_1, \quad A_{12} = PB_2, \quad A_{21} = QB_1, \quad A_{22} = QB_2,$$

где $B_1 : C_0(\Omega_+) \to C_0(\Omega)$ – сужение оператора A на $C_0(\Omega_+)$, $B_2 : C_0(\overline{\Omega}_-) \to C_0(\Omega)$ – сужение оператора A на $C_0(\overline{\Omega}_-)$, $P : C_0(\Omega) \to C_0(\Omega_+)$ – оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f \in C_0(\Omega)$ ее сужение на множество Ω_+, $Q : C_0(\Omega) \to C_0(\overline{\Omega}_-)$ – оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f \in C_0(\Omega)$ ее сужение на множество Ω_-.

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $\partial\Omega_+ \ne \varnothing$, множество Ω_+ замкнуто, $A : C_0(\Omega) \to C_0(\Omega)$, $z, w \in C_0(\Omega)$. Если $\rho(A_{11}) < 1$, то модель (1) является продуктивной.

Обратно, пусть модель (1) продуктивна и выполнено одно из следующих условий: а) оператор A_{11} монотонно компактен; б) оператор A_{11} (o)-полунепрерывен сверху и существует число $m \in \mathbb{N}$ такое, что оператор A_{11}^m переводит неубывающие ограниченные по упорядоченности последовательности в последовательности, (o)-сходящиеся в $C_0(\Omega_+)$. Тогда $\rho(A_{11}) < 1$.

Отметим, что доказательство теоремы 2 с формальной точки зрения аналогично доказательству теоремы 1, однако в рассматриваемом случае приходится менять постановку задачи.

4. Как уже отмечалось, исследование модели (1) в случае, когда $\partial\Omega_+ = \varnothing$, аналогично исследованию открытой модели Леонтьева – Форда в идеальных пространствах. Если же $\partial\Omega_+ \ne \varnothing$, то ситуация радикально меняется. Поэтому при исследовании модели (1) в случае, когда $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$, мы были вынуждены осуществить переход от пространства $C(\Omega)$ к пространству $C_0(\Omega)$. Однако данный метод не является единственным.

Приведем еще один метод исследования модели (1) в случае, когда $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$. Пусть, как и прежде, множество Ω_+ является замкнутым. Рассмотрим пространство $C^0(\Omega)$ вещественнозначных ограниченных на Ω функций f таких, что $f|_{\Omega_+} \in C(\Omega_+)$, $f|_{\Omega_-} \in C(\Omega_-)$. В отличие от пространства $C(\Omega)$ пространство $C^0(\Omega)$ содержит функции, которые могут иметь разрывы на $\partial\Omega_+$. Непрерывность функций $f \in C^0(\Omega)$ может быть нарушена «со стороны» множества Ω_-, т. е. могут существовать точки $\omega_0 \in \partial\Omega_+$ такие, что равенство $\lim\limits_{\omega\to\omega_0,\ \omega\in\Omega_-} f(\omega) = f(\omega_0)$ не выполняется.

Естественно, $C(\Omega) \subset C^0(\Omega)$, в силу чего линейный положительный оператор $A: C(\Omega) \to C(\Omega)$ можно рассматривать как оператор с областью значений в $C^0(\Omega)$, т. е. $A: C(\Omega) \to C^0(\Omega)$. Если бы оператор $A: C(\Omega) \to C^0(\Omega)$ допускал линейное положительное продолжение на все пространство $C^0(\Omega)$, то можно было бы перейти к исследованию рассматриваемой модели в пространстве $C^0(\Omega)$. Однако поскольку пространство $C^0(\Omega)$ не является пространством типа $\mathfrak{M}$ [9], то основные теоремы о распространении линейных непрерывных операторов не гарантируют, вообще говоря, возможности такого продолжения. Поэтому мы вынуждены предполагать, что оператор A допускает линейное положительное продолжение на пространство $C^0(\Omega)$.

Как нетрудно видеть, пространство $C^0(\Omega)$ допускает разложение в прямую сумму своих замкнутых подпространств $B^+(\Omega)$ и $B^-(\Omega)$, где $B^+(\Omega)$ – множество вещественнозначных ограниченных на Ω функций, непрерывных на Ω_+ и принимающих нулевые значения на Ω_-, $B^-(\Omega)$ – множество вещественнозначных ограниченных на Ω функций, непрерывных на Ω_- и принимающих нулевые значения на Ω_+. В силу этого переход к исследованию модели (1) в пространстве $C^0(\Omega)$ позволяет провести рассуждения, аналогичные рассуждениям при изучении открытой модели Леонтьева – Форда в идеальных пространствах в [4]. В частности, при переходе к пространству $C^0(\Omega)$ оказывается справедливым аналог теоремы 2.

Применяя приведенный метод исследования модели (1), мы получим такие решения (z, w_-) данной модели, для которых непрерывность функции z может нарушаться на $\partial\Omega_+$ «со стороны» множества Ω_-. Следовательно, переход к исследованию модели (1) в пространстве $C^0(\Omega)$ имеет смысл в том случае, если допустимо пренебрегать разрывами функций из $C^0(\Omega)$ на границе множества Ω_+.

5. Пусть на σ-алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω задана σ-конечная, неотрицательная и счетно-аддитивная мера μ, согласованная с топологией τ на Ω таким образом, что всякое замкнутое подмножество множества Ω является измеримым. Тогда имеет место вложение $C(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$ в том смысле, что каждой функции $f \in C(\Omega)$ ставится в соответствие класс $[f] \in L_\infty(\Omega)$ функций, эквивалентных функции f. Здесь $L_\infty(\Omega)$ – множество классов эквивалентных друг другу функций, существенно ограниченных относительно μ и измеримых на Ω.

Пространство $L_\infty(\Omega)$, в отличие от пространства $C(\Omega)$, является идеальным. Поэтому при изучении открытой модели Леонтьева – Форда в $L_\infty(\Omega)$ оказываются применимыми все рассуждения из [4]. В силу вложения $C(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$ линейный положительный оператор $A: C(\Omega) \to C(\Omega)$ можно рассматривать как оператор с областью значений в $L_\infty(\Omega)$, т. е. $A: C(\Omega) \to L_\infty(\Omega)$. Согласно общим теоремам о распространении положительных операций [8], оператор $A: C(\Omega) \to L_\infty(\Omega)$ может быть продолжен на все пространство $L_\infty(\Omega)$ с сохранением линейности, положительности и нормы. Таким образом, исследование модели (1) можно свести к ее исследованию в пространстве $L_\infty(\Omega)$.

Естественно, переход к исследованию модели (1) в пространстве $L_\infty(\Omega)$ рационален в том случае, когда $\partial\Omega_+ \neq \varnothing$. Однако при таком переходе так же, как и при переходе от пространства $C(\Omega)$ к пространству $C^0(\Omega)$, нарушается непрерывность решений (z, w_-) рассматриваемой модели. В силу теоремы Н.Н. Лузина (см., например, [9]) всякое решение (z, w_-) может быть сделано непрерывным путем изменения значений функций z и w_- на множествах сколь угодно малой меры. Поэтому переход к исследованию модели (1) в пространстве $L_\infty(\Omega)$ имеет смысл в том случае, когда допустимо пренебрегать значениями функций на множествах сколь угодно малой меры.

6. В заключение отметим, что для открытой модели Леонтьева – Форда в пространствах ограниченных непрерывных функций можно доказать критерии полной компенсируемости модели, т. е. критерии существования неотрицательных решений уравнения (1) без ущербов, остающихся в природе в результате производства, аналоги законов сравнительной статики (теоремы Хикса и принципа Ле-Шателье – Самуэльсона) как в предположении о выполнении неравенства $\rho(A) < 1$, так и в случае, когда $\rho(A) \geq 1$, а также критерий того, когда при заданных объемах потребляемых благ возможно уменьшение объемов ущербов, остающихся в природе в результате производства.

Работа частично финансировалась в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели – 16.1».

1. Леонтьев В.В., Форд Д. // Экономика и мат. методы. 1972. Т. 8. № 3. С. 370.
2. Забрейко П.П. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2007. Т. 15. № 2. С. 25.
3. Забрейко П.П., Таныгина А.Н. // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52. № 2. С. 17.
4. Забрейко П.П., Таныгина А.Н. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2008. Т. 16. № 2. С. 37.
5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
6. Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В. Позитивные линейные системы. М., 1985.
7. Бахтин И.А. Конусы в пространствах Банаха: Учеб. пособие: в 2 ч. Воронеж, 1975. Ч. 1.
8. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л., 1950.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1984.

Поступила в редакцию 14.11.08.

Петр Петрович Забрейко – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических методов теории управления.

Анастасия Николаевна Таныгина – аспирант кафедры математических методов теории управления. Научный руководитель – П.П. Забрейко.