УДК 517.925.42

И.Н. СИДОРЕНКО

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

We consider a quadratic system

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j \equiv P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j \equiv Q(x,y). \tag{1}$$

It is known that a quadratic system can have only limit cycles enclosing a unique singular point, which is a focus, as well as it can have no more than two foci. The following distributions of limit cycles for quadratic systems (1) are known as: (*a*) 1, (1,0); (*b*) 2, (2,0); (*c*) 3, (3,0); (*d*) (1,1); (*e*) (2,1); (*f*) (3,1). In this very paper, we suggest the method of construction systems (1) with distribution of (*e*) and (*f*) limit cycles for the different configurations of singular points. The existence of the exact given number of limit cycles is proved by using the Dulac function. All limit cycles of the given systems can be detected through numerical methods; i. e. the limit cycles have «a normal size», Perko's definition.

Рассмотрим квадратичную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^j \equiv P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^i y^j \equiv Q(x,y), \tag{1}$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}$. В общем случае она имеет 12 параметров. Поэтому при ее исследовании возникают большие трудности при вычислении, но количество параметров можно уменьшить, используя теорию инвариантов и комитантов или с помощью упрощения системы (1) за счет аффинных преобразований фазовых переменных и растяжения шкалы времени. Семейства квадратичных систем, полученные путем таких упрощений, получили название канонических. Л.А. Черкасом [1] было предложено следующее каноническое семейство систем:

$$\frac{dx}{dt}=1+xy,\ \frac{dy}{dt}=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{11}xy+a_{20}x^2+ay^2, \tag{2}$$

к которым в общем (невырожденном) случае сводятся системы из семейства (1). При выполнении условий

$$\begin{gathered} a_{00}=a_{01}+a_{11}-a_{10}-a_{20}-a,\ L=2a-a_{01}-a_{10}-2a_{20}>0, \\ \left(a_{11}+a_{01}-2a-1\right)^2-4L<0,\ a_{10}=-a_{20}\left(x_0+1\right)-a_{01}/x_0+a\left(x_0+1\right)/x_0^2,\ x_0\neq 0, \end{gathered} \tag{3}$$

система (2) имеет фокус A (1, –1), особую точку $B\left(x_0, -1/x_0\right)$ и может иметь другие конечные особые точки. Условие (3) в дальнейшем считаем выполненным.

Известно [2], что квадратичная система может иметь только предельные циклы, окружающие единственную особую точку, которая является фокусом, а также – не более двух фокусов в конечной части плоскости. Таким образом, система (1) может иметь лишь следующие распределения предельных циклов: n_0, (n_1, n_2), где $n_0 \in N$, $n_1, n_2 \in N \cup \{0\}$, $n_1 + n_2 > 0$. Распределение n_0 означает, что система имеет только один фокус и n_0 окружающих его предельных циклов. Распределение (n_1, n_2) означает, что система имеет два фокуса, два гнезда, в которых содержится n_1 и n_2 предельных циклов соответственно. В настоящее время известны распределения:

(*a*) 1, (1,0); (*b*) 2, (2,0); (*c*) 3, (3,0); (*d*) (1,1); (*e*) (2,1); (*f*) (3,1). (4)

В работе [3] Л.М. Перко ввел понятие предельного цикла «нормального размера» – это грубый предельный цикл, который легко может быть обнаружен численными методами. В этой же работе получены системы (1) с распределениями (4) предельных циклов, и все они – «нормального размера», однако в случае распределений (*c*) и (*f*) ему не удалось дать точную оценку их числа. Распределения (*c*), (*e*) и (*f*) получаются при помощи бифуркаций и возмущением системы (1) с центром [4]. Однако этим методом можно получить только малоамплитудные предельные циклы, которые в общем случае очень сложно обнаружить численными методами.

В работе [5] дан набор квадратичных систем с различными конфигурациями особых точек и распределениями (*c*) и (*f*) предельных циклов (все они – «нормального размера»). Проведено обоснование этих распределений, использующее модифицированную функцию Дюлака и редукцию к глобальной единственности предельного цикла [5]. Там же дан обзор работ по изучению распределений (4).

Нами предлагается метод построения систем (2) с распределениями (*e*) и (*f*) предельных циклов (при этом все они – нормального размера) с различными конфигурациями особых точек, который является развитием разработанного в [6–8] метода прогноза числа предельных циклов на случай квадратичных систем. При этом обоснование распределений проводится с помощью построения модифицированной функции Дюлака в естественной области существования предельных циклов.

1. Предварительный результат. В системе (2), имеющей особую точку $A(1,-1)$, параметр a_{11} поворачивает поле. Преобразование $x=1/\tilde{x}$, $y=\tilde{x}^{(1-a)}\tilde{y}-\tilde{x}$ и растяжение шкалы времени переводит систему (2) в систему Льенара, которая после обозначения $\tilde{x}$ через x, $\tilde{y}$ через y, имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=y-F(x),\ \frac{dy}{dt}=-g(x), \tag{5}$$

где $g(x)=P_4(x)x^{2a-3}$, $f(x)=P_2(x)x^{a-2}$, $x>0$, $P_4(x)=a_{20}+a_{10}x+(a_{00}-a_{11})x^2-a_{01}x^3+ax^4$,

$$P_2(x)=a_{11}+a_{01}x-(2a+1)x^2,\ G(x)=\int_1^x g(t)\,dt=\tilde{P}_4(x)x^{2(a-1)}-\tilde{P}_4(1),\ F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\tilde{P}_2(x)x^{a-1}-\tilde{P}_2(1).$$

При этом особая точка A (1, –1) системы (2) переходит в особую точку A_0 (1, 0) системы (5).

Сформулируем используемую в дальнейшем теорему для точной оценки числа предельных циклов системы (1).

Теорема 1 [9, 10]. *Пусть в односвязной области* $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ *система* (1) *имеет единственную особую точку – антиседло A,* $\operatorname{div} f(A)\neq 0$, $f=(P,Q)$. *Пусть также функция* $\Psi(x,y)\in C^1(\Omega)$ *при некотором значении* $k\in\mathbb{R}, k<0$, *удовлетворяет условию* $\Phi=k\Psi\operatorname{div} f+\frac{\partial\Psi}{\partial x}P+\frac{\partial\Psi}{\partial y}Q>0,\ (x,y)\in\Omega,$

$\operatorname{div} f=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}$, *а уравнение* $\Psi(x,y)=0$ *определяет гнездо из q вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из q*–1 *двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система* (1) *имеет точно один предельный цикл, а в целом в области* Ω *она имеет не более q предельных циклов.*

Для системы Льенара функцию Ψ всегда можно найти в виде многочлена переменной y степени n–1 такую, что соответствующая функция Φ не зависит от y [9].

2. Построение квадратичных систем с распределениями (*e*) и (*f*) предельных циклов с помощью метода прогноза Смейла. Будем рассматривать систему (2), которая имеет фокус A (1, –1) и особую точку $B(x_0,-1/x_0)$. Кроме этих точек, она имеет еще две конечные особые точки, их абсциссы определяются уравнением $x^2-(a_{01}/(a_{20}x_0)+a(x_0+1)/(a_{20}x_0^2))x+a/(a_{20}x_0)=0$ при условии, что его решения отличны от 1 и x_0 и

$$u\equiv\left(-a_{01}x_0+a(x_0+1)^2\right)-4aa_{20}x_0^3>0. \tag{6}$$

Если $u<0$, то система (2) имеет только две конечные особые точки A и B. Кроме того, она имеет бесконечное простое седло в направлении оси Oy при $0<a<1$ и простой узел при $a<0$ или $a>1$. Угловые коэффициенты η других бесконечных особых точек определяются уравнением $a_{20}+a_{11}\eta+(a-1)\eta^2=0.$

Предельные циклы системы (2) можно изучать отдельно в полуплоскостях $x>0$ и $x<0$, так как прямая $x=0$ – трансверсаль векторного поля системы, то предельные циклы ее не пересекают. Тип системы (2) будем определять по количеству ее конечных седел, узлов и фокусов, а также седел и узлов в бесконечности. Например, запись $1N+1F+2S_\infty+1N_\infty$ означает, что система имеет один узел и один фокус в конечной части плоскости, а в бесконечности – два седла и узел. В данной работе рассматриваются системы (2) типа $2F+1S_\infty$ и $2F+2S_\infty+1N_\infty$. Для того чтобы особая точка $B(x_0,-1/x_0)$ была фокусом, необходимо и достаточно, чтобы $x_0<0$.

Изучение предельных циклов системы (2) вокруг особой точки A (1, –1) сводится к изучению предельных циклов системы Льенара (5) вокруг особой точки A_0 (1, 0) в полуплоскости $x>0$. Используя гипотезу Смейла [11], для системы Льенара можно определить прогнозную функцию Андронова – Хопфа $a_{11}=AHp(\xi)$, равную тому значению параметра a_{11}, при котором система (5) имеет предельный цикл, проходящий через точку $(\xi,0)$. Эта функция определена в некотором промежутке, принадлежащем интервалу (ξ_1,ξ_2), где ξ_1, ξ_2 – абсциссы ближайших к $\xi=1$ особых точек системы (5),

$0<\xi_1<1<\xi_2$. Если особой точки слева от $\xi=1$, $\xi>0$ нет, то полагаем $\xi_1=0$, если ее нет справа от $\xi=1$, то полагаем $\xi_2=+\infty$. Прогнозная функция Андронова – Хопфа $a_{11}=AHp(\xi)$ во многих случаях дает неплохое приближение функции $a_{11}=AH(\xi)$ и определяется системой уравнений

$$\begin{gathered} AG\equiv\sum_{k=0}^{4}A_k\xi^k=0,\ \ AF\equiv\sum_{k=2}^{4}B_k\xi^{k-2}=0, \\ A_0=a_{20}\left(z^{2a-2}-1\right)\big/(2a-2),\ A_1=a_{10}\left(z^{2a-1}-1\right)\big/(2a-1), \\ A_2=\left(a_{01}-a_{10}-a_{20}-a\right)\left(z^{2a}-1\right)\big/(2a),\ \ A_3=-a_{01}\left(z^{2a+1}-1\right)\big/(2a+1), \\ A_4=a\left(z^{2(a+1)}-1\right)\big/\left(2(a+1)\right),\ B_2=a_{11}\left(z^a-1\right)\big/(a-1), \\ B_3=a_{01}\left(z^a-1\right)\big/a\,,\ B_4=-(2a+1)\left(z^{a+1}-1\right)\big/(a+1), \\ z=\eta/\xi,\ v=z^a,\ \xi_1<\eta<1,\ 1<\xi<\xi_2,\ \xi_1/\xi_2<z<1. \end{gathered} \tag{7}$$

Мы не рассматриваем те значения параметра $a=0,\ \pm1/2,\pm1,$ при которых формулы теряют смысл. При решении системы выбирается непрерывная функция $a_{11}=AHp(\xi)$, удовлетворяющая уравнению $AHp(1)=2a+1-a_{01}$, что соответствует условию негрубости фокуса A. Если в системе (7) зафиксировать параметры a_{20}, a и x_0 и варьировать остальные параметры a_{01}, a_{11}, то функция Андронова – Хопфа будет зависеть еще и от параметра a_{01}, т. е. $a_{11}=AH\left(\xi,a_{01}\right)$. Тогда в плоскости параметров a_{01}, a_{11} существует кривая двукратных предельных циклов, определяемая системой $a_{11}=AH\left(\xi,a_{01}\right)$, $AH'_{\xi}\left(\xi,a_{01}\right)=0$. Соответствующая прогнозная кривая двукратных предельных циклов определяется системой уравнений (7), к которой добавлено уравнение

$$f(\xi)g(\eta)-f(\eta)g(\xi)=0,\ g(\xi)=P_4(\xi)\xi^{2a-3},\ f(\xi)=P_2(\xi)\xi^{a-2}. \tag{8}$$

В рассматриваемом случае прогнозная область в плоскости a_{01}, a_{11} существования трех предельных циклов системы (2) ограничена прогнозной кривой двукратных предельных циклов и прямой негрубых фокусов $a_{11}+a_{01}-2a-1=0$. Построив прогнозную область с тремя предельными циклами, в плоскости (a_{01}, a_{11}) выбираем такое a_{01}^0, при котором отрезок прямой $a_{01}=a_{01}^0$ в пересечении с этой областью имеет наибольшую длину или близкую к ней. Это необходимо для того, чтобы иметь запас в надежности прогноза. Далее строим график функции $a_{11}=AH\left(\xi,a_{01}^0\right)$ и по нему выбираем на полученном промежутке такое a_{11}^0, при котором прогноз подтверждается и предельные циклы хорошо разделены. Итак, имеем следующий алгоритм получения квадратичных систем (2) с тремя предельными циклами, окружающими фокус A (1, –1): 1) по заданной конфигурации особых точек выбираем такие значения параметров a_{20}, a, x_0, при которых существует прогнозная область трех предельных циклов; 2) решая систему (7), (8), в плоскости (a_{01}, a_{11}) строим эту область; 3) находим a_{01}^0, a_{11}^0 описанным ранее способом; 4) проверяем справедливость прогноза. Необходимо заметить, что прогнозная область с тремя предельными циклами существует не для всех значений параметров a, a_{20}, x_0.

Известно [8], что система (2) типа $2F+1S_\infty$ может иметь трехкратный фокус A лишь при $1/3<a<1$. Итак, выбирая значения a из указанного интервала и находя описанным алгоритмом систему (2), мы будем иметь систему с тремя циклами вокруг фокуса A(1, – 1). Для проверки существования хотя бы одного предельного цикла вокруг фокуса $B\left(x_0,-1/x_0\right)$ достаточно проверить устойчивость этой особой точки: если фокус устойчив и траектории системы (2) пересекают трансверсаль $x=0$ при увеличении t, выходя из области $x<0$, заключаем, что система (2) имеет по крайней мере один предельный цикл вокруг фокуса B. Аналогичным образом строятся системы (2) типа $2F+2S_\infty+1N_\infty$ с распределением (3,1) предельных циклов. Известно [12, 13], что распределение (3,1) предельных циклов возможно только для конфигураций особых точек $2F+1S_\infty$ и $2F+2S_\infty+1N_\infty$.

Для нахождения квадратичных систем (2) с распределением (2,1) предельных циклов поступаем, как и в случае распределения (3,1), только необходимо искать область с двумя предельными циклами. Эту область можно найти двумя способами. Первый опирается на тот факт, что область с двумя предельными циклами является смежной к области с тремя предельными циклами. Второй способ заключается в том, что область с тремя предельными циклами существует не при всех значениях параметров. Если выбрать параметры таким образом, чтобы у кривой двукратных предельных циклов не существовало точки возврата, тогда искомая область с двумя предельными циклами будет расположена между кривой двукратных предельных циклов и прямой негрубости фокуса *A* (1, –1).

3. Примеры систем с распределениями (3,1), (2,1) предельных циклов

3.1. Рассмотрим систему (2) с конфигурацией $2F+1S_\infty$ особых точек, имеющую три предельных цикла вокруг фокуса *A* (1, – 1). Так как она имеет единственную особую точку в бесконечности – седло в направлении оси *Oy*, то выполнены условия $0 < a < 1$, $a_{20} < 0$, кроме этого, из (6) имеем $u < 0$. Из анализа фокусных величин негрубого фокуса *A* (1, – 1) [8] следует, что система (2) при выполнении указанных условий может иметь трехкратный фокус лишь при $1/3 < a < 1$. Исследования показали, что точка возврата прогнозной кривой двукратных предельных циклов, соответствующая трехкратному предельному циклу, зависит также и от параметров a_{20}, x_0. Так, например, при $x_0 = -1$ для любого значения a существует некоторое значение параметра a_{20}^0 такое, что при всех $a_{20} < a_{20}^0$ у прогнозной кривой двукратных предельных циклов не существует точки возврата, т. е. при таких значениях параметров a, x_0, a_{20} не существует области с тремя предельными циклами.

Отметим также, что при больших по модулю отрицательных значениях a_{20} предельные циклы системы приобретают более правильную форму (близкую к окружности), в то время как при меньших они все более напоминают релаксационные циклы (вытянутые по горизонтали и приплюснутые по вертикали). Рассмотрим примеры систем, полученные по описанному методу.

Пример 1. Выбираем $a = 19/23$, $x_0 = -3$, $a_{20} = -200$ и, поступая по описанному выше алгоритму, строим область трех предельных циклов. Выбираем значения параметров a_{01}, a_{11}, в данном случае можно взять $a_{01} = 0{,}734$, $a_{11} = 1{,}9184$. Затем численно находим реальную функцию Андронова – Хопфа и проверяем справедливость прогноза. Учитывая, что фокус *B* (–3, 1/3) системы (2) с выбранными параметрами устойчив, а ее траектории пересекают трансверсаль $x = 0$ при увеличении t, выходя из области $x < 0$, заключаем, что система (2) имеет по крайней мере один предельный цикл вокруг фокуса *B*. Итак, система (2) при $a = 19/23$, $a_{20} = -200$, $x_0 = -3$, $a_{01} = 0{,}734$, $a_{11} = 1{,}9184$ имеет по крайней мере три предельных цикла вокруг фокуса *A* (1, –1) и один – вокруг фокуса *B* (–3, 1/3).

Теорема 2. *Система* (2) *при* $a = 19/23$, $a_{20} = -200$, $x_0 = -3$, $a_{01} = 0{,}734$, $a_{11} = 1{,}91837$ *имеет три предельных цикла вокруг фокуса A* (1, –1) *и один – вокруг фокуса B* (–3, 1/3)*, и эта оценка точная.*

Доказательство. Обоснование теоремы проведем при помощи построения модифицированной функции Дюлака (теорема 1), для этого перейдем от системы (2) с заданными значениями параметров к системе Льенара (5). Чтобы нормировать предельные циклы по их длине вдоль оси *Oy*, введем замену $y = Yw$. Выбрав $w = 1\big/\sqrt{a_{20}(x_0-1)}$, получим

$$g(\xi) = \frac{1}{4\xi^{31/24}} - \frac{41393677}{82800000\xi^{8/23}} + \frac{31042073\xi^{15/23}}{41400000} - \frac{367\xi^{38/23}}{400000} + \frac{19\xi^{61/23}}{18400},$$

$$f(\xi) = \frac{191837}{2000000\sqrt{2}}\xi^{-27/23} + \frac{367}{1000\sqrt{2}}\xi^{-4/23} - \frac{61}{460\sqrt{2}}\xi^{19/23}.$$

Для полученной системы Льенара на отрезке $\xi \in I = [0{,}1;\, 2{,}5]$ при $k = -3{,}5$, $n = 12$ ищем функцию $\Psi(\xi, Y, C) = \sum_{j=1}^{n} \Psi_j(\xi, C) Y^{n-j}$, $C = (C_1, ..., C_n)$, и соответствующую ей по теореме 1 функцию $\Phi(\xi, C) = \sum_{j=1}^{n} C_j \Phi_j(\xi)$ [9]. Функция $\Phi(\xi, C)$ может иметь острый экстремум на отрезке $[1{,}95;\, 2{,}05]$. Чтобы избежать отрицательных значений функции на этом отрезке, необходимо выбрать на нем более частую сетку. Выберем на каждом из промежутков [0,1; 1,95], [1,95; 2,05], [2,05; 2,5] равномерную сетку, разбив их соответственно на 500, 300 и 300 равных частей. На полученной сетке узлов $\xi_i \in I$, $i = \overline{1{,}1101}$, ищем решение задачи оптимизации для функции $\tilde{\Phi}(\xi, C) = 10^4 \xi^{71/23} \Phi(\xi, C)$

$$\tilde{\Phi}(\xi_i, C) \ge L,\ L \to \max,\ |C_j| \le 1,\ i = \overline{1{,}1101},\ j = \overline{1{,}12}. \tag{9}$$

Решение задачи (9) $(\tilde{C}^*, \tilde{L}^*)$ существует, при этом $\tilde{L}^* \approx 0{,}00011 > 0$ (доказательство сводится к исследованию знака квазиполинома с рациональными коэффициентами, что является алгебраической задачей). Теперь легко проверить, что функция $\Phi\left(\xi,\tilde{C}^*\right)$ положительна при $\xi>0$, а уравнение $\Psi\left(\xi, Y, \tilde{C}^*\right)=0$ определяет в этой области три овала. Отсюда из теоремы 1 следует, что соответствующая система (5), а значит и (2), имеет точно три предельных цикла в полуплоскости $\xi>0$. Для доказательства единственности предельного цикла системы (2) вокруг фокуса B_0 (x_0, $-1/x_0$) преобразованием $x=x_0\tilde{x}$, $y=-\tilde{y}/x_0$ переводим его в точку A (1, – 1). В новой системе (a_{10}; a_{20}; a_{01}; a_{11}; a) = = (10798,35; –16200; 2,202; 17,27; 19/23). Для соответствующей системы (5) в области $\xi>0$ ищем функцию $\Phi(\xi,C)$ при n = 4, k = – 1 и функции $\tilde{\Phi}(\xi, C)=10^{-4}\xi^{54/23}\Phi(\xi,C)$, решая задачу (9) на равномерной сетке $\xi_i\in I$, $i=\overline{1,401}$. Найдя ее решение $\tilde{C}^*$, $\tilde{L}^*\approx 0,43>0$, легко доказать положительность $\Phi\left(\xi,\tilde{C}^*\right)$ при $\xi>0$ и существование единственного овала уравнения $\Psi\left(\xi, Y, \tilde{C}^*\right)=0$. Это и доказывает единственность предельного цикла системы (2) вокруг фокуса B. ■

Пример 2. Система (2) при a = 10/23, x_0 = – 3, a_{01} = – 3,6, a_{11} = 5,44, a_{20} = – 15 имеет по крайней мере два предельных цикла вокруг фокуса A (1, –1) и один – вокруг фокуса B (–3, 1/3).

Пример 3. Система (2) при a = 19/23, x_0 = – 3, a_{01} = 0,72, a_{11} = 1,931, a_{20} = – 200 имеет по крайней мере два предельных цикла фокуса A (1, –1) и один – вокруг фокуса B (–3, 1/3). И в то же время в плоскости параметров a_{11}, a_{01} она имеет область с тремя предельными циклами (см. пример 1).

3.2 Будем рассматривать теперь системы (2) типа $2F+2S_\infty+1N_\infty$. Для этого необходимо выполнение условий

$$a>1,\ a_{20}<0,\ x_0<0,\ u<0. \tag{10}$$

Известно [8], что распределение (3,1) при условиях (10) возможно при значениях a, близких к единице и больших по модулю значений $a_{20}<0$.

Теорема 3. *Система* (2) *при* a = 1,01, a_{20} = – 200, x_0 = – 2, a_{01} = 1,5907, a_{11} = 1,42928 *имеет распределение* (3,1) *предельных циклов.*

Доказательство. Перейдя от системы (2) к системе Льенара (5), при w = 1/5 получим

$$g(\xi)=\frac{8}{\xi^{49/50}}-\frac{3989143\xi^{1/50}}{500000}+\frac{8000757\xi^{51/50}}{500000}-\frac{15907\xi^{101/50}}{250000}+\frac{101\xi^{151/50}}{2500},$$

$$f(\xi)=\frac{8933}{31250\xi^{99/100}}+\frac{15907\xi^{1/100}}{50000}-\frac{151\xi^{101/100}}{250}.$$

Далее, ищем функции $\Phi(\xi,C)$, $\Psi(\xi, Y, C)$ при $n=12$, k $=-1{,}4$. Для функции $\tilde{\Phi}(\xi,C)= =\xi^{77/47}\Phi(\xi,C)\cdot 10^3$ решаем задачу (10) на равномерной сетке $\xi_i\in[0{,}1;\ 3{,}5]$, $i=\overline{1,701}$, и доказываем, что соответствующая система (5) имеет ровно три предельных цикла в полуплоскости $\xi>0$. Для доказательства единственности предельного цикла системы (2) вокруг фокуса B (x_0, – $1/x_0$) переводим его в точку A (1, –1) и для полученной $\tilde{\Phi}(\xi,C)$ решаем задачу на равномерной сетке $\xi_i\in[0{,}1;\ 3{,}5]$. ■

Системы (2) типа $2F+2S_\infty+1N_\infty$, с распределением (3,1) предельных циклов, удалось построить только для a принадлежащих промежутку (1, 1,06 + ε), где 0 < ε < 0,005.

Теорема 4. *Система* (2) *с конфигурацией* $2F+2S_\infty+1N_\infty$ *при* a = 1,06, a_{20} = – 200, x_0 = – 2, a_{01} = 971/500, a_{11} = 736/625 *имеет распределение* (3,1) *предельных циклов.*

Доказательство. Проводим при помощи построения функции Дюлака. Для этого перейдем от системы (2) к системе Льенара (5), при w = 1/5 тогда получим

$$g(\xi)=\frac{8}{\xi^{22/25}}-\frac{99647\xi^{3/25}}{12500}+\frac{50022\xi^{28/25}}{3125}-\frac{971\xi^{53/25}}{12500}+\frac{53\xi^{78/25}}{1250},$$

$$f(\xi)=\frac{736}{3125\xi^{47/50}}+\frac{971\xi^{3/50}}{2500}-\frac{78\xi^{53/50}}{125}.$$

Далее, как в теореме 2, ищем функции $\Phi(\xi,C)$, $\Psi(\xi, Y, C)$ при n = 12, k = – 3,8. Она может иметь острый экстремум на отрезке [0,99; 1,02]. Чтобы избежать отрицательных значений функции на этом отрезке, выберем на каждом из промежутков [0,1; 0,99], [0,99; 1,02], [1,02; 3,5] равномерную сетку, разбив их соответственно на 400, 600 и 400 равных частей. На полученной сетке узлов $\xi_i\in I$, $i=\overline{1,1401}$, ищем решение задачи оптимизации (9) для функции $\tilde{\Phi}(\xi, C)=10^2\xi^2\Phi(\xi,C)$ и доказываем, что система (5) имеет ровно три предельных цикла в полуплоскости $\xi > 0$. Для доказательства единственности предельного цикла системы (2) вокруг фокуса B (x_0, – $1/x_0$) переводим его в точку A (1, –1) и для полученной $\tilde{\Phi}(\xi, C)$ решаем задачу (9). ■

1. Cherkas L.A., Dovnar S.I. // CRM. Barcelona. Preprint 402. Gener, 1999.
2. Ye Yangian // Transl. of AMS. Providence. RhodeIsland, 1986. Vol. 66.
3. Perko L.M. // J. Differential Equations. 1975. Vol. 18. P. 63.
4. Баутин Н.Н. // Мат. сб. 1952. Т. 30. Вып. 1. С. 181.
5. Cherkas L.A., Artes J.C., Llibre J. // Buletinul Academemiei de stiinte a Republicii Moldova. Mathematica. 2003. № 1 (41). P. 31.
6. Черкас Л.А., Сидоренко И.Н. // Весн. Магілёўс. дзярж. ун-та імя А.А. Куляшова. 2006. № 2-3 (24). С. 178.
7. Черкас Л.А., Сидоренко И.Н. // Там же. 2007. № 1 (26). С. 166.
8. Черкас Л.А., Сидоренко И.Н. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 2. С. 217.
9. Черкас Л.А. // Там же. 1997. Т. 33. № 5. С. 689.
10. Гринь А.А., Черкасс Л.А. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 29.
11. Smale S. // Math. Intelligencer. 1998. Vol. 20. № 2. P. 7.
12. Zegeling A., Kojj R.E. // Kunggpook Math. J. 1998. Vol. 38. P. 323.
13. Zegeling A., Kojj R.E. // J. Differential Equations. 1999. Vol. 151. P. 373.

Поступила в редакцию 20.03.08.

Иван Николаевич Сидоренко – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Л.А. Черкас.