УДК 519.1

Р.А. ПЕТРОВИЧ

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ДОМИНАНТНО-ПОРОГОВЫХ ГРАФОВ

Benzaken and Hammer introduced the class of domishold graphs. In this paper a simple algorithm of domishold graph recognition is proposed.

Стандартные теоретико-графовые понятия, не определяемые в этой работе, взяты из учебника [1].

Пусть G – простой граф с множеством вершин $V=VG$ и множеством ребер $E=EG$.

Множество вершин графа G, смежных с некоторой вершиной v, называется *окружением вершины* v и обозначается $N(v)$.

Граф H называется *подграфом* графа G, если $VH\subseteq VG$ и $EH\subseteq EG$. Если множество вершин графа H есть U, а множество его ребер совпадает с множеством всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат U, то H называется *подграфом*, *порожденным множеством* U, и обозначается $G(U)$.

Подмножество U вершин графа G называется *независимым,* если в нем нет смежных вершин, и *доминирующим*, если каждая вершина этого графа, не входящая в U, смежна с какой-либо вершиной из U (см. [1]).

Множество вершин графа G с равными степенями называется *звеном* графа G. Граф G называется *регулярным*, если он содержит единственное звено, и *бирегулярным*, если содержит ровно два звена (см. [2]).

Граф G называется *доминантно-пороговым*, если существуют такие неотрицательная вещественно-значная функция $w\colon V\rightarrow\mathbb{R}_+$ и число $\theta\in\mathbb{R}_+$, что $\Sigma_{v\in U}w(v)\geq\theta$ тогда и только тогда, когда U – доминирующее подмножество вершин графа G. Класс доминантно-пороговых графов является ближайшим расширением широко известного класса пороговых графов, весьма полезного для теории и приложений. Указанные классы графов и связанные с ними прикладные задачи детально описаны в [3].

Напомним две известные теоретико-графовые операции $\sqcup$ и $\oplus$. Пусть G_1, G_2 – два графа и $G_1\cap G_2\sqcup\varnothing$. *Дизъюнктным объединением* графов G_1 и G_2 называется граф $G_1\sqcup G_2$, определяемый следующими условиями:

$$V(G_1\sqcup G_2)=VG_1\cup VG_2,\ E(G_1\sqcup G_2)=EG_1\cup EG_2.$$

Соединением графов G_1 и G_2 называется граф

$$G_1\oplus G_2=(G_1\sqcup G_2)+\{uv\colon u\in VG_1,\ v\in VG_2\}$$

(к дизъюнктному объединению $G_1\sqcup G_2$ добавляется множество ребер полного двудольного графа с долями VG_1 и VG_2).

Для произвольного графа G *дополнительный граф* $\overline{G}$ определяется следующим образом: $\overline{VG}=VG$ и любые две несовпадающие вершины смежны в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G.

Полный граф на n вершинах обозначается K_n, пустой – O_n. Дизъюнктное объединение s копий графа K_2 обозначается sK_2; $J_{2n}=\overline{nK_2}$.

В [4] введены следующие множества:

$$A=\{K_n\colon n=1,2,\ldots\},\ B=\{O_p\colon p=1,2,\ldots\},\ C=\{J_{2m}\colon m=1,2,\ldots\},\ S=A\cup B\cup C.$$

Любой элемент множества S называется *b-боксом*. b-Боксы K_n и J_{2m} назовем *верхними*, b-бокс O_p – *нижним*.

В [4] введена следующая операция *умножения b-бокса на граф.*

Если D – b-бокс, а G – произвольный граф, то *произведение* DG определяется формулой

$$DG=\begin{cases}D\oplus G & \text{для верхнего бокса } D;\\ D\cup G & \text{для нижнего бокса } D.\end{cases} \tag{1}$$

Произведение D_1D_2 *двух b-боксов* определяется формулой (1), при этом считаем D_2 просто графом.

Произведение конечной последовательности боксов определяется по формуле

$$D_1D_2\ldots D_k=D_1(D_2\ldots D_k). \tag{2}$$

Отметим, что умножение b-боксов не является ни коммутативным, ни ассоциативным:

$$O_1K_1=O_1\sqcup K_1\neq K_1\oplus O_1=K_1O_1,\ K_1(O_1J_2)\neq(K_1O_1)J_2.$$

В [3] доказана следующая

Теорема 1.

1) Граф G является пороговым тогда и только тогда, когда он получается из одновершинного графа последовательным добавлением либо доминирующей, либо изолированной вершины.

2) Граф G является доминантно-пороговым тогда и только тогда, когда он получается из одновершинного графа последовательным добавлением либо доминирующей вершины, либо изолированной, либо пары несмежных доминирующих вершин.

Из теоремы 1 очевидно вытекает

Утверждение 1.

1) Граф G является доминантно-пороговым тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде произведения

$$G=D_1D_2...D_{p-1}D_p \tag{3}$$

произвольных b-боксов.

2) Граф G является пороговым тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде произведения (3)*, где каждый сомножитель D_i $(1 \le i \le p)$ есть либо A-, либо B-бокс.*

Замечание 1. Поскольку граф J_{2n}, $n>1$, не является пороговым, то класс пороговых графов уже класса доминантно-пороговых графов.

В [4] также введено понятие нормальной формы доминантно-порогового графа. Разложение (3) графа на *b*-боксы называется *нормальной формой*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) типы любых двух соседних боксов D_i и D_{i+1} различны;

2) если ни один из боксов D_i и D_{i+1} не является *B*-боксом, то D_i – *A*-бокс, а D_{i+1} – *C*-бокс;

3) если D_i, D_{i+k} – *B*-боксы, $k>1$, и каждый из промежуточных боксов $D_{i+1},\ldots,D_{i+k-1}$ – верхний, то $k \le 3$.

Добавим еще несколько определений.

Последовательность $(d_1, d_2,\ldots, d_n)$ целых неотрицательных чисел называется *n-последовательностью* и обозначается одной буквой *d*. *n*-Последовательность называется *графической,* если существует граф, степенная последовательность которого совпадает с *d*. Этот граф называется *реализацией* последовательности *d*. Если все реализации графической последовательности изоморфны, то такая последовательность называется *униграфической*, а ее реализация – *униграфом*.

Список степеней вершин графа называется его *степенной последовательностью*. *Правильная степенная последовательность d* графа *G* – это список степеней его вершин, записанный в порядке невозрастания: для $VG=\{v_1, ..., v_n\}$, $(d_1, d_2,\ldots, d_n)$, $d_i=deg\ v_i$, $d_i \ge d_{i-1}$.

Если переписать правильную степенную последовательность *d* в виде $d=(c_1^{m_1}, c_2^{m_2}, ..., c_k^{m_k})$, где m_i – число вершин степени c_i и $c_{i+1}< c_i$, и положить $C_i = c_i^{m_i}$, получим *разложение последовательности d на боксы* (или *боксовую форму последовательности d*):

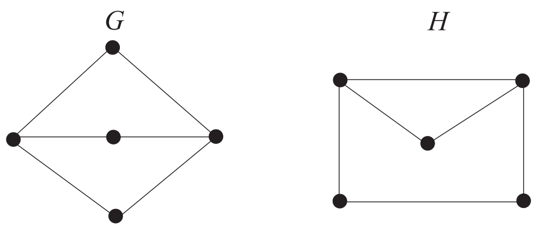
$$d=(C_1, C_2,\ldots, C_k). \tag{4}$$

Разложению (4) соответствует *разбиение* $(V_1, V_2,\ldots, V_k)$ *множества вершин VG на боксы*, где V_i – множество вершин степени c_i. Порожденные этими боксами подграфы $G(V_i)$ обозначим G_i, $1 \le i \le k$.

Замечание 2. В отличие от пороговых графов свойство графа быть доминантно-пороговым нельзя распознать по степенной последовательности.

Например, на рисунке граф $G=J_2O_3$ – доминантно-пороговый, а граф *H* не является доминантно-пороговым.

Но графы *G* и *H* имеют одну и ту же степенную последовательность *d*=(3, 3, 2, 2, 2).



Графы *G* и *H*

Далее считаем, что граф *G* – доминантно-пороговый, а (3) – его нормальная форма.

Рассмотрев различные комбинации произведений *b*-боксов, можно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть G – доминантно-пороговый граф, $d=(C_1, C_2,\ldots, C_k)$ – его степенная последовательность, записанная в боксовой форме. Тогда:*

1) Если k = 1, т. е. G регулярный, то $G=K_{m_1}$, $G=O_{m_1}$ *или* $G=J_{m_1}$ *и* $d=((m_1-1)^{m_1})$, $d=(0^{m_1})$ *или* $d=((m_1-2)^{m_1})$ *соответственно.*

2) Если $k = 2$, т. е. G бирегулярный, и в графе G отсутствуют и изолированные, и доминирующие вершины, то нормальная форма графа G имеет вид $G = J_{m_1}O_{m_2}$, где $m_2>1$.

3) Если $k\geq 2$ и $G = K_{m_1}D_2...D_p$, причем K_{m_1} – максимальный по включению b-бокс, то степени вершин графа K_{m_1} и только они образуют бокс C_1 в степенной последовательности d.

4) Если $k\geq 2$ и $G = O_{m_k}D_2...D_p$, причем O_{m_k} – максимальный по включению b-бокс, то степени вершин графа O_{m_k} и только они образуют бокс C_1 в степенной последовательности d.

5) Если $k\geq 3$, в G нет ни доминирующих, ни изолированных вершин и нормальная форма графа G имеет вид $G = J_{m_1}O_qD_3...D_p$, где $q>1$, то степени вершин графа J_{m_1} и только они образуют бокс C_1 в степенной последовательности d.

6) Если $k\geq 3$, в G нет ни доминирующих, ни изолированных вершин и нормальная форма графа G имеет вид $G = J_{m_1}O_1J_bD_4...D_p$, то степени вершин графа J_{m_1} и только они образуют бокс C_1 в степенной последовательности d.

7) Если $k\geq 3$, в G нет ни доминирующих, ни изолированных вершин и нормальная форма графа G имеет вид $G = J_aO_1K_bD_4...D_p$, где $a+b=m_1$, то степени вершин графов J_a и K_b и только они образуют бокс C_1 в степенной последовательности d.

В [4] доказана следующая

Лемма 2. *Пусть G – доминантно-пороговый граф, $d = (c_1^{m_1}, c_2^{m_2}, ..., c_k^{m_k})$ – его степенная последовательность, а (3) – нормальная форма. Тогда:*

1) если $c_k=0$, то $D_1 = G_k = O_{m_1}$;

2) если $c_1=n-1$, то $D_1 = G_1 = K_{m_1}$;

3) если $c_1=n-2$ и последовательность (4) содержит ровно один бокс, то $D_1 = J_{m_1}$;

4) если $c_1=n-2$, последовательность (4) содержит более одного бокса и $c_k=m_1$, то $D_1 = J_{m_1}$;

5) если $c_1=n-2$, последовательность (4) содержит более одного бокса и $0<c_k<m_1$, то граф G содержит только одну вершину а минимальной степени и D_1 совпадает с окружением $N(a)$ этой вершины в графе G. Кроме того, $D_1=J_{2l}$, где $2l=c_k$; $D_2=O_1=G(\{a\})$; $D_3=K_b$, где $b=m_1-c_k$. Таким образом, $V_1=(D_1\cup D_3)$, $G_1= D_1D_3$, а нормальная форма (3) графа G имеет вид

$$G = J_{c_k}O_1K_{m_1-c_k}D_4...D_p.$$

Поскольку граф J_{2m} является униграфом, то справедливы еще две леммы.

Лемма 3. *Если степенная последовательность (4) доминантно-порогового графа G содержит более одного элемента, $m_k>1$ и каждая вершина v степени c_1 смежна с m_1-2 вершинами степени c_1, то подграф, порожденный множеством вершин степени c_1 в графе G, есть J_{m_1}. При этом нормальная форма графа **G** имеет вид*

$$G = J_{m_1}O_{m_k}D_3D_4...D_p.$$

Лемма 4. *Пусть степенная последовательность (4) доминантно-порогового графа G содержит более одного элемента, $m_k= 1$, v_k – вершина минимальной степени, $deg(v_k)= c_k$. Если для любой вершины v, принадлежащей $N(v_k)$, число вершин из $N(v_k)$, смежных с v_k, равно c_k-2, то подграф, порожденный множеством $N(v_k)$, есть J_{c_k}. При этом нормальная форма графа G имеет вид*

$$G = J_{c_k}O_1K_bD_4...D_p,$$

где $c_k+b=m_1$.

На основании приведенных выше лемм строится следующий алгоритм.

Вершины графа G считаем упорядоченными по невозрастанию степеней. Граф G зададим списками смежностей вершин. $|VG|=n$, $|EG|=m$, $d = (c_1^{m_1}, c_2^{m_2}, ..., c_k^{m_k})$ – его степенная последовательность в боксовой форме.

Рассмотрим процедуру (*).

Начало

1) Если $c_1=n-1$, то помечаем вершины, степени которых образуют в степенной последовательности бокс $c_1^{m_1}$, как просмотренные и переходим к последовательности

$$d=((c_2-m_1)^{m_2},...,(c_k-m_1)^{m_k}).$$

2) Если $c_k=0$, то помечаем вершины, степени которых образуют в степенной последовательности бокс $c_k^{m_k}$, как просмотренные и переходим к последовательности

$$d=(c_1^{m_1},c_2^{m_2},..., c_{k-1}^{m_{k-1}}).$$

3) Если $c_1=n-2$, то:

*а) Пусть $m_k>1$ (это означает, что **все** вершины степени c_1 должны образовывать b-бокс J_{m_1}, а **все** вершины степеней c_k – b-бокс O_{m_k}). Тогда нужно, чтобы каждая вершина v степени c_1 была смежна ровно с m_1-2 вершинами степени c_1. Если это так, то помечаем все вершины v степени c_1 как просмотренные и переходим к последовательности*

$$d=((c_2-m_1)^{m_2},...,(c_k-m_1)^{m_k}).$$

*в) Пусть $m_k=1$, v_k – вершина степени c_k (это означает, что если граф G – доминантно-пороговый, то он имеет вид $G=J_{c_k}O_1K_bD_4...D_p$, $c_k+b=m_1$). Найдем окружение $L=N(v_k)$ вершины v_k и вершины, попавшие в L, пометим * (звездочка). Если $deg(v)=c_1$ для любой вершины v из L и количество вершин, помеченных *, с которыми эта вершина v смежна, равно c_k-2, то помечаем вершину v_k и все вершины из L как просмотренные и переходим к одной из степенных последовательностей:*

$$d=((c_1-c_k)^{m_1-c_k},(c_2-c_k)^{m_2},...,(c_{k-1}-c_k)^{m_{k-1}}),\ \text{если } m_1\neq c_k, \text{ и}$$

$$d=((c_2-c_k)^{m_2},...,(c_{k-1}-c_k)^{m_{k-1}}),\ \text{если } m_1=c_k.$$

Конец

Алгоритм распознавания доминантно-порогового графа заключается в повторении процедуры (*) до тех пор, пока не придем к пустой последовательности d (и тогда ответ будет «да») либо к ситуации, при которой нельзя выполнить ни один из шагов 1) – 3) (ответ «нет»).

Так как в процессе выполнения алгоритма в худшем случае нужно просмотреть по одному разу все вершины и их окружения (за счет шага *3* процедуры (*)), то сложность приведенного выше алгоритма равна $O(n+2m)=O(n+m)$.

К множествам $A=\{K_n: n=1, 2, \ldots\}$, $B=\{O_p: p=1, 2, \ldots\}$, $C=\{J_{2m}: m=1, 2, \ldots\}$, упомянутым в начале статьи, добавим еще $\overline{C}=\{sK_2 : s=1, 2,...\}$ и рассмотрим $\overline{S}=A\cup B\cup \overline{C}$. Любой элемент множества $\overline{S}$ также будем называть b-боксом. b-Бокс K_n считаем *верхним*, а O_p- и sK_2-боксы – *нижними*. Над боксами K_n, O_p и sK_2 вводятся те же операции, что и над боксами K_n, O_p, J_{2m} по формулам (1), (2).

b-Бокс $\overline{D}$ считаем *дополнительным к b-боксу D*, если $\overline{D}$ как граф является дополнительным к графу D. Например, бокс K_n является дополнительным к боксу O_n.

Пусть $\boldsymbol{D}$ – множество доминантно-пороговых графов. Обозначим $\overline{\boldsymbol{D}}$ – множество графов, дополнительных к доминантно-пороговым.

Можно показать, что справедливы следующие два утверждения.

Утверждение 2. Граф $\overline{G}$ принадлежит множеству $\overline{\boldsymbol{D}}$ тогда и только тогда, когда $\overline{G}$ может быть представлен в виде произведения

$$\overline{G}=\overline{D}_1\overline{D}_2...\overline{D}_{p-1}\overline{D}_p,$$

где $\overline{D_i}$ – либо A-, либо B-, либо $\overline{C}$-бокс, $1\leq i\leq p$.

Утверждение 3. Граф G является пороговым тогда и только тогда, когда он принадлежит одновременно и множеству $\boldsymbol{D}$, и множеству $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Нормальной формой графа $\overline{G}$, дополнительного к доминантно-пороговому графу G, назовем граф $\overline{G}=\overline{D}_1\overline{D}_2...\overline{D}_{p-1}\overline{D}_p$, где $\overline{D}_i$ $(1\leq i\leq p)$ – b-бокс, дополнительный к b-боксу D_i из нормальной формы (3) графа G.

Для графов, принадлежащих множеству $\overline{\boldsymbol{D}}$, формулируются леммы, аналогичные леммам 1–4, и на их основании строится алгоритм распознавания, аналогичный алгоритму, приведенному выше, и имеющий такую же сложность.

Работа выполнена в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели (2006–2010)».

Автор благодарит доктора физико-математических наук, профессора Р.И. Тышкевич, под руководством которой была написана эта работа.

1. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М., 1990.

2. Tyshkevich R. Discrete Math. 2000. Vol. 220. P. 201.

3. Mahadev V., Peled U.N. // Threshold Graphs and Related Topics. Elsevier, 1995.

4. Максимович О.В., Тышкевич Р.И. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 2. С. 16.

Поступила в редакцию 14.06.09.

Роман Александрович Петрович – студент 5-го курса механико-математического факультета.