представленной модели, всегда меньше, чем соответствующие их значения в классической теории.

Как прогиб микро-балки, так величина сдвигающих напряжений уменьшается нелинейно с увеличением скалярного параметра длины. Уменьшение разницы между результатами, полученными по двум моделям (представленной и классической), при увеличении толщины балки (когда отношение l/h уменьшается), показывает, что размерный эффект является значительным только на нано шкале.

Литература

1. Sun Z. H., Wang X. X., Soh A. K., Wu H. A., Wang Y. *Bending of nanoscale structures: inconsistency between atomistic simulations and strain gradient elasticity solution* // Comput. Mater. Sci. – 2007. – Vol. 40. – P. 108 – 113.
2. Lam D. C. C., Yang Chong A. C. M., Wang J., Tong P. *Experiments and theory in strain gradient elasticity* // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. – Vol. 51. – P. 1477 – 1508.
3. Park S. K., Gao X.-L. Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory // J. Micromech. Microeng. – 2006. – Vol. 16. – P. 2355 – 2359.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ ДВУСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ОСНОВАННОЕ НА НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Шейко А. Н., Михасев Г. И.

Белорусский государственный университет

220030, Беларусь, г. Минск, пр-т Независимости, 4

sheykoan@rambler.ru, gimikhasev@rambler.ru

Введение. В данной работе проводится анализ собственных форм колебаний двустенной углеродной нанотрубки (ДУНТ), находящейся в упругой среде. Трубка моделируется ортотропной цилиндрической оболочкой. В качестве исходных уравнений, описывающих движение ДУНТ, используются уравнения типа Флюгге [1], которые учитывают начальные напряжения, обусловленные действием внешних сил и реакцией окружающей упругой среды. При формулировке уравнений физического состояния используется нелокальная теория упругости Эрингена [2]. Упругая среда моделируется Винклеровским основанием [3]. Погрешность используемой здесь модели составляет величину порядка [4] $\sim \max\limits_{j=1,2}\left\{h_j\big/R_j^2, \left(e_0 a/R_1\right)^2\right\}$, где a =0.14нм – характерный внутренний размер решетки h_j – толщина j-ой трубки, а R_1 – радиус вложенной трубки.

Уравнения движения в перемещениях. Двустенная углеродная нано трубка рассматривается как система двух концентрически вложенных ортотропных цилиндрических оболочек с радиусами R_j, $j=1,2$ (где индексы $j=1,2$ отвечают внутренней и внешней трубкам соответственно). Введем ортогональную систему координат x и φ, где x – осевая координата, а φ – угол. В качестве уравнений движения системы концентрически вложенных трубок используем уравнения типа Флюгге [1]:

$$\frac{\partial T_{j,1}}{\partial x}+\frac{\partial S_j}{\partial \varphi}+\frac{T^0_{j,2}}{R_j}\left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u_{j,3}}{\partial x}\right)+\frac{T^0_{j,1}}{R_j}\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2}+2\frac{\partial S^0_j}{R_j}\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x\partial \varphi}-R_j\rho_j h_j\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial T_{j,2}}{\partial \varphi}+\frac{\partial S_j}{\partial x}-\frac{1}{R_j}\frac{M_{j,2}}{\partial \varphi}-\frac{1}{R_j}\frac{\partial H_j}{\partial x}+\frac{T^0_{j,2}}{R_1}\left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial u_{j,3}}{\partial \varphi}\right)+\frac{T^0_{j,1}}{R_j}\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2}+2\frac{S^0_j}{R_j}\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x\partial \varphi}+\frac{\partial u_{j,3}}{\partial x}\right)-R_j\rho_j h_j\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 M_{j,2}}{\partial \varphi^2}+2\frac{\partial^2 H_j}{\partial x\partial \varphi}+\frac{\partial^2 M_{j,1}}{\partial x^2}+R_j T_{j,2}- \tag{1}$$

$$-T^0_{j,2}\left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x}-\frac{\partial u_{j,2}}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \varphi^2}\right)-T^0_{j,1}\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2}+2S^0_j\left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial x}-\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x\partial \varphi}\right)-$$

$$-R_j^2\left(p^*_{j(j+1)}(x,\varphi)-\frac{R_{j-1}}{R_j}p^*_{(j+1)j}(x,\varphi)\right)+R_j\rho_j h_j\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2}=0,\ j=1,2.$$

где $p^*_{01}=0$, $p^*_{12}=c^*\left(u_{2,3}-u_{1,3}\right)$- силы Ван-дер-Ваальса между стенками трубки, $c^*=\dfrac{200}{0{,}16\pi a^2}$ erg/cm^2, $p^*_{23}=-\kappa^*(x,\varphi)u_{2,3}$ – усилия, действующие со стороны окружающей матрицы на внешний слой нано трубки. Усилия и моменты в (1) выражаются через перемещения в соответствии с классической моделью макроскопических оболочек [5]. В соответствии с нелокальной континуальной теорией Эрингена [2] микроскопические и макроскопические напряжения связаны соотношениями:

$$\Im_j\left(T_{j,i},S_j,M_{j,2},H_j\right)=\left(T^{(m)}_{j,i},S^{(m)}_j,M^{(m)}_{j,i},H^{(m)}_j\right), \tag{2}$$

где $\Im_j$ – дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$\Im_j=1-\left(\frac{e_0 a}{R_j}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)=1-e_0^2\mu_j^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right),\ \mu_j=\frac{a}{R_j},\ j=1,2,\ i=\overline{1,3}.$$

Здесь e_0 – материальная константа нелокальности. Действуя на уравнения (1) оператором (2), и подставляя соотношения, связывающие усилия и перемещения, получим уравнения движения в перемещениях:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\mu^4\zeta_n\mathbf{M}_{n,ij}+\mathbf{L}_{n,ij}\right)u_{n,j}-\delta_n\Im_n\frac{\partial^2 u_{n,i}}{\partial \bar{t}^2}-$$

$$-\Im_n\left(\hat{c}_{n+1,i}\left(u_{n+1,i}-u_{n,i}\right)-\hat{c}_{n,i}\left(u_{n,i}-u_{n-1,i}\right)+\right.$$

$$+\hat{q}_{n,i}\Big)=0,\; i=\overline{1,3},\; n=1,2;\; \hat{c}_{n,i}(x)=\frac{R^2 c_{n,i}}{h_n E_n^*},\; \hat{q}_{n,i}(x,\phi,\hat{t})=\frac{R^2 q_{n,i}}{h_n E_n^*},$$

$$\mu^4=\frac{h_N^2}{12R^2},\; \zeta_n=\left(\frac{h_n}{h_N}\right)^2,\; \delta_n=\left(\frac{\omega_N}{\omega_n}\right)^2,\; \omega_n^2=\frac{E_n^*}{\rho_n R^2},\; E_n^*=\frac{2E_{n,1}\nu_{n,2}}{\nu_{n,1}+\nu_{n,2}}.$$

Здесь $\mathbf{L}_{n,ij}, \mathbf{M}_{n,ij}$ – матричные дифференциальные операторы [4] размерности 3×3, t/ω_N – время, $q_{n,i}$ – распределенные поверхностные силы.

Свободные колебания. В качестве примерарассмотрены свободные осесимметричные и неосесимметричные колебания ДУНТ с учетом наличия осевых сжимающих, либо растягивающих сил. В случае сжимающих сил предполагалось, что величина силы не превосходит критического значения, вызывающего бифуркацию нанотрубки. Исследовано влияние величины внешней силы, параметра нелокальности, а также коэффициента постели окружающей внешней среды на собственные частоты ДУНТ и соответствующие формы колебаний. В частности установлено, что учет внутреннего масштаба приводит к снижению собственных частот для всех форм колебаний по сравнению с частотами для классической макроскопической оболочки.

Работа выполнена в рамках и при финансовой поддержки государственной программы научных исследований ГПНИ «Функциональные и машиностроительные материалы, наноматериалы» на 2011–2013 гг. (задание «Наноматериалы и нанотехнологии 2.2.02»).

Литература

1. Flügge W. *Statikund Dynamikder Schalen*. – Springer, Berlin. – 1934.
2. Eringen A. C. *On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves* // J. Appl. Phys. – 1983. – Vol. 54. P. 4703 – 4710.
3. Usuki T., Yogo K. *Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flügge shell theory* // Proc. R. Soc. – 2009. – A 465. – P. 1199 – 1226.
4. Михасев Г. И. *Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек* // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 6. – С.119 – 123.
5. Михасев Г. И. *Локализованные колебания и волны в тонких оболочках* / Г. И. Михасев, П. Е. Товстик // Асимптотические методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 292 с.