АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБОВ ТРЕХСЛОЙНОЙ БАЛКИ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗКАХ

Яровая А. В., Поддубный А. А.
УО «Белорусский государственный университет транспорта»
246652 г. Гомель ул. Кирова, 34
av.yar@yandex.by, aleksey-podd@yandex.by

Введение. В последние годы слоистые конструкции занимают значительное место в промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении. Разработаны разнообразные методики, позволяющие найти перемещения, усилия и напряжения в таких конструкциях с различной степенью точности. Чтобы результаты, полученные аналитическим путем, можно было считать достоверными, их необходимо сопоставить с данными соответствующих экспериментов и с результатами расчета по альтернативным методикам.

Статическое деформирование трехслойных элементов конструкций исследовано в [1–3]. В работе [3] рассмотрен изгиб трехслойной балки под действием локальных нагрузок с использованием разрывных функций Хевисайда и Дирака. В данной статье рассмотрен изгиб подобной балки при локальных нагрузках более сложного характера, причем балка может иметь ступенчато-переменное по длине сечение. Решения получены отдельно для трех участков, а затем «сшиты» с использованием условий равенства перемещений и усилий на границах. Для подтверждения адекватности полученных результатов были выполнены расчеты по методике других авторов, а также проведен собственный эксперимент.

Расчетная схема балки. Рассматривается прямоугольная трехслойная балка длиной l и размерами поперечного сечения $h \times b_0$. Наружные слои являются несущими, они тонкие и выполнены из достаточно прочного материала. Менее прочный толстый заполнитель разносит несущие слои на заданное расстояние по высоте балки и обеспечивает их совместную работу. Система координат x, y, z связана со срединной плоскостью заполнителя. Номер слоя обозначен индексом k ($k = 1, 2, 3$). На верхний слой балки действуют распределенные поверхностные нагрузки, не изменяющиеся вдоль оси y. На торцах балки и в сечениях 1 ($x = x_1$) и 2 ($x = x_2$) действуют сосредоточенные силы и моменты. По длине балки выделим три участка: I ($0 \le x \le x_1$), II ($x_1 \le x \le x_2$), III ($x_2 \le x \le l$). Обозначим: $p^n(x)$, $q^n(x)$ – продольная и поперечная распределенные нагрузки на n-м участке($n = I, II, III$).

Основные гипотезы и искомые функции. Считается, что при изгибе трехслойного пакета несущие слои в силу тонкости испытывают только растяжение-сжатие. Заполнитель дополнительно работает на сдвиг. Слои несжимаемы по толщине. Деформации малые. Материалы ортотропные, для них справедлив закон Гука. Постановка и решение задачи проводятся в перемещениях. В качестве искомых величин принимаются функции $w^n(x)$, $u^n(x)$ – прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, а также $\psi^n(x)$ – угол поворота нормали в заполнителе за счет сдвига (угол сдвига) на n-м участке. В точках сопряжения участков должны соблюдаться условия непрерывности перемещений.

Уравнения равновесия и их решение. К деформированной балке применяется принцип возможных перемещений Лагранжа. Составляя выражения возможных работ внешних и внутренних сил и приравнивая их, получаем дифференциальные уравнения равновесия в усилиях, условия для усилий в точках сопряжения участков и силовые граничные условия. Выразив компоненты тензора напряжений в слоях через перемещения, внутренние силы и моменты через функции $w^n(x)$, $u^n(x)$, $\psi^n(x)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений равновесия упругого трехслойной балки в перемещениях:

$$a_1^n u^n{}_{,xx} + a_6^n \psi^n{}_{,xx} - a_7^n w^n{}_{,xxx} = -p^n,\; a_6^n u^n{}_{,xx} + a_2^n \psi^n{}_{,xx} - a_3^n w^n{}_{,xxx} - a_5^n \psi^n = 0,$$
$$a_7^n u^n{}_{,xxx} + a_3^n \psi^n{}_{,xxx} - a_4^n w^n{}_{,xxxx} = -q^n. \tag{1}$$

Решив систему (1), получим соотношения для сдвига в заполнителе $\psi^n(x)$, прогиба $w^n(x)$ и продольного перемещения срединной плоскости заполнителя $u^n(x)$ на n-м участке:

$$\begin{gathered}
\psi^n(x) = C_1^n b_{11}^n + C_2^n \operatorname{sh}\left(\beta_3^n x\right) + C_3^n \operatorname{ch}\left(\beta_3^n x\right) + g_1^n(x);\\
w^n(x) = C_1^n\left(\alpha_{17}^n b_{11}^n x + \alpha_{18}^n x^3/6\right) + C_2^n b_{14}^n \operatorname{ch}\left(\beta_3^n x\right) +\\
C_3^n b_{14}^n \operatorname{sh}\left(\beta_3^n x\right) + C_4^n x^2/2 + C_5^n x + C_6^n + g_2^n(x);\\
u^n(x) = C_1^n\left(b_{15}^n + b_{16}^n x^2\right) + C_2^n b_{17}^n \operatorname{sh}\left(\beta_3^n x\right) +\\
+C_3^n b_{17}^n \operatorname{ch}\left(\beta_3^n x\right) + C_4^n \alpha_{13}^n x + C_5^n \alpha_{13}^n + C_7^n x + C_8^n + g_3^n(x).
\end{gathered} \tag{2}$$

Входящие в (1) и (2) функции и коэффициенты учитывают геометрические и упругие свойства слоев на n-м участке, C_1^n, ..., C_8^n – константы интегрирования.

Граничные условия и условия сопряжения. Чтобы найти константы интегрирования, необходимо учесть граничные условия и условия сопряжения участков друг с другом. На границах участков ($x = x_1$ и $x = x_2$) должны выполняться условия равенства перемещений и внутренних усилий с учетом приложенных сосредоточенных внешних сил и моментов. Указанные условия позволяют составить систему 24-х линейных алгебраических уравнений для определения констант интегрирования.

Описание эксперимента. Была изготовлена и испытана трехслойная балка прямоугольного поперечного сечения, несущие слои которой выполнены из фанеры с модулями упругости $E_1 = 6000$ МПа, $G_1 = 750$ МПа, заполнитель – из пенополистирола, для которого $E_2 = 15$ МПа, $G_2 = 5{,}14$ МПа. Геометрические размеры балки: длина $l = 660$ мм, ширина $b_0 = 60$ мм, высота сечения $h = 66$ мм, толщины слоев $h_1 = h_2 = 8$ мм, $h_3 = 50$ мм. К балке прикладывалась распределенная по всей длине нагрузка $q = 16$ кПа и локальная нагрузка $q = 4{,}3$ кПа на участке длиной 95 мм.

Определение прогибов трехслойной балки по методике В. Н. Кобелева. В работе [1] имеются формулы для определения прогибов в шарнирно опертой трехслойной балке, нагруженной равномерно распределенной по всему пролету и по его части, которые были использованы для сравнения результатов.

Численные результаты. При нагрузке, равномерно распределенной по всей длине балки, наибольший прогиб составил: по первой методике (авторов доклада) – 2,4 мм; по второй (В. Н. Кобелева с соавторами) – 1,6 мм; по результатам эксперимента – 2,7 мм. При нагрузке, приложенной локально, наибольший прогиб составил: по первой методике – 1,9 мм; по второй – 1,3 мм, по результатам эксперимента – 2,2 мм.

Выводы. Числовые значения прогибов, полученных по методике авторов доклада, лучше согласуются с данными проведенного испытания балки, чем результаты, рассчитанные по методике [1]. Погрешность составляет не более 10 %. Однако расхождения результатов показывают на необходимость проведения дальнейших теоретических и экспериментальных исследований, направленных на уточнение расчетных зависимостей для перемещений и напряжений в трехслойных конструкциях.

Литература

1. Кобелев В. Н. *Расчет трехслойных конструкций*: Справочник / В. Н. Кобелев, Л. М. Коварский, С. И. Тимофеев; Под общ.ред. В. Н. Кобелева. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
2. Старовойтов Э. И. *Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки* / Э. И. Старовойтов. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 344 с.
3. Плескачевский Ю. М. *Деформирование металлополимерных систем* / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск: Бел. навука. 2004. – 386 с.