УДК 517.95

С.П. ХОДОС

ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Existence, uniqueness and continuous dependence theorems of strong solutions of the Cauchy problems for generalized Euler – Poisson – Darboux operator differential equation with variable domains are proved.

Обобщенное дифференциально-операторное уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу с постоянными областями определения переменных неограниченных операторов изучалось в [1]. Впервые несингулярные гиперболические дифференциально-операторные уравнения с переменными областями определения были исследованы в [2, 3]. В настоящей работе модификацией метода энергетических неравенств доказывается существование, единственность и непрерывная зависимость сильных решений задачи Коши для обобщенного дифференциально-операторного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с переменными областями определения переменных неограниченных операторов. Их единственность и непрерывная зависимость следуют из энергетического неравенства, при выводе которого используются абстрактные сглаживающие операторы из [2]. Их существование вытекает из плотности множества значений, которая устанавливается при помощи новой леммы 1 о сопряженном операторе. В несингулярном случае $(\alpha = 0)$ эта задача Коши рассмотрена в [4].

1. Постановка задачи Коши. На ограниченном интервале $]0,T[$ дана задача Коши для обобщенного сингулярного дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{B(t)}{t^\alpha}\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad 0 < \alpha \le 1, \quad t \in]0,T[, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{du}{dt}\bigg|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где f и u – абстрактные функции переменной t со значениями в гильбертовом пространстве H, $A(t)$ и $B(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ и $D(B(t))$ соответственно.

Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ скалярное произведение и норму в H. Пусть операторы $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

A0. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A(t)$ самосопряжены в H и

$$(A(t)u,u) \ge a_0|u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad a_0 > 0.$$

A1. При всех $t \in [0,T]$ их обратные операторы $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$ в H сильно непрерывны по t и имеют ограниченную сильную производную [5] $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$ такую, что

$$-((dA^{-1}(t)/dt)g,g) \le a_1(A^{-1}(t)g,g) \quad \forall g \in H, \quad a_1 \ge 0. \tag{3}$$

A2. При почти всех $t \in]0,T[$ операторы $dA^{-1}(t)/dt$ имеют в H ограниченную сильную производную $d^2A^{-1}(t)/dt^2 \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$ такую, что

$$\left|((d^2A^{-1}(t)/dt^2)g,v)\right| \le a_2|g|(A^{-1}(t)v,v)^{1/2} \quad \forall g,\ v \in H, \quad a_2 \ge 0. \tag{4}$$

B0. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $B(t)$ подчинены квадратному корню $A^{1/2}(t)$ операторов $A(t)$ и выполняется оценка

$$-\operatorname{Re}(B(t)u,u) \le b_0t^\alpha|u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad b_0 \ge 0. \tag{5}$$

B1. При всех $t \in [0,T]$ верны неравенства

$$-\operatorname{Re}(B(t)u,\ A(t)u) \le b_1t^\alpha(A(t)u,u) \quad \forall u \in D(A(t)), \quad b_1 \ge 0, \tag{6}$$

$$\left|(B(t)(dA^{-1}(t)/dt)g,h)\right| \le b_2t^\alpha|g|(A^{-1}(t)h,h)^{1/2} \quad \forall g,\ h \in H, \quad b_2 \ge 0. \tag{7}$$

2. Определение сильных решений. За пространство сильных решений задачи Коши (1), (2) возьмем гильбертово пространство E, полученное замыканием множества всех ее гладких решений

$$D(L(t))=\left\{u\in\mathcal{H}=L_2(]0,T[,H):u(t)\in D(A(t))\cap D(B^*(t)),\ \frac{du(t)}{dt}\in D(B(t)),\ t\in[0,T];\right.$$
$$\left.\frac{du(t)}{dt},\frac{d^2u(t)}{dt^2},\frac{B(t)}{t^\alpha}\frac{du(t)}{dt},\frac{B^*(t)}{t^\alpha}u,\ A(t)u\in\mathcal{H};\ u(0)=\frac{du(0)}{dt}=0\right\}$$

по эрмитовой норме $\|u\|_E=\left[\int_0^T(|du/dt|^2+|A^{1/2}(t)u|^2)dt\right]^{1/2}$, где $B^*(t)-$ сопряженные операторы в H к операторам $B(t)$. Пространством правых частей $f(t)$ уравнения (1) будет банахово пространство F, которое является замыканием множества $\mathcal{H}$ по норме $\|f\|_F=\sup_v\left\{\left|\int_0^T(T-t)(f,\nu)dt\right|\Big/\|v\|_0\right\}$, $\|v\|_0=\left(\int_0^T|\nu|^2\,dt\right)^{1/2}$, $v\in\mathcal{H}$.

Негативное пространство F очевидно является множеством всех антилинейных непрерывных функционалов на позитивном гильбертовом пространстве E_1 с эрмитовой нормой $\|w\|_{E_1}=\left[\int_0^T(T-t)^{-2}\,|w(t)|^2\,dt\right]^{1/2}$, т. е. $F=E_1'$.

Задаче Коши (1), (2) соответствует линейный неограниченный оператор $L(t):E\supset D(L(t))\to F$ с плотной областью определения $D(L(t))$. Можно доказать, что если операторы $A(t)$ удовлетворяют условию A0 и множество $D(L(t))$ плотно в $\mathcal{H}$, то оператор $L(t)$ допускает сильное замыкание $\overline{L}(t):E\supset D(\overline{L}(t))\to F$ [6].

Определение. Решения $u\in D(\overline{L}(t))$ операторного уравнения $\overline{L}(t)u=f$, $f\in F$, называются сильными решениями задачи Коши (1), (2).

3. Единственность. Выведем энергетическое неравенство сильных решений.

Теорема 1. *Если выполняются условия A*0, *A*1, *B*0 *и множество* $D(L(t))$ *плотно в* $\mathcal{H}$, *то имеет место неравенство*

$$\|u\|_E\le c_1\left\|\overline{L}(t)u\right\|_F\quad\forall u\in D(\overline{L}(t)),\quad c_1=2\exp(\max\{a_1,2b_0\}T).\tag{8}$$

Доказательство. В гильбертовом пространстве H абстрактные сглаживающие операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon A(t))^{-1}$, $\varepsilon>0$, со значениями в $D(A(t))$ обладают следующими свойствами [2]:

а) в H $A_\varepsilon^{-1}(t)g\to g$ при $\varepsilon\to0$ равномерно по $t\in[0,T]$ для $\forall g\in H$;

б) в H существует сильная производная $dA_\varepsilon^{-1}(t)/dt\in\mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$.

При выводе энергетического неравенства (8) неограниченные и не дифференцируемые операторы $A(t)$ аппроксимируются ограниченными операторами $A(t)A_\varepsilon^{-1}(t),\varepsilon>0$, которые в H сильно дифференцируемы по $t\in[0,T]$ и

$$\frac{d(A(t)A_\varepsilon^{-1}(t))}{dt}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{dA_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}=-A(t)A_\varepsilon^{-1}(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt}A(t)A_\varepsilon^{-1}(t),\quad\varepsilon>0.\tag{9}$$

Используя свойства а), б) операторов $A_\varepsilon^{-1}(t)$, формулу (9) и оценку (3), так же как в [2], для всех $u\in D(L(t))$ доказывается неравенство

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left|\frac{du}{dt}\right|^2dt+\int_0^T e^{c(T-t)}\left|A^{1/2}(t)u\right|^2dt\le2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{d^2u}{dt^2}+A(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt-$$
$$-c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2dt+(a_1-c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|A^{1/2}(t)u\right|^2dt\quad\forall c\ge0.$$

К правой части этого неравенства прибавим и вычтем выражение $2\,\mathrm{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)((B(t)/t^\alpha)(du/dt),\ (du/dt))dt$ и при $\forall c\ge a_1$ придем к неравенству

$$\int_0^T e^{c(T-t)}\left(\left|\frac{du}{dt}\right|^2+\left|A^{1/2}(t)u\right|^2\right)dt\le 2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(L(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt-$$
$$-2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{B(t)}{t^\alpha}\frac{du}{dt},\frac{du}{dt}\right)dt-c\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt\quad \forall u\in D(L(t)). \tag{10}$$

Согласно оценке (5) правая часть этого неравенства не превосходит величины

$$2\operatorname{Re}\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(L(t)u,\frac{du}{dt}\right)dt+(2b_0-c)\int_0^T e^{c(T-t)}(T-t)\left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt,$$

половина которой при $c=c_2=\max\{a_1,2b_0\}$ оценивается сверху через

$$\frac{\left|\int_0^T (T-t)\left(L(t)u,\ e^{c_2(T-t)}\dfrac{du}{dt}\right)dt\right|}{\|du/dt\|_0}\|u\|_E=\frac{\left|\int_0^T (T-t)(L(t)u,v)dt\right|}{\left\|e^{c_2(t-T)}v\right\|_0}\|u\|_E\le e^{c_2T}\|L(t)u\|_F\|u\|_E, \tag{11}$$

так как $\left\|e^{c_2(t-T)}v\right\|_0\le e^{-c_2T}\|v\|_0\quad \forall v\in\mathcal{H}.$ В результате оценки левой части неравенства (10) снизу через $\|u\|_E^2$, его правой части сверху через удвоенное (11) и сокращения на $\|u\|_E$ получим неравенство (8) сначала для гладких решений $u\in D(L(t))$ и потом предельным переходом для всех сильных решений $u\in D(\overline{L}(t)).$ Теорема 1 доказана.

В предположениях теоремы 1 из неравенства (8), обеспечивающего единственность сильных решений, вытекает равенство $R(\overline{L}(t))=\overline{R(L(t))}$, где $R(\overline{L}(t))$ – множество значений оператора $\overline{L}(t)$ и $\overline{R(L(t))}$ – замыкание в F множества значений $R(L(t))$ оператора $L(t)$.

4. Разрешимость. Установим существование сильных решений на F.

Теорема 2. *Если выполняются условия $A0-A2$, $B0$, $B1$ и множество $D(L(t))$ плотно в $\mathcal{H}$, то для каждой функции $f\in F$ сильное решение $u\in E$ задачи Коши* (1), (2) *существует и удовлетворяет оценке* $\|u\|_E\le c_1\|f\|_F$.

Доказательство. Для доказательства всюду разрешимости в сильном смысле задачи Коши (1), (2) достаточно от противного доказать плотность множества $R(L(t))$ в F. Если $F\ne\overline{R(L(t))}$, то по известному следствию из теоремы Хана – Банаха на рефлексивном банаховом пространстве F существует линейный непрерывный функционал $0\ne v\in F'=E_1$ такой, что

$$\int_0^T (T-t)(L(t)u,v)dt=0\quad \forall u\in D(L(t)). \tag{12}$$

Для каждого $\tau\in[0,T[$ в равенстве (12) положим $u=A^{-1}(t)h,$ где $h\in M_\tau=$ $=\{h\in\mathcal{H}_\tau=L_2(]\tau,T[,H):(1/t)(dh/dt),\ d^2h/dt^2\in\mathcal{H}_\tau: h(t)=dh(t)/dt=0,\ t\in[0,\tau]\}$, и будем иметь тождество

$$\int_\tau^T\left(\frac{d^2h}{dt^2},A^{-1}(t)(T-t)v\right)dt=\int_\tau^T (T-t)\Phi(h,v)dt, \tag{13}$$

в котором форма $\Phi(h,v)=-((d^2A^{-1}(t)/dt^2)h,v)\ -2((dA^{-1}(t)/dt)(dh/dt),v)-(h,v)-$ $(t^{-\alpha}B(t)(dA^{-1}(t)/dt)h,v)-(t^{-\alpha}B(t)A^{-1}(t)(dh/dt),v).$

Пусть для каждого $\tau\in[0,T[$ функция w – решение в $\mathcal{H}_\tau$ следующей задачи Коши: $dw/dt=te^{c(t-T)}v,\ t\in]\tau,T[;\ w(\tau)=0,$ где функция v из тождества (12). Следовательно, функция $v=e^{c(T-t)}t^{-1}(dw/dt)\in\mathcal{H}_\tau\ \forall c\ge 0,$ так как $E_1\subset\mathcal{H}.$

Тогда от тождества (13) приходим к тождеству

$$\int_{\tau}^{T}\left(\frac{d}{dt}t\left(\frac{1}{t}\frac{dh}{dt}\right),\, A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt=\int_{\tau}^{T}e^{c(T-t)}\frac{(T-t)}{t}\Phi\left(h,\frac{dw}{dt}\right)dt. \qquad (14)$$

Ввиду условий A1, A2, B1 и неравенств $\int_{\tau}^{T}t^{-2}|h|^2\,dt\le 4\int_{\tau}^{T}|dh/dt|^2\,dt,\ \int_{\tau}^{T}|h|^2\,dt\le(12)^{-1}T^4\int_{\tau}^{T}|dh/dt|^2dt$ существует постоянная $c_3>0$, что

$$\left|\int_{\tau}^{T}\left(\left[\left(\frac{d}{dt}\right)t\right]\left(\frac{1}{t}\frac{dh}{dt}\right), A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt\right|\le c_3\left(\int_{\tau}^{T}\left|\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right|^2dt\right)^{1/2}\left(\int_{\tau}^{T}\frac{1}{t^2}\left|\frac{dh}{dt}\right|^2dt\right)^{1/2}\ \forall h\in M_{\tau}. \qquad (15)$$

Это неравенство означает, что функция $A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}t^{-1}(dw/dt)$ принадлежит области определения сопряженного оператора к оператору, порожденного дифференциальным выражением $(d(tg(t)))/dt$ на функциях $g(t)=t^{-1}(dh/dt),\ h\in M_{\tau}$.

В гильбертовых пространствах слабое замыкание линейных множеств совпадает с их сильным замыканием. Применим лемму 4 из [2, с. 879] в гильбертовых пространствах $X=Y=Z=\mathcal{H}_{\tau}$ к ограниченному оператору $Su=tu$ с областью определения $D(S)=\mathcal{H}_{\tau}$ и замкнутому оператору $Pg=dg/dt$ с областью определения $D(P)=\{g\in\mathcal{H}_{\tau}: dg/dt\in\mathcal{H},\, g(\tau)=0\}$. Их сопряженные операторы $S^*=S$ и $P^*=-d/dt$ с областью определения $D(P^*)=\{v\in\mathcal{H}_{\tau}: dv/dt\in\mathcal{H}_{\tau}, v(T)=0\}$. Тогда $(P\cdot S)^*=-\overline{t(d/dt)}:\mathcal{H}_{\tau}\supset D((P\cdot S)^*)\to\mathcal{H}_{\tau}$ и тождество (14) примет вид

$$-\int_{\tau}^{T}\left(\frac{1}{t}\frac{dh}{dt},\overline{t\frac{d}{dt}}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right]\right)dt=\int_{\tau}^{T}e^{c(T-t)}\frac{(T-t)}{t}\Phi\left(h,\frac{dw}{dt}\right)dt.$$

Это тождество распространяем предельным переходом с функций $h\in M_{\tau}$ на все функции $h\in\{\mathcal{H}_{\tau}: t^{-1}(dh/dt)\in\mathcal{H}_{\tau}, h(t)=0,\ t\in[0,\tau]\}$, полагаем $h=w$ и получаем

$$-\int_{\tau}^{T}\left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt},\overline{t\frac{d}{dt}}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right]\right)dt=\int_{\tau}^{T}e^{c(T-t)}\frac{(T-t)}{t}\Phi\left(w,\frac{dw}{dt}\right)dt. \qquad (16)$$

В левой части равенства (16) интегрирование по частям по t справа налево невозможно, так как функция dw/dt не дифференцируема по t в $\mathcal{H}_{\tau}$. Поэтому снова будем использовать лемму 4 из [2] в гильбертовых пространствах $X=Y=\mathcal{H}_{\tau}$ и $Z=\mathcal{H}_{\tau}\times H$ для линейных ограниченного $S=A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}$ и замкнутого $P=\{\overline{t(d\cdot/dt)},\cdot|_{t=\tau}\}:\mathcal{H}_{\tau}\supset D(P)\to\mathcal{H}_{\tau}\times H$ операторов. Сопряженный первого оператора равен $S^*=S$. Найти сопряженный оператор для P помогает

Лемма 1. *Сопряженным к оператору* $P:\mathcal{H}_{\tau}\to\mathcal{H}_{\tau}\times H$, *действующему по правилу* $Pg=\{t(dg/dt),\ g(\tau)\}\in\mathcal{H}_{\tau}\times H$ *на функции своей области определения* $D(P)=\{g\in\mathcal{H}_{\tau}: dg/dt\in\mathcal{H}_{\tau}, g(T)=0\}$, *является оператор* $P^*:\mathcal{H}_{\tau}\times H\to\mathcal{H}_{\tau}$, *определяемый формулой* $P^*(\{k(t),\tau k(\tau)\})=-d(tk(t))/dt$, *с областью определения* $D^*=\{\{k(t),\tau k(\tau)\}\in\mathcal{H}_{\tau}\times H: d(tk(t))/dt\in\mathcal{H}_{\tau}\}$.

Для применения леммы 4 из [2] в левой части равенства (16) еще убедимся в том, что $t^{-1}(dw/dt)$ принадлежит $D((P\cdot S)^*)$, где $D((P\cdot S)^*)$ – область определения сопряженного оператора $(P\cdot S)^*$ произведения указанных только что операторов S и P. Для этого достаточно заметить, что в правой части очевидного тождества

$$\int_{\tau}^{T}\left(t\frac{d}{dt}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dh}{dt}\right],\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt=\int_{\tau}^{T}\left(A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{d^2h}{dt^2},\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt+$$

$$+\int_{\tau}^{T}\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}(T-t)e^{c(T-t)}\frac{dh}{dt},\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt-\int_{\tau}^{T}\left(A^{-1}(t)e^{c(T-t)}\frac{dh}{dt},\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt-$$

$$-c\int_{\tau}^{T}\left(A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{dh}{dt},\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt-\int_{\tau}^{T}\left(A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dh}{dt},\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right)dt\ \ \forall h\in M_{\tau}$$

первый интеграл оценивается сверху правой частью неравенства (15) и остальные интегралы – также правой частью неравенства (15) с некоторой постоянной $c_4 > 0$.

Теперь левую часть равенства (16) при почти всех $\tau \in]0,T[$ запишем в виде

$$-\int_\tau^T \left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}, \overline{t\frac{d}{dt}}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right] \right) dt - \left(t\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}, A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right)\Bigg|_{t=\tau} + \\ + \left(\frac{dw}{dt}, A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right)\Bigg|_{t=\tau} \tag{17}$$

и здесь в первых двух слагаемых воспользуемся леммой 4 из [2] и леммой 1 для указанных операторов $S = A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}$, $P = \{\overline{t(d\cdot/dt)}, \cdot|_{t=\tau}\}$ и с учетом того, что $t(d[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}t^{-1}]/dt) \times$ $\times (dw/dt) \in \mathcal{H}_\tau$, будем иметь значение сопряженного оператора

$$(P\cdot S)^*\left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right) = \overline{S^*\cdot P^*}\left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right) = \overline{-A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\left(\frac{d}{dt}t\right)}\left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right) = \\ = \left\{ -\overline{t\frac{d}{dt}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)} \right]} + t\left(\frac{d}{dt}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t} \right] \right) t \right\}\left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right). \tag{18}$$

К замыканию произведения операторов в правой части равенства (18) применим лемму 5 из [2, с. 882] для линейного ограниченного оператора $S_1 = A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}$ и линейного неограниченного оператора $P_1 = t(d/dt)$ с областью определения $D(P_1) = \{h \in \mathcal{H}_\tau : dh/dt \in \mathcal{H}_\tau, h(T) = 0\}$, допускающего замыкание $\overline{P_1} = \overline{t(d/dt)}$, и придем к равенству

$$\overline{-t\frac{d}{dt}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)} \right]}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} = -t\overline{\frac{d}{dt}}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)} \right]\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}.$$

В итоге из равенства (18) и только что полученного равенства имеем, что

$$(P\cdot S)^*\left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}\right) = -t\overline{\frac{d}{dt}}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right] + \frac{dA^{-1}(t)}{dt}(T-t)e^{c(T-t)}\frac{dw}{dt} - \\ - A^{-1}(t)e^{c(T-t)}\frac{dw}{dt} - cA^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{dw}{dt} - A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}.$$

Отсюда и из представления (17) заключим, что при почти всех $\tau \in]0,T[$

$$-2\,\mathrm{Re}\int_\tau^T \left(\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}, t\overline{\frac{d}{dt}}\left[A^{-1}(t)(T-t)e^{c(T-t)}\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right] \right) dt = \frac{(T-\tau)}{\tau}e^{c(T-\tau)}\left| A^{-1/2}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt} \right|^2 - \\ - \int_\tau^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{dw}{dt}, \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right) dt + \int_\tau^T e^{c(T-t)}\left(A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}, \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right) dt + \\ + c\int_\tau^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A^{-1}(t)\frac{dw}{dt}, \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right) dt + \int_\tau^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(A^{-1}(t)\frac{1}{t}\frac{dw}{dt}, \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right) dt. \tag{19}$$

Интегрированием по частям один раз по t найдем

$$2\,\mathrm{Re}\int_\tau^T e^{c(T-t)}\left(w, (T-t)\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right) dt = \int_\tau^T e^{c(T-t)}\left(c(T-t)\frac{1}{t}|w|^2 + \frac{1}{t}|w|^2 + (T-t)\frac{1}{t^2}|w|^2 \right) dt. \tag{20}$$

Если в обеих частях равенства (16) взять удвоенную вещественную часть, то в силу соотношений (19) и (20) получим равенство

$$\frac{(T-\tau)}{\tau}e^{c(T-\tau)}\left| A^{-1/2}(\tau)\frac{dw(\tau)}{dt} \right|^2 + \int_\tau^T e^{c(T-t)}\left| A^{-1/2}(t)\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt} \right|^2 dt = \int_\tau^T e^{c(T-t)}(T-t)\Phi_1(w,w)dt - \\ - \int_\tau^T e^{c(T-t)}\left| \frac{1}{\sqrt{t}}w \right|^2 dt - \int_\tau^T e^{c(T-t)}(T-t)\left(\left| A^{-1/2}(t)\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} \right|^2 + \left| \frac{1}{t}w \right|^2 \right) dt, \tag{21}$$

где полуторалинейная форма

$$\Phi_1(w,w) = -3\left(\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt},\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt}\right) - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{d^2A^{-1}(t)}{dt^2}\frac{1}{\sqrt{t}}w,\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt}\right) - c\left|A^{-1/2}(t)\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt}\right|^2 -$$

$$-2\,\mathrm{Re}\left(\frac{B(t)A^{-1}(t)}{t^\alpha}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt}, A(t)A^{-1}(t)\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt}\right) - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{B(t)}{t^\alpha}\frac{dA^{-1}(t)}{dt}\frac{1}{\sqrt{t}}w,\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dw}{dt}\right) - c\left|\frac{1}{\sqrt{t}}w\right|^2$$

в силу неравенств (3), (4), (6), (7) не превосходит величины $(3a_1 + a_2 + 2b_1 + b_2 - -c)\left|A^{-1/2}(t)t^{-1/2}(dw/dt)\right|^2 + (a_2 + b_2 - c)\left|t^{-1/2}w)\right|^2$, которая при $c \ge c_5 = 3a_1 + a_2 + 2b_1 + b_2$ не положительна и может быть отброшена. Поэтому из равенства (21) при $c = c_5$ следует, что $dw/dt = 0$ при почти всех $t \in]\tau, T[$ для всех $\tau \in [0,T[$ и, следовательно, $v = 0$ в $\mathcal{H}$. В теореме 2 оценка сильного решения следует из неравенства (8). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Утверждения теорем 1 и 2 справедливы и для сингулярных гиперболических дифференциально-операторных уравнений с дополнительными слагаемыми: $B_1(t)(du(t)/dt) + A_1(t)u$, если $B_1(t),\ A_1(t)A^{-1/2}(t) \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$.

5. Пример. Требованиям теорем 1, 2 и замечания 1 удовлетворяет смешанная задача

$$u_{tt} + t^{-\alpha}(b_1(x)u_x + b_0(x))u_t - (a(x)u_x)_x + b_2(x,t)u_t + a_0(x,t)u_x + a_1(x,t)u = f(x,t),\ \alpha \in]0,1];$$

$$u\big|_{x=0} = 0,\quad [u_x + \beta(t)u]\big|_{x=l} = 0,\quad t \in [0,T],\ u\big|_{t=0} = 0,\quad u_t\big|_{t=0} = 0,\quad x \in]0,l[.$$

Здесь коэффициенты $a(x) \ge a_0 > 0,\ x \in [0,l],\ b_1(0) = 0,\ b_1(l) \ge 0,\ a(x) \in C^{(1)}[0,l],\ b_i(x) \in C^{(i)}[0,l]$, $b_2(x,t),\ a_i \in C(\overline{G}),\ i = 0,1,\ \beta(t) \in C^{(2)}[0,T],\ 0 \le \beta(t) \le c_6 t^\gamma,\ \gamma \ge \alpha,\ |\beta'(t)| \le c_7 t^\mu,\ \mu \ge \alpha,\ c_6, c_7 > 0,\ t \in [0,T]$, $2b_0(x) - b_1'(x) \ge 0,\ 2\beta(t)b_0(l) + b_0'(l) \ge 0,\ a'(x)b_0'(x) + a(x)b_0''(x) \le 0,\ a(x)b_1'(x) - b_1(x)a'(x) + 2a(x)b_0(x) \ge 0$, $\{x,t\} \in \overline{G}$, $G =]0,l[\times]0,T[$.

Все эти предположения выполняются, например, для функции $a(x) = x + l,\ b_0(x) = -0{,}5x^2 + lx + 2l$, $b_1(x) = -x^2 + lx,\quad l > 0,\ \beta(t) = c_8 t^\gamma,\ c_8 > 0,\ \gamma \ge \alpha + 1$.

Работа поддержана БРФФИ (проект № Ф09К-019).

1. Гаврилова Н.В. // Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Мн., 1982. 14 с.
2. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 873.
3. Ломовцев Ф.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 1. С. 34.
4. Ломовцев Ф.Е. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 2. С. 276.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
6. Ходос С.П. // Сборник работ 63-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ: в 3 ч. Мн., 2006. Ч. 1. С. 58.

Поступила в редакцию 27.02.09.

Светлана Петровна Ходос – аспирант кафедры уравнений математической физики. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор Ф.Е. Ломовцев.