

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ АВТОРЕГРЕССИИ С УСТОЙЧИВЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Н. Н. Труш, Л. Э. Гаджиева

Белорусский государственный университет

Минск, Беларусь

E-mail: TroushNN@bsu.by

В настоящее время класс устойчивых распределений, в состав которого входят нормальное распределение, распределение Коши и распределение Леви, имеющие явный вид плотностей распределения, является важнейшим в теории вероятностей и математической статистике, теории случайных процессов. Во-первых, это связано с появлением многочисленных практических задач при исследовании различных экономических и финансовых моделей. Во-вторых, если в случае нормального распределения имеются только два параметра, то в случае устойчивых распределений общего вида появляется четыре параметра и поэтому возникает больше возможностей точнее подобрать эмпирическое распределение для исследуемых данных. Кроме того, устойчивые законы – это предельные распределения нормированных сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин, при условии существования этих распределений.

Для того, чтобы случайная величина ξ была α -устойчивой необходимо и достаточно, чтобы её характеристическая функция $\Phi_\xi(t)$ допускала представление

$$\ln \Phi_\xi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}) + i\mu, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma^\alpha |t| (1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t) \ln |t|) + i\mu, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$ и $\mu \in \mathbb{R}$ (в этом случае пишут $\xi \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$).

Данная параметризация, называемая канонической, приведена согласно [1], [2], [3] и является наиболее употребляемой в настоящее время. Известно (см. [1]), что устойчивая случайная величина принадлежит классу симметричных α -устойчивых, если $\mu = 0$ и $\beta = 0$. Из (1) следует, что характеристическая функция симметричной α -устойчивой случайной величины ($\xi \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$) имеет вид

$$\Phi_\xi(t) = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть $X_t, t \in \mathbb{Z}$ – α -устойчивый стационарный случайный процесс, $0 < \alpha \leq 2$. Если $\alpha = 2$, то $X_t, t \in \mathbb{Z}$, гауссовский случайный процесс и его ковариационная функция является мерой зависимости для значений этого процесса. Если $0 < \alpha < 2$, то ковариационная функция не существует и в этом случае целесообразно ввести другие меры зависимости. Известны следующие функции, выступающие в качестве мер зависимости стационарного случайного процесса $X_t, t \in \mathbb{Z}$ (см. [2], [3]).

1. Кодифференциал $C'D(n)$, определенный для $\alpha \in (0, 2]$ – это функция вида

$$CD(n) = CD(X_n, X_0) = \ln E \exp\{i(X_n - X_0)\} - \\ - \ln E \exp\{iX_n\} - \ln E \exp\{-iX_0\}, n \in Z.$$

2. Ковариационная форма $CV(n)$, определенная для $\alpha \in (1,2)$ - это функция вида

$$CV(n) = CV(X_n, X_0) = \int_{S_1} s_1 \cdot s_2^{<\alpha-1>} \Gamma(ds),$$

где $\Gamma(\cdot)$ - спектральная мера на единичной окружности S_2

$$s = (s_1, s_2), s_2^{<\alpha-1>} = |s_2|^{\alpha-2} s_2, n \in Z.$$

3. Динамическая функция $DF(n)$ определенная для $\alpha \in (0,2]$ - это функция вида

$$DF(n) = DF(X_n, X_0) = E \exp\{i(X_n - X_0)\}, n \in Z.$$

МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА AP(2)

Рассмотрим процесс авторегрессии второго порядка (AP(2))

$$X_n - b_1 X_{n-1} - b_2 X_{n-2} = \varepsilon_n, \quad (2)$$

где $\xi_n \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0), n=1,2,\dots$, - независимые случайные величины, а b_1, b_2 - параметры модели. Предполагается, что полином $B(z) = 1 - b_1 z - b_2 z^2$ не имеет корней внутри единичного круга $\{z : |z| \leq 1\}$, то есть выполняется условие стационарности. Исследуем задачу построения статистических оценок для коэффициентов авторегрессии b_1, b_2 .

Рассмотрим

$$\begin{cases} CD(1) = \ln E \exp\{i(X_1 - X_0)\} - \ln E \exp\{iX_1\} - \ln E \exp\{iX_0\}, \\ CD(2) = \ln E \exp\{i(X_2 - X_0)\} - \ln E \exp\{iX_2\} - \ln E \exp\{iX_0\}. \end{cases} \quad (3)$$

Определим распределение случайных величин $X_1 - X_0, X_2 - X_0, X_2, X_1, X_0$. Для этого воспользуемся следующим свойством устойчивых законов распределения.

Если Z_1, Z_2 - независимые α -устойчивые случайные величины, $Z_i \sim S_\alpha(\sigma_i, 0, 0), i=1,2,\dots$ и $a, b \geq 0$ - const, то

$$aZ_1 + bZ_2 \sim S_\alpha((a\sigma_1)^\alpha + (b\sigma_2)^\alpha)^{1/\alpha}, 0, 0. \quad (4)$$

Тогда $X_0 = \varepsilon_0 \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$. Так как $E \exp\{iX_0\} = \phi_{X_0}(1)$ - характеристическая функция случайной величины X_0 , то с учетом распределения X_0 и вида характеристической функции симметричной устойчивой случайной величины можем записать

$$E \exp\{iX_0\} = \exp(-\sigma^\alpha). \quad (5)$$

С учетом вида процесса авторегрессии (2) и свойства (4) имеем, что

$$X_1 = b_1 X_0 + \varepsilon_1 = b_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \sim S_\alpha(\sigma(b_1^\alpha + 1)^{1/\alpha}, 0, 0).$$

Как и в случае с X_0

$$E \exp\{iX_1\} = \phi_{X_1}(1) = \exp(-\sigma^\alpha(b_1^\alpha + (b_1^2 + b_2)^\alpha + 1)). \quad (6)$$

$$X_2 = b_1 X_1 + b_2 X_0 + \varepsilon_2 = (b_1^2 + b_2) \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sim S_\alpha(\sigma(b_1^\alpha + (b_1^2 + b_2)^\alpha + 1)^{1/\alpha}, 0, 0).$$

$$E \exp\{iX_2\} = \phi_{X_2}(1) = \exp(-\sigma^\alpha(b_1^\alpha + (b_1^2 + b_2)^\alpha + 1)). \quad (7)$$

$$X_1 - X_0 = b_1 X_0 + \varepsilon_1 - X_0 = b_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + (b_1 - 1) \varepsilon_0 \sim S_\alpha(\sigma(1 + (b_1 - 1)^\alpha)^{1/\alpha}, 0, 0).$$

$$E \exp\{i(X_1 - X_0)\} = \varphi_{X_1 - X_0}(1) = \exp\{-\sigma^\alpha(1 + (b_1 - 1)^\alpha)\}. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} X_2 - X_0 &= b_1 X_1 + b_2 X_0 + \varepsilon_2 - X_0 = b_1 X_1 + (b_2 - 1) X_0 + \varepsilon_2 = b_1(b_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1) + (b_2 - 1) \varepsilon_0 + \varepsilon_2 = \\ &= b_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (b_1^2 + b_2 - 1) \varepsilon_0 \sim S_\alpha(\sigma(b_1^\alpha + 1 + (b_1^2 + b_2 - 1)^\alpha)^{1/\alpha}, 0, 0) \end{aligned}$$

$$E \exp\{i(X_2 - X_0)\} = \varphi_{X_2 - X_0}(1) = \exp\{-\sigma^\alpha(b_1^\alpha 1 + (b_1^2 + b_2 - 1)^\alpha)\}. \quad (9)$$

Подставим полученные выражения в формулу (3). Получим

$$\begin{cases} CD(1) = \ln E \exp\{i(X_1 - X_0)\} - \ln E \exp\{iX_1\} - \ln E \exp\{iX_0\} = \\ = \ln E \exp\{i(\varepsilon_1 + (b_1 - 1) \varepsilon_0)\} - \ln E \exp\{i(b_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1)\} - \ln E \exp\{i\varepsilon_0\}, \\ CD(2) = \ln E \exp\{i(X_2 - X_0)\} - \ln E \exp\{iX_2\} - \ln E \exp\{iX_0\} = \\ = \ln E \exp\{i(b_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (b_1^2 + b_2 - 1) \varepsilon_0)\} - \ln E \exp\{i((b_1^2 + b_2) \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\} - \ln E \exp\{i\varepsilon_0\}. \end{cases}$$

С учетом формул (5), (6), (7), (8), (9) для характеристической функции устойчивого распределения получаем теоретические значения для $CD(1)$ и $CD(2)$.

$$\begin{cases} CD(1) = -\sigma^\alpha((b_1 - 1)^\alpha + 1) + \sigma^\alpha(b_1^\alpha + 1) + \sigma^\alpha = \sigma^\alpha(-(b_1 - 1)^\alpha + b_1^\alpha + 1), \\ CD(2) = -\sigma^\alpha(b_1^\alpha + (b_1^2 + b_2 - 1)^\alpha + 1) + \sigma^\alpha(b_1^\alpha + (b_1^2 + b_2)^\alpha + 1) + \sigma^\alpha = \\ = \sigma^\alpha((b_1^2 + b_2)^\alpha - (b_1^2 + b_2 - 1)^\alpha + 1). \end{cases} \quad (10)$$

Пусть x_0, x_1, \dots, x_n - конечная выборка наблюдений за случайным процессом $X_t, t \in Z$. Тогда в качестве статистических оценок для $CD(1)$ и $CD(2)$ можно рассмотреть следующие статистики

$$\hat{CD}(1) = \ln\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\{i(x_{k+1} - x_k)\}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \exp\{ix_k\}\right), \quad (11)$$

$$\hat{CD}(2) = \ln\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \exp\{i(x_{k+2} - x_k)\}\right) - 2 \ln\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \exp\{ix_k\}\right). \quad (12)$$

Заменив теоретические значения $CD(1)$ и $CD(2)$ в (10) их статистическими оценками (11), (12), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sigma^\alpha(-b_1 - 1)^\alpha + b_1^\alpha + 1 = \hat{CD}(1) \\ \sigma^\alpha((b_1^2 + b_2)^\alpha - (b_1^2 + b_2 - 1)^\alpha + 1) = \hat{CD}(2). \end{cases} \quad (13)$$

Численно решая (13) относительно b_1 и b_2 получим статистические оценки параметров авторегрессии второго порядка (2).

МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА АР(3)

Рассмотрим процесс авторегрессии третьего порядка

$$X_n - b_1 X_{n-1} - b_2 X_{n-2} - b_3 X_{n-3} = \varepsilon_n, \quad (14)$$

где $\xi_n \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0), n=1, 2, \dots$ - независимые, симметричные α -устойчивые случайные величины. Процесс является стационарным, то есть полином $B(z) = 1 - b_1 z - b_2 z^2 - b_3 z^3$ не

(8) имеет корней внутри единичного круга $\{z : |z| \leq 1\}$. Используя результаты полученные для модели $AP(2)$, построим статистические оценки для коэффициентов авторегрессии b_1, b_2, b_3 .

(9) Рассмотрим

$$\begin{cases} CD(1) = \ln E \exp\{i(X_1 - X_0)\} - \ln E \exp\{iX_1\} - \ln E \exp\{iX_0\}, \\ CD(2) = \ln E \exp\{i(X_2 - X_0)\} - \ln E \exp\{iX_2\} - \ln E \exp\{iX_0\}, \\ CD(3) = \ln E \exp\{i(X_3 - X_0)\} - \ln E \exp\{iX_3\} - \ln E \exp\{iX_0\}. \end{cases} \quad (15)$$

Так как $X_{-1} = X_{-2} = 0$, тогда с учетом вида (14) процесса $AP(3)$

$$X_n = \varepsilon_n, X_1 = b_1 X_0 + \varepsilon_1 = b_1 \varepsilon_0 + \varepsilon_1,$$

$$X_2 = b_1 X_1 + b_2 X_0 + \varepsilon_2 = (b_1^2 + b_2) \varepsilon_0 + b_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Найдем распределение $X_3, X_3 - X_0$ с помощью вида (14) процесса $AP(3)$ и свойства (4) устойчивых случайных величин.

$$\begin{aligned} X_3 &= b_1 X_2 + b_2 X_1 + b_3 X_0 + \varepsilon_3 = b_1(b_1 X_1 + b_2 X_0 + \varepsilon_2) + b_2(b_1 X_0 + \varepsilon_1) + b_3 \varepsilon_0 + \varepsilon_3 = \\ &= (b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3) \varepsilon_0 + (b_1^2 + b_2) \varepsilon_1 + b_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \sim S_\alpha(\sigma((b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3)^\alpha + (b_1^2 + b_2)^\alpha + b_1^\alpha + 1)^{1/\alpha}, 0, 0). \\ X_3 - X_0 &= (b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3 - 1) \varepsilon_0 + (b_1^2 + b_2) \varepsilon_1 + b_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \sim S_\alpha(\sigma((b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3 - 1)^\alpha + (b_1^2 + b_2)^\alpha + b_1^\alpha + 1)^{1/\alpha}, 0, 0). \end{aligned}$$

Тогда теоретические значения $CD(1), CD(2), CD(3)$ имеют следующий вид

$$\begin{cases} CD(1) = \sigma^\alpha(-(b_1 - 1)^\alpha + b_1^\alpha + 1), \\ CD(2) = \sigma^\alpha((b_1^2 + b_2)^\alpha - (b_1^2 + b_2 - 1)^\alpha + 1), \\ CD(3) = \sigma^\alpha((b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3)^\alpha - (b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3 - 1)^\alpha + 1). \end{cases} \quad (16)$$

В качестве статистических оценок для $CD(1)$ и $CD(2)$ можно рассмотреть предложенные (11), (12) а для $CD(3)$ по аналогии построить ее оценку.

$$\hat{CD}(3) = \ln \left(\frac{1}{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} \exp\{i(x_{k+3} - x_k)\} \right) - 2 \ln \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \exp\{ix_k\} \right). \quad (17)$$

Заменив теоретические значения $CD(1), CD(2)$ и $CD(3)$ в (16) их статистическими оценками (11), (12) и (17) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sigma^\alpha(-(b_1 - 1)^\alpha + b_1^\alpha + 1) = \hat{CD}(1), \\ \sigma^\alpha((b_1^2 + b_2)^\alpha - (b_1^2 + b_2 - 1)^\alpha + 1) = \hat{CD}(2), \\ \sigma^\alpha((b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3)^\alpha - (b_1^3 + 2b_1 b_2 + b_3 - 1)^\alpha + 1) = \hat{CD}(3). \end{cases} \quad (18)$$

Решая (18) относительно b_1, b_2 и b_3 получим статистические оценки параметров авторегрессии третьего порядка (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Janicki, A. Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym / A.Janicki, A.Izydorczyk.WNT, Warszawa. 2001.
2. Nowicka, J. Dependence structure of stable R-GARCH processes / J.Nowicka and A.Weron. The Hugo Steinhaus Center for Stochastic Methods, Technical University of Wroclaw. 1999.
3. Nowicka, J. Measures of Dependence for ARMA Models with Stable Innovations / J.Nowicka and A.Weron. Universitatis Marie Curie-Sklodowska Lublin-Polonia. 1997.