ДВА КРИТЕРИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СЛОЖНОЙ ГИПОТЕЗЫ О ПАРАМЕТРАХ БИНАРНОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

А. Л. Костевич, А. С. Шмуратко

Научно-исследовательский институт
прикладных проблем математики и информатики БГУ
Минск, Беларусь
E-mail: shmuratko@bsu.by

Для бинарной последовательности рассматривается сложная нулевая гипотеза, соответствующая «небольшому» отклонению последовательности от модели независимых симметричных испытаний Бернулли и описываемая стационарной цепью Маркова первого порядка (с двумя параметрами). В работе предлагаются два критерия для проверки параметров указанной цепи Маркова. Исследуются свойства предложенных критериев как при нулевой гипотезе, так и в определенном классе альтернатив.

Ключевые слова: бинарная цепь Маркова, сложная гипотеза.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется выходная последовательность некоторого источника бинарных данных:

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \qquad X_t \in \{0, 1\}. \tag{1}$$

Для применения в области защиты информации, имитационного моделирования и т.п. этот источник стремятся сделать таким, чтобы порождаемая им последовательность была «как можно ближе» к чисто случайной, т.е. к последовательности независимых, равномерно распределенных на множестве $\{0, 1\}$ величин. Свойства источника в этом случае исключают явно «большие» отклонения порождаемой последовательности от чисто случайной; остаются, таким образом, «небольшие» отклонения. По своему типу это могут быть отклонения как от независимости, так и от равномерности. В результате совокупность наших предположений относительно последовательности (1) можно сформулировать следующим образом [1]:

1) зависимость между битами последовательности (1) ограничивается тем, что очередной бит зависит не от всех предыдущих, а только от последнего бита;
2) распределение каждого бита близко к равномерному;
3) кроме того, будем предполагать, что средние характеристики выходной последовательности источника (математическое среднее, ковариация на фиксированном лаге) не меняются во времени.

Сформулированные предположения приводят нас к следующей математической модели последовательности (1): $X_1, X_2, \dots, X_n$ – стационарная цепь Маркова первого порядка со стационарным распределением π и матрицей вероятностей одношаговых переходов P следующего вида:

$$\mathbf{M:} \qquad \pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \varepsilon & \frac{1}{2} + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} + \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2} + \varepsilon_1 & \frac{1}{2} - \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

В силу стационарности величины ε, ε_0 и ε_1 оказываются связанными следующим соотношением:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1}.$$

Таким образом, модель M однозначно определяется двумя параметрами: ε_0 и ε_1.

Из сказанного выше следует, что относительно последовательности (1), в предположении, что для неё справедлива модель M, нам нужно проверить нулевую гипотезу о «небольших» отклонениях, то есть гипотезу вида:

$$H_0 : |\varepsilon_0| \le \varepsilon_*, \ |\varepsilon_1| \le \varepsilon_*, \qquad (2)$$

где границу ε_* будем считать заданной. Требуется построить набор критериев для проверки гипотезы H_0 против разумно выбранной альтернативной гипотезы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Прежде всего, зададимся вопросом: какие критерии выбрать? Для этого заметим, что в модели M можно выделить два «крайних» случая, при которых достигается граница $\left(|\varepsilon_0| = |\varepsilon_1| = \varepsilon_*\right)$ нулевой гипотезы. Эти два случая соответствуют двум вышеупомянутым типам отклонений от модели чистой случайности и описываются следующими частными случаями модели M:

$$\mathbf{M_1:} \ \pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{M_2:} \ \pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Теперь заметим, что если бы вместо модели M имела место более простая модель M_1, то для проверки нулевой гипотезы вида $\left|p - \frac{1}{2}\right| \le \varepsilon_*$ против альтернативы $\left|p - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon_*$ равномерно наиболее мощный несмещенный критерий – это критерий знаков (или монобит), основанный на количестве единиц в последовательности (1). Если же принять модель M_2, то для проверки той же нулевой гипотезы против той же альтернативы равномерно наиболее мощный несмещенный критерий – это критерий знакоперемен, основанный на количестве перемен знака (вида 01 илл 10) в последовательности (1).

По этой причине два указанных критерия и были нами включены в предлагаемый набор критериев для проверки нулевой гипотезы H_0 вида (2). В качестве альтернативы пока будем рассматривать альтернативу общего вида: $H_1 = \overline{H_0}$. Функцию мощности критерия при фиксированной гипотезе $H = H(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ будем обозначать через $\beta(H)$ либо $\beta(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$.

Приведем описание критериев и их свойства как при нулевой гипотезе H_0, так и для определенного класса альтернатив.

1. Критерий знаков.

Критерий основан на количестве единиц в последовательности (1). Статистика критерия

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Критерий знаков имеет вид:

$$\text{принимается } \begin{cases} H_0 : \text{ если } \Delta \le S_n \le n - \Delta; \\ H_1 : \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Порог Δ равен

$$\Delta = \left\lceil n\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_*\right) - q\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{4} - \varepsilon_*^2} \right\rceil .$$

Здесь $\lceil\cdot\rceil$ – целая часть числа сверху, $q = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ – квантиль стандартного нормального распределения, α – требуемый уровень значимости критерия.

Теорема 1 даёт уровень значимости критерия, теорема 2 – поведение функции мощности критерия в различных областях значений параметров ε_0 и ε_1.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

$$\varepsilon_* < \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \sqrt{n} > q\frac{1 + 4\varepsilon_*^2}{\sqrt{1 - 4\varepsilon_*^2}} .$$

Тогда уровень значимости критерия знаков лежит в интервале $\left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$:

$$\sup_{H \in H_0} \beta(H) \in \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$$

(с точностью до используемой в расчетах нормальной апроксимации).

Замечание 1. Условия теоремы 1 не являются ограничительными для приложений.

Замечание 2. При $\varepsilon_* = 0$ (модель чистой случайности) уровень значимости критерия знаков равен α. При $\varepsilon_* \ne 0$ можно ожидать, что с ростом n уровень значимости приближается к $\alpha/2$.

Теорема 2. Пусть имеет место гипотеза $H = H(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \in M$. Тогда справедливы следующие асимптотические свойства критерия знаков.

1) Если $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, то для любого $\delta>0$ существует такое N, что для всех $n \ge N$

$$\beta(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \le e^{-n\left(\ln\frac{1}{1-a} - \delta\right)} .$$

2) Если $|\varepsilon| > \varepsilon_*$, то для любого $\varepsilon_*' \in (\varepsilon_*, |\varepsilon|)$ и любого $\delta>0$ существует такое N, что для всех $n \ge N$

$$1 - \beta(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \le e^{-n\left(\ln\frac{1}{1-a'} - \delta\right)} .$$

Здесь

$$a = a(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_*) = \left(\sqrt{(0.5+\varepsilon_*)(0.5+\varepsilon_{\min})} - \sqrt{(0.5-\varepsilon_*)(0.5+\varepsilon_{\max})}\right)^2,$$
$$a' = a(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon'_*), \qquad \varepsilon_{\min} = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}, \qquad \varepsilon_{\max} = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}.$$

2. Критерий знакоперемен.

Для того чтобы исследовать только зависимость между соседними символами, для критерия знакоперемен вместо двухпараметрической модели M мы рассматриваем более узкую – однопараметрическую – модель M_2, приведенную выше. В случае двухпараметрической модели M расчет параметров критерия знакоперемен является затруднительным.

Для удобства и единообразия будем вместо вероятности p в определении модели M_2 использовать отклонение ε вероятности p от 0.5: $p = 0.5 + \varepsilon$. Таким образом, модель M_2 определяется одним параметром – ε. Нулевая гипотеза в этом случае будет иметь вид: $H'_0 : |\varepsilon| \le \varepsilon_*$, альтернатива: $H'_1 : |\varepsilon| > \varepsilon_*$. Мы используем штрих, чтобы указать на то, что рассматривается более узкая модель.

Критерий знакоперемен основан на количестве перемен знака в последовательности (1). *Переменой знака* называется всякая перемена значения в последовательности бит: с 0 на 1 или обратно, с 1 на 0. Статистика критерия

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} I(X_i \ne X_{i+1}).$$

Заметим, что S_n в рамках модели M_2 имеет биномиальное распределение с параметрами $(n-1, 0.5+\varepsilon)$. Отсюда естественным образом получается структура критерия и все его свойства как при H'_0, так и при H'_1.

Итак, критерий знакоперемен имеет вид:

$$\text{принимается} \begin{cases} H'_0 : \textit{если}\, \Delta \le S_n \le n-1-\Delta; \\ H'_1 : \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Порог Δ равен

$$\Delta = \max\left\{ d \in N : \Phi\left(\frac{d-m_1}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{d-m_2}{\sigma}\right) \le \alpha \right\}. \qquad (3)$$

Здесь α – требуемый уровень значимости критерия,

$$m_1 = (n-1)\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_*\right), \qquad m_2 = (n-1)\left(\frac{1}{2}-\varepsilon_*\right), \qquad \sigma = \sqrt{n-1}\sqrt{\frac{1}{4}-\varepsilon_*^2}.$$

Отметим, что время нахождения порога из соотношения (3) имеет порядок $O(\log_2 n)$. Можно было бы использовать точное (биномиальное) распределение для нахождения порога Δ, однако нам будет удобнее оперировать соотношением (3).

Две следующие теоремы аналогичны теоремам 1 и 2.

Теорема 3. Критерий знакоперемен имеет уровень значимости α:

$$\sup_{H \in H'_0} \beta(H) \le \alpha$$

(с точностью до используемой в расчетах нормальной апроксимации).

Теорема 4. Функция мощности $\beta(\varepsilon)$ критерия имеет минимум в точке $\varepsilon = 0$ и монотонно возрастает с ростом $|\varepsilon|$. Кроме того, справедливы следующие неравенства:

1) Если $|\varepsilon| < \varepsilon_*$, то при $n \to \infty$

$$\beta(\varepsilon) \le e^{-2n\left((\varepsilon_* - |\varepsilon|)^2 + O(n^{-1/2})\right)}.$$

2) Если $|\varepsilon| > \varepsilon_*$, то при $n \to \infty$

$$1 - \beta(\varepsilon) \le e^{-2n\left((\varepsilon_* - |\varepsilon|)^2 + O(n^{-1/2})\right)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство теоремы 1. Пусть имеет место гипотеза $H \in H_0$. Согласно центральной предельной теореме для цепи Маркова [2, теорема 19.1.1] нормированная статистика S_n имеет асимптотическое стандартное нормальное распределение:

$$\frac{S_n - \sum_{i=1}^{n} EX_i}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \qquad n \to \infty.$$

Здесь $EX_i = 0.5 + \varepsilon$ и

$$\sigma^2 = DX_1 + 2\sum_{i \ge 1} \operatorname{cov}(X_1, X_{i+1}) = \frac{1}{4}\frac{(1+2\varepsilon_0)(1+2\varepsilon_1)(1-\varepsilon_0-\varepsilon_1)}{(1+\varepsilon_0+\varepsilon_1)^3}.$$

Тогда уровень значимости критерия знаков можно представить в следующем виде:

$$\beta(H) = P(S_n < \Delta) + P(S_n > n - \Delta) \approx \Phi\left(\frac{\Delta - n(0.5+\varepsilon)}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \Phi\left(\frac{\Delta - n(0.5-\varepsilon)}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Найти супремум $\beta(H)$ по всем $H \in H_0$ оказывается трудно, поэтому мы воспользуемся очевидной оценкой сверху:

$$\sup_{H \in H_0} \beta(H) \le \sup_{H \in H_0} \Phi\left(\frac{\Delta - n(0.5+\varepsilon)}{\sigma\sqrt{n}}\right) + \sup_{H \in H_0} \Phi\left(\frac{\Delta - n(0.5-\varepsilon)}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Использование этой оценки, к сожалению, может снизить действительный размер критерия до $\alpha/2$, что и отражено в формулировке теоремы. Далее, поскольку каждой гипотезе $H = H(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \in H_0$ можно поставить в соответствие гипотезу $H' = H(\varepsilon_1, \varepsilon_0) \in H_0$ и при этом величинам ε и σ из H будут соответствовать величины $-\varepsilon$ и σ из H', получаем, что супремумы в последнем выражении равны между собой. Так что порог Δ можно искать из соотношения:

$$2\sup_{H \in H_0} \Phi\left(\frac{\Delta - n(0.5-\varepsilon)}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \alpha,$$

которое равносильно следующему:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n}\sup_{H \in H_0}\left(2\varepsilon\sqrt{n} + 2q\sigma\right)\right). \tag{4}$$

Лемма 1. Пусть выполнено первое из условий теоремы 1. Тогда функция $\sigma = \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ убывает по ε_0 и по ε_1, а функция $\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ возрастает по ε_0 и убывает по ε_1.

Доказательство леммы получается взятием производных.

Из леммы 1 следует, что нужно положить $\varepsilon_1 = -\varepsilon_*$, что в дальнейшем мы и считаем выполненным. Тогда задача сводится к максимизации функции одной переменной. Введем для этой функции отдельное обозначение:

$$f(x) = \sqrt{n}\,\frac{x+\varepsilon_*}{1+x-\varepsilon_*} + q\sqrt{\frac{(1+2x)(1-2\varepsilon_*)(1-x+\varepsilon_*)}{(1+x-\varepsilon_*)^3}}\,.$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда функция $f(x)$ является возрастающей на отрезке $-\varepsilon_* \le x \le \varepsilon_*$.

Доказательство леммы 2 носит технический характер и поэтому здесь опускается. (Доказательство основано на последовательном взятии и изучении производных $f(x)$.)

Из леммы 2 следует, что

$$\sup_{|x|\le\varepsilon_*} f(x) = f(\varepsilon_*) = 2\varepsilon_*\sqrt{n} + q\sqrt{1-4\varepsilon_*^2}\,.$$

Подставляя это в соотношение (4), получаем искомый порог Δ. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся теорией больших уклонений для цепи Маркова [3, глава IV].

Вначале рассмотрим случай, когда $|\varepsilon| < \varepsilon_*$. Используя определение порога Δ, имеем следующую оценку для функции мощности:

$$\beta(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \le P\big(S_n \le n(0.5-\varepsilon_*)\big) + P\big(S_n \ge n(0.5+\varepsilon_*)\big) = P\big(L_n \in \widetilde{A}\big).$$

Здесь

$$L_n = \big(L_n(0), L_n(1)\big) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i = 0),\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i = 1)\right) -$$

эмпирическое распределение выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а множество $\widetilde{A}$ имеет вид:

$$\widetilde{A} = \{(1-p, p) : p \le 0.5-\varepsilon_* \text{ или } p \ge 0.5+\varepsilon_*\}.$$

Вместо двумерного множества $\widetilde{A}$, которое описывается одним параметром p, нам будет удобнее оперировать соответствующим одномерным множеством

$$A = \{p : p \le 0.5-\varepsilon_* \text{ или } p \ge 0.5+\varepsilon_*\}.$$

Основным инструментом доказательства теоремы 2 служит следующая теорема.

Теорема 5 [3, теоремы IV.6, IV.7]. Пусть имеется стационарная бинарная цепь Маркова, описываемая моделью M. И пусть $\widetilde{S}$ – произвольное замкнутое подмножество множества $\{(1-p, p) : p \in [0, 1]\}$. Тогда для вероятности больших уклонений справедливо следующее неравенство:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P\big(L_n \in \widetilde{S}\big) \le -I(\widetilde{S}),$$

где *функция скорости* $I(\widetilde{S})$ имеет вид:

$$I(\widetilde{S}) = I(S) = \inf_{p\in S}\sup_{x>0}\left(-(1-p)\ln\left(1+p_{01}\left(\frac{1}{x}-1\right)\right) - p\ln\big(1+p_{10}(x-1)\big)\right) = \inf_{p\in S}\sup_{x>0} f(p,x).$$

Здесь для краткости мы обозначили через p_{ij} элементы матрицы переходных вероятностей: $p_{ij} = P\big(X_{t+1} = j \mid X_t = i\big)$. Через S обозначено, как и ранее, сокращение двумерного множества $\widetilde{S}$ до одномерного: $p \in S \Leftrightarrow (1-p, p) \in \widetilde{S}$.

Таким образом, нам остается оценить сверху величину $-I(A)$. Используя неравенство $(1-p)(-\ln x)+p(-\ln y)\ge -\ln\big((1-p)x+py\big)$ (для $x,y>0$, $p\in[0,1]$), имеем:

$$f(p,x)\ge -\ln\left((1-p)(1+p_{01}(\frac{1}{x}-1))+p(1+p_{10}(x-1))\right)=-\ln f_1(p,x).$$

Поэтому

$$I(A)=\inf_{p\in A}\sup_{x>0} f(p,x)\ge -\ln\sup_{p\in A}\inf_{x>0} f_1(p,x).$$

Нетрудно показать, что $\inf\limits_{x>0} f_1(p,x)=1-\left(\sqrt{(1-p)p_{01}}-\sqrt{p_{10}p}\right)^2=f_1(p)$ и, далее, что при $|\varepsilon|<\varepsilon_*$ $\sup\limits_{p\in A} f_1(p)=\max\{f_1(0.5-\varepsilon_*),\ f_1(0.5+\varepsilon_*)\}=1-a$, где величина a определена в формулировке теоремы 2. Отсюда получаем первое утверждение теоремы.

Случай $|\varepsilon|>\varepsilon_*$ рассматривается аналогично. Выберем произвольное $\varepsilon'_*\in(\varepsilon_*,|\varepsilon|)$. Тогда для достаточно больших n имеем оценки:

$$1-\beta(\varepsilon_0,\varepsilon_1)\le P\big(n(0.5-\varepsilon'_*)\le S_n\le n(0.5+\varepsilon'_*)\big)=P\big(L_n\in\widetilde{B}\big).$$

Здесь $B=[0.5-\varepsilon'_*,\ 0.5+\varepsilon'_*]$. В случае $|\varepsilon|>\varepsilon_*$ получаем, что $\sup\limits_{p\in B} f_1(p)=\max\{f_1(0.5-\varepsilon'_*),\ f_1(0.5+\varepsilon'_*)\}=1-a'$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3 следует из того, что в рамках модели M_2 статистика S_n имеет биномиальное распределение с параметрами $(n-1,\ 0.5+\varepsilon)$. Поэтому супремум $\beta(H)$ по всем $H\in H'_0$ достигается при $\varepsilon=\pm\varepsilon_*$ и равен (после использования нормальной апроксимации)

$$\beta(\varepsilon_*)\approx\Phi\left(\frac{\Delta-m_1}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{\Delta-m_2}{\sigma}\right).$$

(Определения величин m_1, m_2 и σ см. выше в описании критерия знакоперемен.) Отсюда получаем соотношение (3) для порога Δ критерия. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Свойство монотонности функции $\beta(\varepsilon)$ следует из свойств биномиального распределения. Как известно, для биномиальных (с параметрами (n,p)) вероятностей справедливо следующее представление через функцию бета-распределения:

$$P\big(S_n\ge\Delta\big)=I_p(\Delta,\ n-\Delta+1)=\frac{1}{B(\Delta,\ n-\Delta+1)}\int_0^p x^{\Delta-1}(1-x)^{n-\Delta}\,dx,$$

где $B(\Delta,\ n-\Delta+1)=\int_0^1 x^{\Delta-1}(1-x)^{n-\Delta}\,dx$. Выражая функцию мощности $\beta(\varepsilon)$ через интегралы I_p и исследуя производную $\beta(\varepsilon)$, получим искомую монотонность.

Пусть $|\varepsilon|<\varepsilon_*$. Для оценки вероятностей больших уклонений биномиального распределения воспользуемся неравенством, полученным Хёфдингом, которое мы цитируем по книге [4] (см. неравенство 8 на с.76). Если $X_1,X_2,\dots,X_n$ – независимые бинарные случайные величины, то для любого $x>0$

$$P\big(S_n-ES_n\ge nx\big)\le e^{-2nx^2}.$$

Поэтому для $\beta(\varepsilon)$ получим следующую оценку:

$$\beta(\varepsilon) \le e^{-2nx^2} + e^{-2ny^2}, \qquad (5)$$

где $x = \dfrac{\Delta - m + 1}{n}$ и $y = \dfrac{n - \Delta - m}{n}$, а $m = (n-1)(0.5+\varepsilon)$.

Из определения порога Δ (3) можно получить следующие границы для Δ:

$$m_2 - q_2\sigma \le \Delta \le m_2 - q_1\sigma,$$

где квантили $q_1 = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, $q_2 = \Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Подставляя верхнюю оценку для Δ в x и y (заметим, что $x < 0$, $y > 0$), из (5) получим первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $\varepsilon > \varepsilon_*$. Имеем: $1 - \beta(\varepsilon) \le P(S_n \le n - 1 - \Delta)$. Применяя неравенство Хёфдинга и, далее, нижнюю оценку для Δ, получим часть второго утверждения теоремы.

Совершенно аналогично рассматривается случай, когда $\varepsilon < -\varepsilon_*$.

Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Application Notes and Interpretation of the Scheme 31: Functionality classes and evaluation methodology for physical random number generators. AIS 31, Version 3.1. Bundesamt für Sicherheit in der Informationstechnik (BSI). Bonn, Germany, 25 Sept. 2001. 38 p.

2. *Ибрагимов, И. А.* Независимые и стационарно связанные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник. М.: Наука, 1965. 524 с.

3. *Hollander, F. den.* Large deviations / F. den Hollander. American Mathematical Society, 2000. 142 p.

4. *Петров, В.В.* Суммы независимых случайных величин / В.В. Петров М.: Наука. 1972. 416 с.