КОМПЬЮТЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ОТКРЫТЫХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С ПОМОЩЬЮ РЕКУРРЕНТНОГО ПО МОМЕНТАМ ВРЕМЕНИ MVA-МЕТОДА

Е. В. Колузаева

Гродненский государственный университет имения Я. Купалы
Гродно. Беларусь
E-mail: koluzaeva@gmail.com

В статье рассмотрено применение рекуррентного по моментам времени метода анализа средних значений открытых сетей массового обслуживания (МО) для решения задачи нахождения оптимального числа линий обслуживания в каждой из систем сети.

Ключевые слова: открытая сеть массового обслуживания, рекуррентный по моментам времени метод

ОПИСАНИЕ РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА

Рассмотрим открытую сеть МО, состоящую из n систем обслуживания (СМО) $S_1, S_2, ..., S_n$. Для унификации введем СМО S_0, соответствующую внешней среде. Дисциплины обслуживания в каждой системе – FIFO. Система S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, время обслуживания заявок в которых распределено по произвольному закону с интенсивностью μ_i, $i=\overline{1,n}$. Пусть λ – интенсивность поступления заявок в сеть, p_{ij} – вероятность того, что заявка после обслуживания в СМО S_i поступит на обслуживание в СМО S_j, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i=\overline{1,n}$.

Для анализа средних значений открытой сети МО, функционирующей на большом промежутке времени, был предложен рекуррентный по моментам времени метод [1]:

$$\rho_i(t) = \min(N_i(t), m_i),\ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

$$\tau_i(t) = \frac{N_i(t)}{\mu_i \rho_i(t)},\ i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$N_i(t+\Delta t) = \lambda_i \tau_i(t),\ i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где $N_i(t)$, $\tau_i(t)$, $\rho_i(t)$ – соответственно среднее число заявок, среднее время пребывания заявок (в очереди и на обслуживании) и среднее число занятых линий обслуживания в i-ой СМО на интервале времени $[t_0, t_0+T]$, $t<T$, а $\lambda_i = \lambda e_i$, где e_i удовлетворяют системе

уравнений $e_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{n} e_j p_{ji}$, $i=\overline{1,n}$. С помощью его можно находить также средние характеристики СМО и в стационарном режиме.

Экспериментальным путем было установлено, что соотношения (1) – (3) дают хорошее приближение для вышеуказанных средних характеристик в случаях, когда коэффициенты загрузки систем $u_i = \dfrac{\lambda e_i}{m_i \mu_i}$ невелики, а именно не превышают значения 0,4. Для систем с бóльшим коэффициентом загрузки данный метод был усовершенствован [2].

Введем следующие обозначения: $\overline{T}_i(t)$ – среднее временя, через которое вновь пришедшая заявка из очереди поступит на обслуживание в i-ю СМО; σ_i^2 – дисперсия времени ожидания в i-ой СМО. Тогда метод, рекуррентный по моментам времени, для систем с бóльшим коэффициентом загрузки примет следующий вид:

$\rho_i(t)$ вычисляется по формуле (1);

$$\tau_i(t) = \frac{1}{\mu_i} + \overline{T}_i(t), \tag{4}$$

где $\overline{T}_i(t)$ находится с помощью соотношений:

$$\overline{T}_i(t) = 0, \text{ если } N_i(t) - \rho_i(t) = 0,$$

$$\overline{T}_i(t) = \frac{N_i(t) - \rho_i(t) + 1}{m_i}\left(\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\sigma_i^2 \mu_i}{2}\right), \tag{5}$$

если $0 < N_i(t) - \rho_i(t) < m_i$,

$$\overline{T}_i(t) = \frac{1}{\mu_i}(\Theta_i(t) - 1) + \frac{N_i(t) - \rho_i(t) - \Theta_i(t) m_i + 1}{m_i}\left(\frac{1}{2\mu_i} + \frac{\sigma_i^2 \mu_i}{2}\right), \tag{6}$$

если $N_i(t) - \rho_i(t) \ge m_i$. При этом $N_i(t)$ вычисляется по формуле (3), $\Theta_i(t)$ – целая часть от $\dfrac{N_i(t) - \rho_i(t)}{m_i}$.

Как правило, для нахождения аналитического выражения для среднего числа заявок в системах экспоненциальных сетей строится система разностно-дифференциальных уравнений для вероятностей состояний, которую можно решить в общем виде только при небольшом числе систем в сети. Усовершенствованный рекуррентный по моментам времени метод значительно упрощает процесс нахождения средних характеристик сетей МО с произвольными распределениями времен обслуживания заявок в линиях систем и подходит для сетей большой размерности, при этом он имеет незначительную погрешность вычислений. Приведем пример, иллюстрирующий это.

Пример 1. Рассмотрим открытую сеть МО с центральной СМО и следующими параметрами: $n=5$, $\lambda=20$; $m_2=m_4=2$, $m_1=4$, $m_3=3$, $m_5=5$; $N_i(0)=5$, $i=\overline{1,5}$, $p_{01}=p_{24}=p_{35}=p_{45}=p_{50}=1$, $p_{12}=p_{13}=0.5$ остальные $p_{ij}=0$, $i,j=\overline{1,5}$. В этом случае $e_1=e_5=1$, $e_2=e_3=e_4=0.5$.

Времена обслуживания заявок в каждой линии системы S_1 распределены по закону Эрланга с параметрами $\eta=1$, $\mu_1=9$; в линиях систем S_2 и S_4 – по нормальному закону с параметрами $a_1 = 0.09, \sigma_1 = 0.05$ и $a_2 = 0.08, \sigma_2 = 0.05$ соответственно; в каждой линии систем S_3 и S_5 – по показательному закону соответственно с параметрами $\mu_3 = 8$, $\mu_5 = 6$. Результаты расчетов для среднего числа заявок в СМО сети в стационарном режиме, полученные с помощью имитационного моделирования и с использованием соотношений (1) – (3) для системы S_4, а для систем S_1, S_2, S_3, и S_5 соотношений (1),(4) – (6), (3) приведены в таблице 1.

Таблица 1

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
$N_{iм}$	2,532	1,118	1,361	0,992	3,987
N_{ip}	2,222	0,9	1,25	0,8	3,333
u_i	0,555	0,45	0,417	0,4	0,666
α_i	12,234	19,499	8,159	19,355	16,388

В последней строке таблицы значения $\alpha_i = \left|\frac{N_{iм} - N_{ip}}{N_{iм}}\right| \cdot 100\%, i = \overline{1,5}$, означают относительные погрешности вычислений среднего числа заявок в системах сети, полученные с помощью рекуррентного метода.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим решение задачи минимизации затрат на функционирование сети по числу линий обслуживания в системах сети. Введем следующие обозначения: d_i – затраты на содержание одной заявки в i-ой СМО, а E_i – затраты на содержание одной линии обслуживания в i-ой СМО, $i = \overline{1,n}$. Критерий оптимизации сети имеет вид (7), а задача оптимизации – (8):

$$W(T,m) = W(T,m_1,m_2,...,m_n) = \frac{1}{T-t_0}\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i N_i(t) + E_i m_i\right)dt\,, \qquad (7)$$

$$\begin{cases} W(T,m_1,m_2,...,m_n) \to \min\limits_{m_1,m_2,...,m_n}, \\ m_i \le a_i,\ i = \overline{1,n}, \end{cases} \qquad (8)$$

где a_i, $i = \overline{1,n}$, – заданные числа, в пределах которых может меняться число линий обслуживания в i-ой СМО. Согласно формуле (3), значения $N_i(t)$ могут находиться для сколь угодно малого приращения времени Δt, и критерий (7) может быть заменен приближенным выражением:

$$W(T,m) = \frac{\Delta t}{T-t_0}\sum_{j=0}^{(T-t_0)/\Delta t}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{2}\left|N_i(t_0+(j+1)\Delta t) + N_i(t_0 + j\Delta t)\right| + \sum_{i=1}^{n}E_i m_i\,. \qquad (9)$$

Из формул (1) – (3), а также формул (4) – (6) видно, что значение $N_i(t)$ зависит только от числа линий в i-ой СМО и не зависит от числа линий в остальных системах, поэтому критерий (9) будет достигать своего минимума для значений $(m_1, m_2, ..., m_n)$, при которых затраты для каждой системы в отдельности будут минимальными. Так как задача (8) является задачей целочисленного программирования, то решить ее можно методом полного перебора. Например, если число систем в сети 20, а число линий обслуживания в системах может изменяться от 1 до 10, то число таких переборов будет равно 10^{20}. Но так как значения $N_i(t)$ находятся независимо друг от друга, то число переборов сокращается до 200. Этот факт значительно упрощает вычисления и экономит процессорное время.

Приведем алгоритм решения оптимизационной задачи (8):

1) выбираем начальный вектор $(m_1, m_2, ..., m_n)$;

2) определяем систему S_i, для которой будем минимизировать затраты первой, для простоты возьмем $j = 1$;

3) фиксируем все значения m_i, $i = \overline{1,n}$, $i \neq j$, кроме m_j;

4) если $j \leq n$, то изменяем значения m_j от 1 до a_j, иначе переходим в пункт 8);

5) для j-ой системы находим $N_j(t_0 + \Delta t)$, $N_j(t_0 + 2\Delta t)$, ..., $N_j(T)$, используя (1) – (6);

6) с помощью полученных значений находим значение критерия $W(T,m)$ по формуле (9), сравниваем его со значением $W(T,m)$, полученным ранее при других $(m_1, m_2, ..., m_n)$;

7) если $m_j < a_j$, то переходим к пункту 4), иначе увеличиваем значение j на единицу и переходим в пункт 3);

8) конец алгоритма.

Пример 2. Рассмотрим открытую сеть МО с центральной СМО, рис. 1, которая может являться моделью компьютерной сети, рис. 1. Сеть характеризуется следующими параметрами: число СМО в сети $n = 100$, $\lambda = 15$; начальный вектор числа линий обслуживания в системах сети состоит из элементов $m_i = 1$, $i = \overline{1,100}$; $N_i(0) = 5$, $i = \overline{1,100}$; вероятности переходов $p_{0i} = 0.1q^{i-1}$, $q = 0.978$, $i = \overline{1,100}$, (по формуле суммы геометрической прогрессии легко проверить, что $\sum_{i=1}^{100} p_{0i} = 1$), $p_{i0} = p_{i100} = 0.5$, $i = \overline{1,100}$, $p_{100\,i} = 0.051$, $i = \overline{1,99}$, остальные $p_{ij} = 0$, $i, j = \overline{1,5}$. В данном случае e=(0.114, 0.112, 0.110, 0.107, 0.105, 0.103, 0.101, 0.100, 0.098, 0.096, 0.094, 0.092, 0.091, 0.089, 0.087, 0.086, 0.084, 0.083, 0.081, 0.080, 0.078, 0.077, 0.075, 0.074, 0.073, 0.072, 0.070, 0.069, 0.068, 0.067, 0.066, 0.064, 0.063 ,0.062, 0.061, 0.060, 0.059, 0.058, 0.057, 0.056, 0.055, 0.054, 0.054, 0.053, 0.052, 0.051, 0.050, 0.049, 0.049, 0,048, 0.047, 0.046, 0.046, 0.045, 0.044, 0.044, 0.043, 0.042, 0.042, 0.041, 0.041, 0.040, 0.039, 0.039, 0.038, 0.038, 0.037, 0.037, 0.036, 0.036, 0.035, 0.035, 0.034. 0.034, 0.033, 0.033, 0.033, 0.032, 0.032, 0.031, 0.031, 0.031, 0.03, 0.03 0.03, 0.029, 0.029, 0.29, 0.028, 0.028, 0.028, 0.027, 0.027, 0.027, 0.026, 0.026, 0.026, 0.026, 0.025, 0.734).

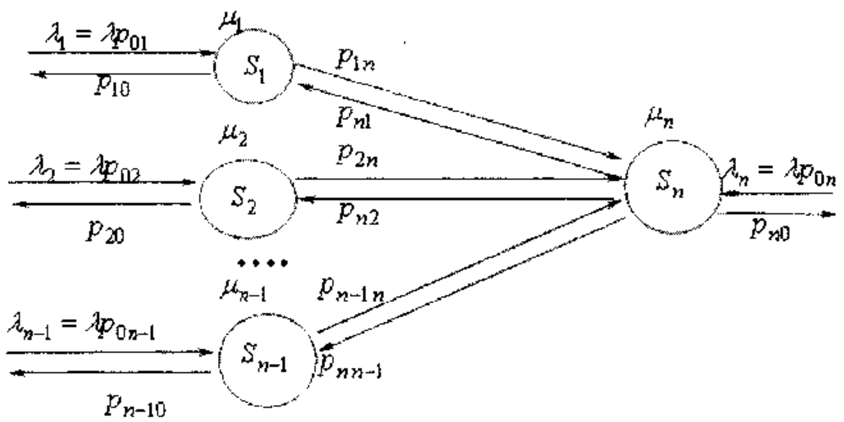

Рис. 1. Модель компьютерной сети.

Времена обслуживания заявок в линиях СМО с номерами 1, 10, 12, 14, 18. 24, 26, 27, 29, 32, 34, 36, 38, 42, 44, 47, 50, 52, 54, 57, 59, 63, 73, 76, 79, 80, 83, 84, 87, 89, 90-93, 96, 97, 100 распределены по экспоненциальному закону с параметрами $\mu = (2.807, 2.138, 2.085, 2.834, 2.339, 2.012, 1.373, 2.954, 1.118, 1.166, 2.333, 1.202, 2.772, 1.616, 1.090, 1.053, 1.618, 1.096, 1.875, 1.045, 1.226, 2.291, 2.415, 1.696, 0.877, 1.371, 1.954, 0.749, 2.334, 1.924, 2.319, 1.415, 1.810, 2.206, 0.793, 1.189, 12)$; по нормальному закону – в системах с номерами 3, 4, 7, 8, 13, 15, 19, 20, 22, 25, 28, 30, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 46, 48, 53, 55, 56, 61, 64, 66, 68, 69, 71, 77, 82, 86, 88, 95 соответственно с параметрами $a = (0.329, 0.293, 0.471, 0.313, 0.407, 0.524, 0.496, 0.557, 0.392, 0.334, 0.749, 0.667, 0.496, 0.437, 0.569, 0.813, 0.384, 0.459, 0.390, 0{,}490, 0{,}673, 1.036, 0.487, 0.663, 0.504, 1.154, 0.425, 0.489, 1.076, 1.267, 1.163, 0.747, 0.470, 0.435)$ и $\sigma = 0.05$; в остальных системах – по закону Эрланга соответственно с параметрами $\eta = 1$ и $\mu = (1.2, 1.2, 1.7, 1.1, 2.9, 1.2, 1.6, 2.5, 2.7, 1.9, 1.1, 2.2, 2.6, 2.2, 1.7, 1.3, 2.8, 2.7, 2.3, 1.5, 1.7, 2.6, 2.3, 2.2, 2.9, 2.7, 1.8, 2.2, 1.3)$; $T = 50$, $\Delta t = 0.001$. Заданы вектора стоимостных коэффициентов $E = (13, 3, 4, 8, 12, 7, 17, 1, 5, 1, 9, 11, 9, 19, 12, 14, 15, 11, 6, 14, 9, 11, 15, 2, 4, 17, 19, 14, 16, 20, 9, 11, 1, 17, 3, 10, 14, 2, 3, 13, 14, 2, 6, 13, 15, 15, 2, 4, 14, 15, 5, 6, 8, 18, 5, 9, 11, 6, 2, 6, 13, 9, 4, 6, 9, 17, 15, 8, 18, 14, 15, 5, 1, 16, 12, 1, 9, 13, 17, 4, 6, 15, 5, 19, 8, 16, 11, 7, 9, 18, 20, 1, 11, 18, 17, 18, 2, 12, 19)$ и $d = (4, 21, 27, 4, 12, 8, 26, 3, 11, 30, 16, 22, 9, 4, 10, 16, 12, 9, 24, 21, 2713, 28, 4, 29, 5, 1, 7, 15, 3, 3, 20, 17, 5, 20, 28, 13, 19, 6, 12, 5, 20, 26, 5, 20, 26, 13, 19, 6, 12, 18, 5, 20, 6, 12, 9, 5, 13, 28, 25, 21, 27, 5, 20, 27, 22, 9, 5, 11, 28, 25, 21, 18, 5, 20, 6, 14, 29, 5, 22, 5, 26, 13, 29, 25, 22, 28, 15, 21, 26, 13, 29, 6, 12, 19, 6, 22)$.

Решением оптимизационной задачи (8) является вектор $m_i^* = 1, i \notin A$, $m_i^* = 2, i \in A = \{2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 26, 36, 40, 52, 100\}$, а значение стоимостного критерия в данном случае равно $W(50, m^*) = 1780.6$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маталыцкий, М. А.* Об одном рекуррентном методе анализа средних значений для открытых сетей с однотипными заявками /М. А. Маталыцкий, Е. В. Колузаева // Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер 2. Физика, математика, информатика. – 2008. – №2. – С. 95 – 102.

2. *Колузаева Е. В.* Об усовершенствовании MVA метода для открытых сетей МО и его применении/ Е. В. Колузаева // Современные информационные компьютерные технологии. Сборник научных статей. – Гродно: ГрГУ, 2008 (в печати).