НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

О. А. Иконников, А. Р. Низамеев, Д. В. Сергеев, Н. А. Сергеева

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф.Решетнева

Красноярск, Российская Федерация

E-mail: saor_medvedev@sibsau.ru

В работе рассматривается задачи непараметрической идентификации линейных динамических систем, в частности идентификация динамических процессов высоких порядков. Хотя и в этом случае непараметрические модели остаются прежними, но возникает существенная особенность, связанная с влиянием смещенности непараметрических оценок. При этом справедливой остается сходимость непараметрической модели линейной динамической системы в среднеквадратическом. Приведены результаты исследования непараметрических моделей методом статистического моделирования. В отличие от результатов ранних исследований подобных моделей для процессов малых порядков, здесь потребовалось существенное увеличение объема выборки наблюдаемых переменных.

Ключевые слова: идентификация, модель, непараметрическое оценивание, динамический процесс, непараметрическая модель, процесс высокого порядка.

В последнее время в связи с предъявлением все более высоких требований к процессам управления в различных областях техники проблема идентификации (моделирования) становится исключительно важной.

Очевидно, что нельзя обеспечить качественное управление системой, если ее математическая модель не известна с достаточной точностью. Для построения математической модели могут быть использованы как теоретические, так и экспериментальные методы. Опыт, накопленный при проектировании различных систем, убедительно свидетельствует о том, что нельзя построить математическую модель, адекватную реальной системе, только на основе теоретических исследований физических процессов в системе. Сформированная таким образом математическая модель, как правило, значительно отличается от реальной системы, что приводит, соответственно, к снижению качества управления.

В зависимости от объема априорной информации о системе различают задачи идентификации в широком и узком смыслах. При решении задач идентификации в широком смысле априорная информация о системе либо незначительна, либо вообще отсутствует.

При решении задачи идентификации в узком смысле считается, что известны структура системы и класс моделей, к которому она относится. Априорная информация о системе достаточно обширна. Такая постановка задачи идентификации наиболее соответствует реальным условиям проектирования и поэтому широко используется в инженерной практике [1,2].

В данной работе рассматривается задача идентификации в широком смысле при условиях, когда уравнение, описывающее объект в системе, имеет довольно высокий порядок, что является задачей, недостаточно изученной на сегодняшний день.

Рассмотрим стандартный класс линейных динамических систем типа «объект-модель», краткая блок-схема которой изображена на рис.1 [ ].

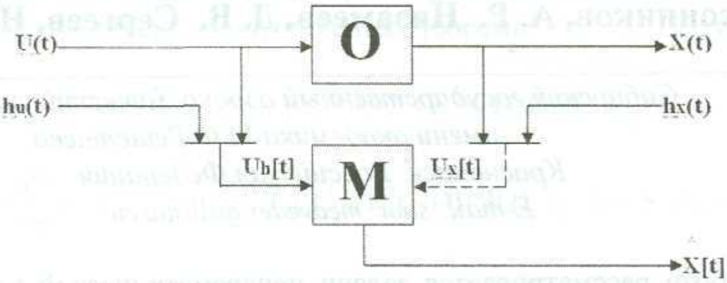

Рис. 1. Общая схема идентификации динамического объекта.

$\boxed{\mathbf{O}}$ - линейный динамический объект.

$\boxed{\mathbf{M}}$ - непараметрическая модель объекта.

U(t) – непрерывный сигнал, подаваемый на вход объекта.
X(t) – непрерывный сигнал, снимаемый с выхода объекта.
hu(t) – случайные помехи в канале измерения U(t).
hx(t) – случайные помехи в канале измерения X(t).
Uh[t] = U(t) + hu(t)
– дискретные сигналы, подаваемые на модель.
Ux[t] = X(t) + hx(t)
$\hat{X}[t]$ – непрерывный сигнал, снимаемый с выхода модели.

Подобная схема типична для идентификации динамических процессов дискретно-непрерывного типа. Анализ любой системы управления, в конечном счете, сводится к установлению и исследованию зависимости между сигналом $U(t)$, поданным на ее вход, и сигналом $X(t)$, полученным на ее выходе. Физическая природа величин, характеризующих сигналы, может быть самой различной и не всегда совпадать для входного и выходного сигналов.

Пусть (x,y) – случайная величина со значениям в пространстве $\Omega \subset R^{n+1}$, а $p(x,y)$ – плотность распределения $(n+1)$-мерной случайной величины (x,y) неизвестна. Пусть $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_s,y_s)$ – выборка из s статически независимых наблюдений двумерной случайной величины (x,y). При аппроксимации неизвестной функции по наблюдениям часто используют непараметрическую регрессию y по x, p(x)>0 с вероятностью единица, имеющую вид [3]:

$$y_s(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{s} y_i \prod_{j=1}^{n} \Phi(c_s^{-1}(x_j - x_j^i)) \Bigg/ \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{n} \Phi(c_s^{-1}(x_j - x_j^i)), \qquad (1)$$

где интегрируемая с квадратом функция $\Phi(\cdot)$ такова, что

$$\Phi_{z\in\Omega(z)}(z) < \infty, \qquad c_s^{-1} \int_{\Omega(y)} \Phi(c_s^{-1}(x_j - x_j^i))dx = 1,$$

$$\lim_{s\to\infty} c_s^{-1}\Phi(c_s^{-1}(x_j - x_j^i)) = \delta(x - x_j^i), \quad \frac{1}{c_s}\int_{\Omega(y)} y\Phi\left(\frac{y - y_i}{c_s}\right)d\Omega(y) = y_i, \tag{2}$$

а параметр c_s (коэффициент размытости) удовлетворяет условиям:

$$c_s > 0, \quad s=1,2,\ldots, \quad \lim_{s\to\infty} c_s = 0, \quad \lim_{s\to\infty} sc_s^n = \infty \tag{3}$$

Выбор c_s осуществляется в результате минимизации критерия:

$$w(c_s) = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}(y_j - y_s(x_j, c_s))^2 \to \min_{c_s}, \quad i \neq j \tag{4}$$

Можно предложить несколько иной тип оценок $y(x) \in L_2$, которые в ряде случаев являются более предпочтительными для построения различных алгоритмов адаптации. Для этого поступим следующим образом. Построим на $\Omega(x)$ равномерную сетку с узлами $x_{j,t}^0$, $j = \overline{1,k}, t = \overline{1,s^0}$, где s^0 – фиксированное число. В оценке (1) параметр c_s найдем, минимизируя критерий (4). Найденное таким образом $c_s^{опт}$ будем обозначать c_s. Далее вычислим в соответствии с (3) значения $y_s(x = x_t^0), t = \overline{1,s^0}$ для таких x_t, которые удовлетворяют неравенству [4]:

$$\sum_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{k}\Phi(c_s^{-1}(x_{j,t}^0 - x_{j,i})) > 0. \tag{5}$$

В результате получим новую выборку, состоящую из $s1$ элементов, где $s1<s$ – число, которое определяется числом неравенств (5) для $t = \overline{1,s^0}$. Обозначим ее $(\vec{y}_{s1}^{1}, \vec{x}_{s1}^{1})$, где $\to$ означает временной вектор. Теперь можно построить оценку $y(x)$ $\forall x \in \Omega(x)$ на выборке $(\vec{y}_{s1}^{1}, \vec{x}_{s_1}^{1})$, которая примет вид

$$y_{s1}(x) = \frac{1}{s1 c_{s1}}\sum_{i=1}^{s1} y_i^1 \prod_{j=1}^{k} H(c_s^{-1}(x_j - x_{j,i}^1)), \tag{6}$$

где $H(c_s^{-1}(x_j - x_j^i))$ – колоколообразная функция класса $\Phi(c_s^{-1}(x_j - x_j^i))$ с точностью до постоянной и удовлетворяющая тем же свойствам. Выбор c_s проводится путем минимизации критерия (4).

Производная $y'(x)$ может быть оценена при наличии выборки $(\vec{y}_{s1}^{1}, \vec{x}_{s1}^{1})$ следующей статистикой [5]:

$$y'_{s1}(x) = \frac{1}{s1 c_{s1}}\sum_{i=1}^{s1} y_i^1 \prod_{j=1}^{k} H'(c_{s1}^{-1}(x_j - x_{j,i}^1)). \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть измеримая функция $y(x) \in L_2$ дифференцируема n раз. Финитная $H(\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_{\Omega(x)} H'(u)du = 0, \quad \frac{C_{s1}}{n!}\int_{\Omega(x)} H'(u)u\, du = -1.$$

Тогда $y'_{s1}(x)$ сходится к $y'(x)$ в среднеквадратическом при $S \to \infty$. Кроме того

$$\lim_{s1\to\infty} M\left\{\| y'_{s1}(x) - y'(x) \|_{L_2}\right\} = 0.$$

В этой работе рассматриваются только линейные системы, уравнения движения которых сводятся к линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

При непараметрической идентификации, необходимо подать на вход объекта единичный ступенчатый сигнал $u(t)=1(t)$ и снять переходную характеристику $k(t)$, известно, что весовая функция $h(t)$ равна $dk(t)/dt$, вид которой зависит от динамики исследуемого объекта. Задача состоит в том, чтобы построить математическую модель, отражающую наилучшим образом свойства и характеристики реально действующего объекта. Известно, что линейная динамическая система при не нулевых начальных условиях описывается интегралом Дюамеля

$$x(t)=k(0)\cdot u(t)+\int\limits_{\Omega(t)}h(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau\,. \tag{8}$$

Тогда модель линейной динамической системы имеет вид [6]:

$$x_s(t)=k_s(0)\cdot u(t)+\int\limits_{\Omega(t)}h_s(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau\,, \tag{9}$$

где $k_s(0)$, $h_s(\tau)$ - непараметрические оценки соответственно переходной и весовой функций.

Получение выходных сигналов объекта при действующей на входе единичной функции, происходит посредством измерения координаты $x(t)$ через определенный промежуток времени Δt (шаг (интервал) дискретизации), от величины которого зависит точность аппроксимации (в общем случае шаг дискретизации может быть переменным). В итоге получим выборку $(k_i,t_i), i=\overline{1,s}$. Построенная модель имеет следующий вид:

$$x_s(t)=k_s(0)\cdot u(t)+\frac{1}{s\cdot c_s}\cdot\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t/\Delta\tau}k_i\cdot H\left(\frac{t-\tau_j-t_i}{c_s}\right)\cdot u(\tau_j)\Delta\tau, \tag{10}$$

где H(.) - функция из класса колоколообразных, C_s - параметр размытости, изменением величины которого регулируется точность работы модели, k_i – наблюдение переходной характеристики процесса в момент времени $t_i, i=\overline{1,s}$, s -объем выборки, $\Delta\tau$ - шаг численного интегрирования, от величины которого зависит точность вычисления интеграла в модели (10).

Для алгоритма (10) имеет место следующая теорема [7]:

Теорема 2. Пусть $h(t)$ и $k(t)$ имеют непрерывные и ограниченные вторые производные. Тогда в условиях теоремы 1 статистика $x_s(t)$ сходится в среднеквадратическом к $x(t)=dx(t)/dt$ при $s\to\infty$.

При дальнейших исследованиях процессов высоких порядков и их моделировании экспериментальным путем была выявлена одна важная особенность. При построении кривых, соответствующих выходным сигналам объекта и его модели, было обнаружено некоторое смещение. Причем, если при моделировании процессов, описываемых уравнениями малых порядков смещение незначительно влияет на качество идентификации, то когда эти процессы имеют более высокий порядок (от десятого и выше), ошибка моделирования существенно возрастает.

Для решения этой проблемы была предложена идея разложения весовой функции в ряд Тейлора с последующим использованием в модели помимо нулевого как первого, так и второго членов этого ряда.

Представим весовую функцию $h(t)$ в некоторой точке t следующим образом:

$$h(\tau) = h(t) + h'(t)\cdot(\tau - t) + \frac{h''(t)\cdot(\tau - t)^2}{2} + R). \quad (11)$$

Тогда исходный интеграл свертки будет представим в виде

$$x(t) = k(0)\cdot u(t) + \int\limits_{\Omega(t)} \left[h(t) + h'(t)\cdot(\tau - t) + \frac{h''(t)\cdot(\tau - t)^2}{2} \right] \cdot u(t-\tau)d\tau \quad (12)$$

Применяя стохастическую аппроксимацию к весовой функции и ее производным в виде

$$h(t) = \frac{1}{s\cdot Cs}\sum_{i=1}^{s} k_i \cdot H'\left(\frac{t - t_i}{Cs}\right)$$

$$h'(t) = \left[\frac{1}{s\cdot Cs}\sum_{i=1}^{s} k_i \cdot H'\left(\frac{t - t_i}{Cs}\right)\right]' = \frac{1}{s\cdot Cs^2}\sum_{i=1}^{s} k_i \cdot H''\left(\frac{t - t_i}{Cs}\right), \quad (13)$$

$$h''(t) = \left[\frac{1}{s\cdot Cs^2}\sum_{i=1}^{s} k_i \cdot H''\left(\frac{t - t_i}{Cs}\right)\right]' = \frac{1}{s\cdot Cs^3}\sum_{i=1}^{s} k_i \cdot H'''\left(\frac{t - t_i}{Cs}\right)$$

и подставляя в (12) получим следующее

$$x_s(t) = k(0)\cdot u(t) + \frac{1}{s\cdot Cs}\int\limits_{\Omega(t)} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{s} k_i \cdot H'\left(\frac{t - t_i - \tau}{Cs}\right) - \frac{(t - t_i - \tau)}{Cs}\sum\limits_{i=1}^{s} k_i \cdot H''\left(\frac{t - t_i - \tau}{Cs}\right) \\ + \frac{(t - t_i - \tau)^2}{Cs^2}\sum\limits_{i=1}^{s} k_i \cdot H'''\left(\frac{t - t_i - \tau}{Cs}\right) \end{array} \right] \cdot u(t-\tau)d\tau. \quad (14)$$

Заменяя интеграл его разностным аналогом, получим модель для расчета

$$x_s(t) = k(0)\cdot u(t) + \frac{1}{s\cdot Cs}\sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{s} k_i \cdot H'\left(\frac{t - t_i - \tau_j}{Cs}\right) - \frac{(t - t_i - \tau_j)}{Cs}\sum\limits_{i=1}^{s} k_i \cdot H''\left(\frac{t - t_i - \tau_j}{Cs}\right) \\ + \frac{(t - t_i - \tau_j)^2}{Cs^2}\sum\limits_{i=1}^{s} k_i \cdot H'''\left(\frac{t - t_i - \tau_j}{Cs}\right) \end{array} \right] \cdot u(\tau_j)\Delta\tau =$$

(15)

$$= \frac{1}{s\cdot Cs}\sum_{j=1}^{t/\Delta\tau}\sum_{i=1}^{s} k_i \left[H'\left(\frac{t - t_i - \tau_j}{Cs}\right) - \frac{(t - t_i - \tau_j)}{Cs}H''\left(\frac{t - t_i - \tau_j}{Cs}\right) + \frac{(t - t_i - \tau_j)^2}{Cs^2}H'''\left(\frac{t - t_i - \tau_j}{Cs}\right) \right] \cdot u(\tau_j)\Delta\tau.$$

Применив модификацию, мы получаем новую модель, которую назовем модифицированной моделью.

При численных исследованиях модели применялись различные входные воздействия следующего вида:

а) $U(t) = 1$; (16)

б) $U(t) = sin(t)$; (17)

Моделирование процессов десятого порядка с помехой 10%:

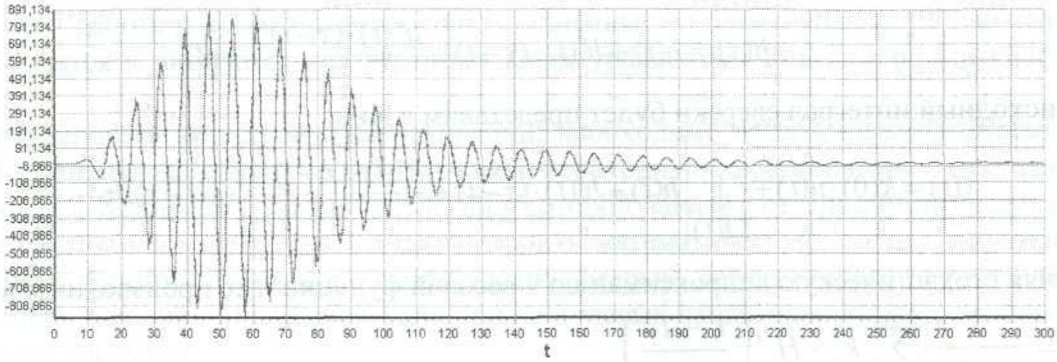

Рис. 2. Реакции объекта и модифицированной модели на $U(t) = 1(t)$

$(n = 10, s = 1500, \Delta t = 0.2c., W \approx 0.6(0.6\%), \varepsilon^x(t) = 10\,\%)$

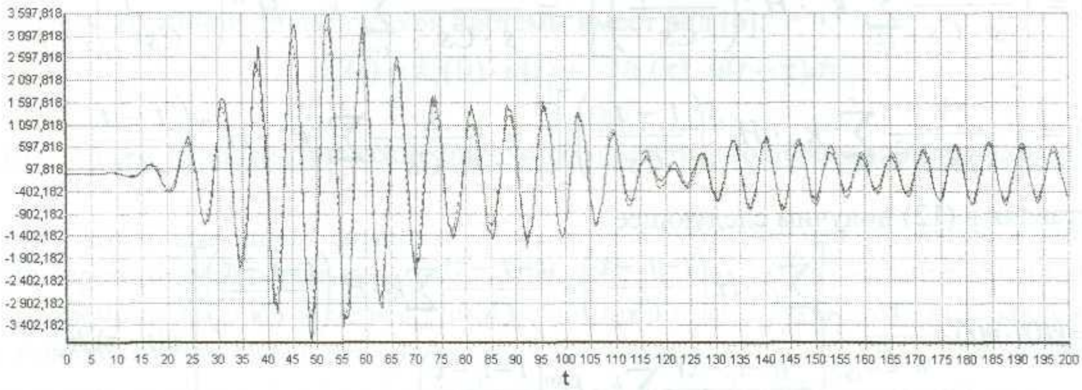

Рис. 3. Реакции объекта и базовой модели на $U(t) = \sin(t)$

$(n = 10, s = 800, \Delta t = 0.25\,c., W \approx 8.6(1.1\%), \varepsilon^x(t) = 10\,\%)$

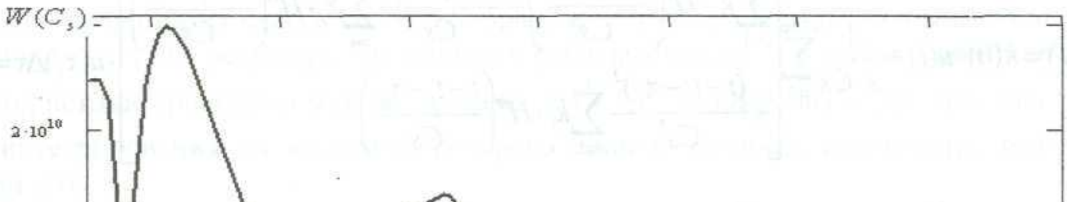

Рис. 5. Расчетная зависимость ошибки идентификации от величины параметра размытости ($U(t) = 1(t)$, n=20, s=4000, $\Delta t = 0.5c.$)

Более интересной задачей идентификации является построение модели объекта, когда входом является не скаляр, а вектор. Задача идентификации при многомерном входе представлена на рисунке 6 и на рисунке 7. На рисунках 6 и 7 $u_n(t)$- вектор входных воздействий $(u_n(t), n = \overline{1, N})$, $x(t)$ – выход объекта. Линейный многомерный объект с N входами можно представить, как N отдельных линейных объектов с одним входом и одним выходом, которые можно описать интегралом Дюамеля.

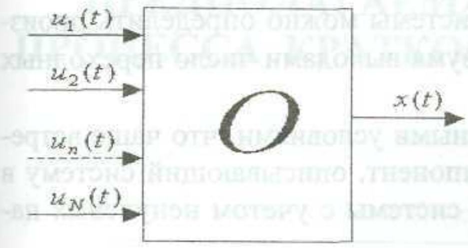

Рис. 6. Схема объекта.

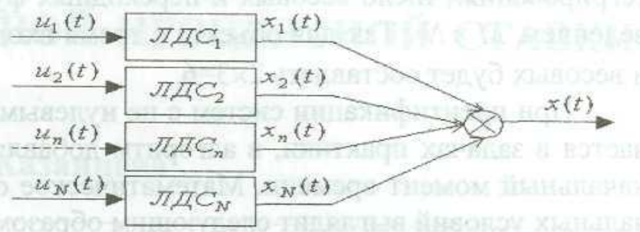

Рис. 7. Укрупненная схема объекта.

Модель ЛДС при ненулевых начальных условиях выглядит следующим образом:

$$x_s(t)=k_{1,s}(0)u_1(t)+k_{2,s}(0)u_2(t)+\ldots+k_{N,s}(0)u_N(t)+\int_0^t h_{1,s}(t-\tau)u_1(\tau)d\tau+\int_0^t h_{2,s}(t-\tau)u_2(\tau)d\tau+\ldots+\int_0^t h_{N,s}(t-\tau)u_N(\tau)d\tau, \quad (18)$$

где $x_s(t)$ – выход модели системы, $k_{n,s}(t)$, $h_{n,s}(t)$ – оценки переходных и весовых функций соответственно n-го звена системы. При использовании непараметрических оценок переходных и весовых функций системы непараметрическую модель многомерной ЛДС можно записать в дискретном виде:

$$x_s(t)=\sum_{n=1}^{N}k_{n,s}(0)u_n(t)+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{sC_s}\sum_{j=1}^{t/\Delta\tau}\sum_{i=1}^{s}k_{n,i}H\left(\frac{t-T_j-t_i}{C_s}\right)u_n(\tau_j)\Delta T, \quad (19)$$

Более интересной задачей идентификации при решении практических задач является построение модели объекта, входом и выходом которого являются вектора. На рисунке 8 представлена схема объекта с многомерным не только входом, но и выходом.

Рис. 8. Схема динамического объекта с N-мерным входом и с M-мерным выходом.

На рисунке 8 изображена схема многомерного объекта с вектором входных параметров $u_n(t)$, где $n=\overline{1,N}$ и вектором выходных параметров $x_m(t)$, где $m=\overline{1,M}$. Для многомерного линейного динамического объекта можно применить принцип суперпозиции [1], и тогда для каждого выхода объекта можно сопоставить сумму линейных звеньев объекта, которые в совокупности дают значение величины каждого из компонент выходного вектора объекта. Математическое описание многомерного объекта можно представить в виде суммы интегралов свертки, а именно каждому выходу объекта соответствует совокупность звеньев системы влияющих только на соответствующий выход объекта. Таким образом, относительно каждого выхода объекта $x_m(t)$ можно записать сумму интегралов, используя метод суперпозиции в следующей форме:

$$x_m(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_0^t h_{n,m}(t-\tau)u_n(\tau)d\tau,\ m=\overline{1,M}, \quad (20)$$

где $x_m(t)$ - m-й выход объекта, $u_n(t)$ - n-й вход объекта, N- число входов объекта, M- число выходов объекта, $h_{n-m}(t)$ - весовая функция звена n-m системы, τ - переменная интегрирования. Число весовых и переходных функций системы можно определить произведением $M \times N$. Так для объекта с тремя входами и двумя выходами число переходных и весовых будет составлять 2×3=6.

При идентификации систем с не нулевыми начальными условиями, что чаще встречается в задачах практики, в алгоритм добавляется компонент, описывающий систему в начальный момент времени. Математическое описание системы с учетом ненулевых начальных условий выглядит следующим образом:

$$x_m(t) = \sum_{n=1}^{N} k_{n,m}(0) u_n(t) + \sum_{n=1}^{N} \int_0^t h_{n,m}(t-\tau) u_n(\tau) d\tau, \; m = \overline{1,M}, \tag{21}$$

где $k_{n,m}(t)$ - есть переходная характеристика n,m-го звена системы.

Модель многомерного объекта векторным входом и выходом можно записать в следующем виде, заменив весовые функции их оценками:

$$x_{m,s}(t) = \sum_{n=1}^{N} k_{n,m,s}(0) u_n(t) + \sum_{n=1}^{N} \int_0^t h_{n,m,s}(t-\tau) u_n(\tau) d\tau, \; m = \overline{1,M}, \tag{22}$$

где $x_{m,s}(t)$ - оценка m-го выхода объекта, $k_{n,m,s}(t)$ - оценка переходной характеристики n,m-го звена системы, $h_{n,m,s}(t)$ - оценка весовой функции звена n,m объекта.

Для построения модели многомерного объекта необходимо знать оценки переходных и весовых функций звеньев системы, для отыскания которых применяется непараметрическое оценивание. Тогда модель многомерной ЛДС можно записать в следующем виде:

$$x_{m,s}(t) = \sum_{n=1}^{N} k_{n,m,s}(0) u_n(t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{sC_s} \int_0^t \sum_{i=1}^{s} k_{n,m,i} H'\left(\frac{t-\tau-t_i}{C_s}\right) u_n(\tau) d, \; m = \overline{1,M}. \tag{23}$$

Полученную модель многомерной ЛДС можно представить в дискретном виде, взяв интеграл Дюамеля методом прямоугольников:

$$x_{m,s}(t) = \sum_{n=1}^{N} k_{n,m,s}(0) u_n(t) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{sC_s} \sum_{j=1}^{t/\Delta\tau} \sum_{i=1}^{s} k_{n,m,i} H'\left(\frac{t-\tau_j-t_i}{C_s}\right) u_n(\tau_j) \Delta\tau, \; m = \overline{1,M}. \tag{24}$$

Настройка модели осуществляется также как и в одномерном случае.

Полученные в настоящей работе непараметрические модели линейных динамических систем, показавшие хорошее качество работы в результате статистического моделирования, могут быть использованы при разработке алгоритмов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев, А.В.* Адаптация в условиях непараметрической неопределенности / А.В. Медведев // Адаптивные системы и их приложения. Новосибирск: Наука, 1978. С. 4-34.

2. *Надарая, Э.А.* Непараметрические оценки кривой регрессии / Э.А. Надарая // Некоторые вопросы теории вероятностных процессов, 1965. Выпуск 5. С. 56-68.

3. *Цыпкин, Я.З.* Основы информационной теории идентификации / Я.З. Цыпкин. М.: Наука, 1984. 320с.

4. *Medvedev, A.V.* Identification and control for linear dynamic systems of unknown order / A.V. Medvedev // Lecture notes in computer science V.27.Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1975. P. 48-55

5. *Medvedeva, N.A.* Nonparametric modeling algorithms of dynamic processes / N.A. Medvedeva // Computer data analysis and modeling. V. 2. Minsk: BSU, 1998. P.5-10.

6. *Sergeeva, N.A.* Nonparametric models of nonlinear dynamic systems / N.A. Sergeeva // Computer data analysis and modeling. V. 3. Minsk: BSU, 2001. P.92-97.

7. *Эйкхофф, П.* Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. Москва: Мир, 1975. 680с.