АНАЛИЗ ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Н. Н. Труш, Т. В. Цеховая

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: Tsekhavaya@bsu.by

Аннотация: Вводятся понятия внутренне однородного случайного поля, вариограммы. Исследуются свойства вариограммы.

Ключевые слова: однородное случайное поле, внутренне однородное случайное поле, вариограмма.

Анализу внутренне стационарных случайных процессов посвящена многочисленная литература, например, [1–3]. В данной работе исследуются свойства однородных случайных полей.

Пусть $X(t)$, $t \in R^n$ – однородное случайное поле с математическим ожиданием $m = MX(t) = 0$, $t \in R^n$, ковариационной функцией $R(\tau), \tau \in R^n$, спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, спектральной функцией $F(\lambda)$, $\lambda \in R^n$, и нормированной ковариационной функцией $r(\tau) = \dfrac{R(\tau)}{R(0)}, \tau \in R^n$. Гауссовское однородное поле полностью характеризуется первыми двумя моментами, а если математическое ожидание равно нулю, то это поле задается только ковариационной функцией.

Определение 1. Случайное поле $X(t)$, $t \in R^n$, называется внутренне однородным, если

$$M[X(t+h) - X(t)] = 0,$$

$$D[X(t+h) - X(t)] = 2\gamma(h),$$

для всех $t, h \in R^n$, где функция $2\gamma(h)$ называется вариограммой, а $\gamma(h)$ – семивариограммой.

Заметим, что однородное случайное поле является и внутренне однородным с

$$\gamma(h) = 0{,}5[DX(t+h) - 2\operatorname{cov}\{X(t+h), X(t)\} + DX(t)] = R(0) - R(h).$$

Однако внутренне однородное случайное поле не обязательно будет однородным. Например, процесс броуновского движения.

Теорема 1. Если $R(\tau), \tau \in R^n$, – ковариационная функция однородного случайного поля, то $R(\tau), \tau \in R^n$, – положительно определенная функция. Обратно, если $R(\tau), \tau \in R^n$, – *положительно определенная функция, то существует единственное с нулевым математическим ожиданием гауссовское случайное поле с ковариационной функцией* $R(\tau), \tau \in R^n$.

Если $R(\tau),\tau\in R^n$, есть интегрируемая ковариационная функция, то спектральная функция $F(\lambda)$, $\lambda\in R^n$, абсолютно непрерывна и спектральная плотность

$$f(\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\!\!\dots\!\int R(\tau)e^{-i(\lambda,\tau)}d\tau,\ \lambda\in R^n,$$

а (λ,τ) – скалярное произведение векторов $\lambda,\tau\in R^n$.

Интегрируемая ковариационная функция $R(\tau),\tau\in R^n$, положительно определена тогда и только тогда, когда $f(x)$, $x\in R^d$,– неотрицательная функция.

Заметим, что суммы, произведения и пределы положительно определенных функций являются положительно определенными функциями, а суммы, произведения и пределы ковариационных функций будут ковариационными функциями.

Пусть $X(t)$, $t\in R^n$ – однородное случайное поле с вариограммой $2\gamma(h)$, $h\in R^n$.

Теорема 2. Для произвольных действительных чисел $a_i, i=\overline{1,m}$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^m a_i=0$, и любых точек $x_i\in R^n, i=\overline{1,m}$

$$D\left(\sum_{i=1}^m a_i X(t_i)\right)=-\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i a_j\gamma(t_i-t_j).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$D(h)=D\left(\sum_{i=1}^m a_i[X(t_i)-X(0)]\right)=M\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i a_j[X(t_i)-X(0)][X(t_j)-X(0)]=$$

$$=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i a_j\operatorname{cov}\{[X(t_i)-X(0)],[X(t_j)-X(0)]\}.$$

Заметим, что

$$2\gamma(t_i-t_j)=D[X(t_i)-X(t_j)]=M[(X(t_i)-X(0))-(X(t_j)-X(0))]^2=$$

$$=2\gamma(t_i)+2\gamma(t_j)-2\operatorname{cov}\{(X(t_i)-X(0)),(X(t_j)-X(0))\}.$$

Тогда

$$D(h)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i a_j(\gamma(t_i)+\gamma(t_j)-\gamma(t_i-t_j))=-\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i a_j\gamma(t_i-t_j)\ge 0,$$

что и требовалось доказать.

Определение 2. Функция $\gamma(t)$, $t\in R^n$, называется условно отрицательно определенной, если для любого натурального m, $m>1$,

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a_i a_j\gamma(t_i-t_j)\le 0$$

для всякой конечной системы действительных чисел $a_i, i=\overline{1,m}$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^m a_i=0$, и для всех $x_i\in R^n, i=\overline{1,m}$.

Теорема 3. 1) Пусть $\gamma(\tau)$, $\tau\in R^n$, – вариограмма внутренне однородного случайного поля. Тогда $\gamma(\tau)$, $\tau\in R^n$, является условно отрицательно определенной функцией, $\gamma(0)=0$ и $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}\dfrac{\gamma(\tau)}{|\tau|^2}=0$.

2) Если $\gamma(\tau)$, $\tau\in R^n$, – условно отрицательно определенная функция с $\gamma(0)=0$ и $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}\dfrac{\gamma(\tau)}{|\tau|^2}=0$, то существует внутренне однородное случайное поле с вариограммой $\gamma(\tau)$, $\tau\in R^n$.

Доказательство. Утверждение об условной отрицательной определенности $\gamma(\tau)$ и то, что $\gamma(0)=0$, вытекает из определения вариограммы, условной отрицательной определенности функции и теоремы 2. Докажем, что $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}\dfrac{\gamma(\tau)}{|\tau|^2}=0$.

Для любого натурального k, $k\geq 1$, имеем

$$2\gamma(\tau)=M[X(\tau)-X(t)]^2=M[\sum_{i=1}^{k}(X(\frac{i\tau}{k})-X(\frac{(i-1)\tau}{k}))]^2=$$

$$=M\sum_{i,j=1}^{k}(X(\frac{i\tau}{k})-X(\frac{(i-1)\tau}{k}))(X(\frac{j\tau}{k})-X(\frac{(j-1)\tau}{k}))\leq k^2\,2\gamma(\frac{\tau}{k}).$$

Тогда

$$\frac{\gamma(\tau)}{|\tau|^2}\leq\frac{\gamma(\tau/k)}{|\tau|^2/k^2},\ k=1,2,\ldots$$

Отсюда получаем требуемое.

Докажем второе утверждение. Предположим, что $\gamma(\tau)$, $\tau\in R^n$, – условно отрицательно определенная функция для которой $\gamma(0)=0$ и $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}\dfrac{\gamma(\tau)}{|\tau|^2}=0$. Обозначим

$$P(\tau_i-\tau_j)=-\sum_{i,j=1}^{k}a_ia_j\gamma(\tau_i-\tau_j)\geq 0.$$

Из работы М. Лоэва [4] следует, что функция $e^{-\frac{P(\tau_i-\tau_j)}{2}}$ является характеристической функцией нормального внутренне однородного случайного поля $X(t)$, $t\in R^n$, с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$R(\tau_i,\tau_j)=MX(\tau_i)X(\tau_j)=-\gamma(\tau_i-\tau_j).$$

$$\varphi(a_1,\ldots,a_k;\tau_1,\ldots,\tau_k)=M\exp\{i\sum_{l=1}^{k}a_lX(\tau_l)\}=\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}R(\tau_i,\tau_j)a_ia_j\},$$

где $\tau_j\in R^n,\ j=\overline{1,k},\quad R(\tau_i,\tau_j)=MX(\tau_i)X(\tau_j).$

Имеем

$$-\sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j MX(\tau_i)X(\tau_j) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j MX^2(\tau_i) - \sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j MX(\tau_i)X(\tau_j) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j MX^2(\tau_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j MX(\tau_i)X(\tau_j) = \sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j \gamma(\tau_i - \tau_j).$$

Следовательно, характеристическая функция однородного нормального случайного поля полностью определяется функцией $\gamma(\tau)$, $\tau \in R^n$, которая является семивариограммой. Теорема доказана.

Заметим, что суммы и пределы условно неотрицательно определенных функций являются условно неотрицательными определенными функциями, а суммы вариограмм являются вариограммами.

Теорема 4. Пусть $\gamma(\tau)$, $\tau \in R^n$, непрерывная функция с $\gamma(0)=0$. Тогда следующие утверждения являются эквивалентными:

1) $\gamma(\tau)$, $\tau \in R^1$, является условно отрицательно определенной функцией;

2) для любых $\alpha>0$ $R(\tau) = e^{-\alpha\gamma(\tau)}$, $\tau \in R^1$, является положительно определенной функцией.

Рассмотрим примеры.

1. Для $\alpha > 0$, $\beta > 0$ функция $R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|^\beta}$, $\tau \in R^n$, является положительно определенной функцией (нормированной ковариационной функцией) тогда и только тогда, когда $\beta \le 2$.

2. Функция $\gamma(\tau) = |\tau|^\beta$ является неотрицательно определенной функцией тогда и только тогда, когда $\beta \le 2$.

3. Функция $\gamma(\tau) = |\tau|^\beta$ есть семивариограмма тогда и только тогда, когда $\beta < 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Troush N. N., Tsekhavaya. T. V.* The variogram estimates of the intrinsically-stationary stochastic processes and fields // MS'2004 International Conference on Modeling and Simulation (AMSE). Minsk, Belarus, April 27–29. 2004. P. 258–261.

2. *Цеховая Т. В., Арцимович И.* Анализ внутренне стационарных случайных процессов // Сборник науч. ст. междунар. конф. «Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (MoAPMI-2004)». Брест, 20–23 сент. 2004. С. 226 –232.

3. *Cressie N., Hawkins D. M.* Robust estimation of variogram // Jour. Inter. Assoc. Math. Geol. 1980. V. 12. N. 2. P. 115–125.

4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 719 с.