О РОБАСТНОСТИ МНОГОМЕРНОГО БАЙЕСОВСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРИ ИСКАЖЕНИЯХ АПРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

А. Ю. Харин, П. А. Шлык

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: KharinAY@bsu.by

В статье представлены результаты анализа робастности многомерного байесовского прогнозирования при искажениях гипотетической плотности распределения вероятностей вектора параметров. В качестве множества допустимых плотностей распределения вероятностей вектора параметров рассматривается ϵ-окрестность гипотетической плотности, задаваемая с помощью Lp-метрики.

Ключевые слова: байесовский прогноз, робастность, искажения Густафсона.

ВВЕДЕНИЕ

Байесовский подход [1], [2] основан на использовании априорной информации о параметрах исследуемого объекта, что позволяет эффективно решать задачу прогнозирования при малом объеме экспериментальных данных. На практике часто необходимо построить прогноз для вектора показателей, компоненты которого могут быть зависимыми. Так как априорная информация может быть задана неточно, для корректного построения и использования прогноза необходимо исследовать его устойчивость (робастность) к искажениям гипотетической модели [3], [4].

В данной работе представлены результаты анализа робастности общей модели многомерного байесовского прогнозирования при искажениях априорной плотности распределения вероятностей вектора параметров, введенных в рассмотрение П. Густафсоном (1994). Компоненты прогнозируемого вектора показателей могут быть стохастически зависимыми.

ГИПОТЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ИСКАЖЕНИЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ РОБАСТНОСТИ

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы 3 случайных элемента: ненаблюдаемый вектор параметров θ, истинное значение которого неизвестно и является случайным вектором с априорной гипотетической плотностью распределения вероятностей (п. р. в.)

$$\pi^0(\theta),\ \theta \in \Theta \subseteq R^m; \tag{1}$$

стохастически зависящий от θ вектор наблюдений $x = (x_t)_{t=1}^T, x_t \in R^n$ с гипотетической условной п. р. в.

$$p^0(x|\theta), x \in X \subseteq R^{n \times T}; \tag{2}$$

неизвестный, подлежащий прогнозированию, вектор y, стохастически зависящий от x и θ, с гипотетической п. р. в.

$$g^0(y|x,\theta),\ y \in Y \subseteq R^n. \tag{3}$$

Пусть $\pi^0(\cdot), p^0(\cdot), g^0(\cdot)$ – непрерывные функции, $\pi^0(\theta) \neq 0, \forall \theta \in \Theta$.

Пусть гипотетическая модель допускает искажения: вектор параметров имеет п. р. в $\tilde{\pi}(\theta) \in \Pi_\varepsilon(\pi^0(\theta))$, где $\Pi_\varepsilon(\pi^0(\theta))$ – множество (ϵ-окрестность) допустимых п. р. в. θ. Для прогнозирующей статистики $\hat{y} = f(x): X \to Y$ определим функционал риска:

$$r(f(\cdot), \tilde{\pi}(\cdot)) = E\{d^2(f(x), y)\} = \iint_{XY} \tilde{s}(x,y) d^2(f(x), y) dx dy,$$

$$\tilde{s}(x,y) = \int_\Theta g^0(y|x,\theta) p^0(x|\theta) \tilde{\pi}(\theta) d\theta. \tag{4}$$

В (4) функция $d(\cdot,\cdot): R^n \times R^n \to R$ задает метрику в R^n.

Функционалом верхнего риска $r_+(\cdot)$ называется верхняя граница функционала риска [4]:

$$r(f(\cdot), \tilde{\pi}(\cdot)) \leq r_+(f(\cdot)), \forall \tilde{\pi}(\cdot) \in \Pi_\varepsilon(\pi^0(\cdot)).$$

Прогнозирующая статистика $f_*(\cdot)$ называется r_+-робастной [4], если она минимизирует функционал верхнего риска $r_+(\cdot)$:

$$r_+(f_*(\cdot)) = \min_{f(\cdot)} r_+(f(\cdot)). \tag{5}$$

АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ И ПОСТРОЕНИЕ РОБАСТНОГО ПРОГНОЗА ПРИ ИСКАЖЕНИЯХ ТИПА ГУСТАФСОНА

Зададим множество допустимых искаженных априорных п. р. в. θ с помощью L_p-нормы [5]:

$$\Pi_{\varepsilon_+}(\pi^0(\cdot)) = \left\{\pi_u^\varepsilon(\cdot): \|u\|_{L_p} \leq \varepsilon_+\right\}, u(\cdot): R^m \to R_+,\ \varepsilon_+ \geq 0, 1 \leq p < \infty, \tag{6}$$

$$\pi_u^\varepsilon(\theta)=\frac{\tilde{\pi}_u^\varepsilon(\theta)}{\int\limits_\Theta \tilde{\pi}_u^\varepsilon(\theta)d\theta};\ \tilde{\pi}_u^\varepsilon(\theta)=\begin{cases}\left(\left(\pi^0(\theta)\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{p}u(\theta)\right)^p, & 1\le p<\infty,\\ \pi^0(\theta)e^{u(\theta)}, & p=\infty.\end{cases} \tag{7}$$

Эта модель искажений впервые введена П. Густафсоном в 1994 г. Здесь $p\ge 1$ – параметр модели искажений; ε_+-максимально допустимый уровень искажений. Значение $\varepsilon_+=0$ соответствует гипотетической модели. Примем обозначения:

$$b(\varepsilon_+,p)=\begin{cases}\left(1+\frac{\varepsilon_+}{p}\right)^p-1, & 1\le p<\infty,\\ e^{\varepsilon_+}-1, & p=\infty, \varepsilon_+\ge 0;\end{cases}$$

$$W(x)=\iint\limits_{Y\Theta} g^0(y\,|\,x,\theta)p^0(x\,|\,\theta)\pi^0(\theta)d\theta dy, x\in X;$$

$$\Psi(x,y)=\sup_{\theta\in\Theta}\left(g^0(y|x,\theta)p^0(x|\theta)\right), x\in X, y\in Y.$$

Пусть $d(\cdot,\cdot)$ – Евклидова метрика в R^n, $r^0(\cdot)$ – гипотетический среднеквадратический риск прогнозирования: $r^0(f(\cdot))=r\left(f(\cdot),\pi^0(\cdot)\right)$, $f^0(\cdot)$ – байесовская прогнозирующая статистика:

$$f^0(x)=E_0\{y|x\}=\int\limits_Y y\cdot q_0(y|x)dy, x\in X, \tag{8}$$

где $q_0(y|x)$ – байесовская прогнозирующая п. р. в., вычисляемая через известные гипотетические п. р. в. $g^0(\cdot), p^0(\cdot), \pi^0(\cdot)$.

Теорема 1. Если семейство допустимых искажений гипотетической модели имеет вид (6), (7), то функционал

$$r_+(f(\cdot))=r^0(f(\cdot))+b(\varepsilon_+,p)\iint\limits_{XY}\Psi(x,y)d^2(f(x),y)dxdy \tag{9}$$

является функционалом верхнего риска.

Доказательство состоит в непосредственной оценке сверху выражения (6) и подстановке полученного результата в выражение для функционала риска (4) .

В следующей теореме построена прогнозирующая статистика, обладающая свойством r_+-робастности к искажениям (6), (7).

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 прогнозирующая статистика

$$f_*(x)=\frac{W(x)}{W(x)+b(\varepsilon_+,p)\int\limits_Y\Psi(x,y)dy}\left(f^0(x)+\frac{b(\varepsilon_+,p)}{W(x)}\int\limits_Y\Psi(x,y)\cdot ydy\right) \tag{10}$$

является r_+-робастной по отношению к функционалу верхнего риска (9).

Доказательство. Результат (10) получается как решение задачи вариационного исчисления (5).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для сравнения r_+-робастной байесовской прогнозирующей статистики (10) со статистикой (8) были проведены численные эксперименты. Результаты оценивания риска по методу Монте-Карло представлены в таблице.

Результаты численных экспериментов

Количество наблюдений	Параметры засоряющей функции		Оценка риска $r+$-робастной статистики	Оценка риска БПС	Относительный выигрыш, %
R	ε_+		$\hat{r}(f^*(\cdot))$	$\hat{r}(f^0(\cdot))$	$\frac{\hat{r}(f^0(\cdot))-\hat{r}(f^*(\cdot))}{\hat{r}(f^*(\cdot))}\times 100\,\%$
3	10	1	2,00664	2,55781	27,467
		0,8	2,09868	2,56746	22,337
		0,6	2,07914	2,36158	13,584
		0,4	2,01733	2,14283	6,221
		0,2	2,04348	2,03575	–0,378
15		1	1,84011	1,91548	4,096
		0,8	1,84896	1,87503	1,41
		0,6	1,83178	1,86079	1,584
		0,4	1,8866	1,90135	0,782
		0,2	1,8393	1,85019	0,592
50		1	1,80903	1,81068	0,091
3	15	1	2,005	3,1438	36,223
		0,8	2,09679	2,95789	29,112
		0,6	2,04581	2,66849	23,335
		0,4	2,01958	2,22209	9,113
		0,2	2,06472	2,09215	1,311
15		1	1,83351	2,0337	9,844
		0,8	1,85134	1,94811	4,967
		0,6	1,75924	1,83187	3,965
		0,4	1,89379	1,94765	2,765
		0,2	1,8034	1,81368	0,567
50		1	1,80018	1,82618	1,424

Эксперименты проводились для следующих значений параметров модели:

$$p = 2,\ n = 2,$$

$$\pi^0(\theta) = n_2\left(\theta\middle|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right), \quad p^0(x) = \prod_{t=1}^{T} p^0(x_t),$$

$$p^0(x_t) = g^0(y|x,\theta) = n_2\left(x\middle|\theta,\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\right), \quad u(\theta) = \begin{cases}\dfrac{\varepsilon_+}{\sqrt{\pi}R}, & \theta \in B_2\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},R\right),\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}$$

где $B_2(A,R)$ – окружность с центром в точке A и радиусом R. Для каждого набора параметров было выполнено 1000 итераций.

Эксперименты показали эффективность использования r_+-робастной байесовской прогнозирующей статистики (10), особенно при малом количестве наблюдений. Относительный выигрыш тем ощутимее, чем больше уровень искажения. Результаты вычислительных экспериментов согласуются с теоретическими выводами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по прикладной статистике / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, С. А. Айвазяна, Ю. Н. Тюрина. М., 1990. Т. 2.

2. *West M., Harrison J.* Bayesian Forecasting and Dynamic Models // Springer-Verlag New York, Inc. 1997.

3. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.

4. *Kharin A.* Minimax Robustness of Bayesian Forecasting under functional distortions of Probability Densities // Austrian Journal of Satitistics. 2002. V. 31, 2&3. P. 177–188.

5. *Gustafson P.* Local Sensivity of Posterior Expectations. D. Ph. Dissertation // Pittsburgh (Pennsylvania), Carnegie Mellon University. 1994.