ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТЕЙ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

А. Н. Старовойтов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
Гомель, Беларусь
E-mail: Astarovoytov@tut.by

При исследовании сетей массового обслуживания важную роль играет проблема инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональному виду распределения длительностей обслуживания заявок в узлах. Это связано с тем, что в реальных сетях распределение продолжительности обслуживания обычно отличается от показательного.

В работах [1–4] исследовались сети, в которых приборы могут частично выходить из строя, работая при этом в «щадящем» режиме. Однако в указанных работах предполагалось, что длительности обслуживания заявок имеют показательное распределение. В настоящей работе рассматриваются аналогичные сети, в которых продолжительности обслуживания имеют произвольный закон распределения, доказывается, что в этом случае стационарное распределение сохраняет свой вид.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов. Поступающий в нее поток заявок – простейший с параметром λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0l} направляется в l-й узел ($l=\overline{1,N}$; $\sum_{l=1}^{N}\pi_{0l}=1$). Заявка, обслуженная в l-м узле, мгновенно с вероятностью π_{lk} направляется в k-й узел, а с вероятностью π_{l0} покидает сеть ($l,k=\overline{1,N}$; $\sum_{k=0}^{N}\pi_{lk}=1$). В l-м узле находится единственный прибор, который может работать в r_l+1 режимах. Состояние l-го узла характеризуется парой чисел $x_l=(i_l, j_l)$, где i_l –число заявок в l-м узле, j_l – номер режима, в котором работает прибор в l-м узле ($l=\overline{1,N}$; $j_l=\overline{0,r_l}$). Назовем 0 основным режимом работы. Время пребывания в основном режиме работы имеет показательное распределение с параметром $\nu_{i_l,0}(l)$, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояния x_l, у которого $1\le j_l\le r_l-1$, время пребывания в режиме j_l также имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_{x_l}(l)$ прибор l-го узла переходит в режим j_l-1, а с интенсивностью $\nu_{x_l}(l)$ – в режим j_l+1. Время пребывания в последнем r_l режиме имеет показательное распределение с параметром $\varphi_{i_l,r_l}(l)$, после чего прибор переходит в $(r_l - 1)$-й режим. Во время переключения прибора с одного режима работы на другой число заявок в узле не меняется.

Дисциплина обслуживания заявок в узлах имеет следующую специфику. Заявка, поступающая в некоторый узел, обладает абсолютным приоритетом по отношению ко всем остальным заявкам, находящимся в узле. Вытесненная с прибора заявка вклинивается в начало очереди, сдвигая стоящие в ней заявки, причем при повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время в режиме, в котором работал прибор на момент указанного поступления.

Длительности обслуживания заявок в узлах не зависят от процесса поступления и друг от друга и имеют произвольную функцию распределения $B_l(x_l,t)$ для l-го узла, зависящую от состояния x_l (т. е. от числа заявок i_l в узле и режима j_l его работы), причем

$$\mu_{x_l}^{-1}(l) = \int_0^{\infty}(1 - B_l(x_l,t))dt, \tag{1}$$

т. е. $\mu_{x_l}(l)$ – скорость обслуживания l-м узлом, когда он находится в состоянии x_l.

Будем предполагать, что матрица (π_{lk}), где $l,k = \overline{0,N}$, неприводима $(\pi_{00} = 0)$. Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_l = \pi_{0l} + \sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \pi_{kl} \qquad (l = \overline{1,N}) \tag{2}$$

имеет единственное положительное решение (ε_l) $l = \overline{1,N}$.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t),\dots,x_N(t))$, где $x_l(t) = (i_l(t), j_l(t))$ – состояние l-го узла в момент времени t. В соответствии с вышесказанным здесь $i_l(t)$ – число заявок в l-м узле в момент времени t, $j_l(t)$ – номер режима работы l-го узла в момент времени t.

Цель работы – доказать инвариантность стационарного распределения $x(t)$ по отношению к виду распределений длительностей обслуживания при фиксированных математических ожиданиях.

МАРКОВСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть длительности обслуживания заявок в узлах имеют показательное распределение, т. е. для l-го узла $B_l(x_l,t) = 1 - \exp\{-\mu_{x_l}(l)t\}$ $(t > 0)$. Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_l) \mid i_l = 0, 1, \ldots; j_l = \overline{0,r_l}\}$.

В работе [1] установлено, что при выполнении условий

$$\nu_{i,j-1}(l)\mu_{i,j}(l)\varphi_{i-1,j}(l) = \nu_{i-1,j-1}(l)\mu_{i,j-1}(l)\varphi_{i,j}(l), \qquad i \ge 1, \qquad 1 \le j \le r_l, \tag{3}$$

$$\sum_{x\in X} q_x \prod_{l=1}^{N}\left[(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}\prod_{k=1}^{j_l}\nu_{0,k-1}(l)\varphi_{ok}^{-1}(l)\prod_{s=1}^{i_l}\mu_{sj_l}^{-1}(l)\right] < \infty, \tag{4}$$

процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$p_x = p_{x_1}(1)p_{x_2}(2)\dots p_{x_N}(N).$$

При этом

$$p_{(i_l,j_l)}(l) = \left[(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}\prod_{k=1}^{j_l}\nu_{0,k-1}(l)\varphi_{ok}^{-1}(l)\prod_{s=1}^{i_l}\mu_{sj_l}^{-1}(l)\right]p_{00}(l),$$

где $q_x = \lambda + \sum_{l=1}^{N}\left[\mu_{i_l,j_l}(l) + \nu_{i_l,j_l}(l) + \varphi_{i_l,j_l}(l)\right]$, а $(\varepsilon_l,\ l=\overline{1,N})$ – положительное решение уравнения трафика.

Хотя в [1] не конкретизировалась дисциплина обслуживания заявок в узлах, вышеприведенные результаты будут справедливы для дисциплины с абсолютным приоритетом для поступающей в узел заявки и дообслуживанием вытесненной с прибора заявки, что следует из свойств отсутствия последействия у показательного распределения.

НЕМАРКОВСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть теперь длительность обслуживания заявки прибором l-го узла имеет произвольную функцию распределения $B_l(x_l,t)$, зависящую от состояния x_l, причем математическое ожидание фиксировано с помощью равенства (1). Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема. Процесс $x(t)$ эргодичен, если выполнены условия (4), а функция распределения $B_l(x_l,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\nu_{i_l,j_l-1}(l)(1-B_l(i_l,j_l-1,t))\varphi_{i_l-1,j_l}(l) = \nu_{i_l-1,j_l-1}(l)(1-B_l(i_l,j_l,t))\varphi_{i_l,j_l}(l)\quad l=\overline{1,N}. \qquad (5)$$

При этом финальное стационарное распределение имеет вид:

$$p_x = p_{x_1}(1)p_{x_2}(2)\dots p_{x_N}(N),\ x\in X, \qquad (6)$$

где

$$p_{(i_l,j_l)}(l) = \left[(\lambda\varepsilon_l)^{i_l}\prod_{k=1}^{j_l}\nu_{0,k-1}(l)\varphi_{ok}^{-1}(l)\prod_{s=1}^{i_l}\mu_{sj_l}^{-1}(l)\right]p_{00}(l), \qquad (7)$$

ε_l находятся из (2), а

$$p_{00}(l) = \left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r_l}(\lambda\varepsilon_l)^i\prod_{k=1}^{j}\nu_{0,k-1}(l)\varphi_{ok}^{-1}(l)\prod_{s=1}^{i}\mu_{sj}^{-1}(l)\right]^{-1},\ l=\overline{1,N}.$$

Отметим, что соотношения (5) являются в некотором смысле обобщением условий квазиобратимости узлов (3), когда длительность обслуживания заявки имеет произвольную функцию распределения $B_l(x_l,t)$. Так в случае, когда $B_l(x_l,t) = 1-\exp\{-\mu_{x_l}(l)t\}$ $(t>0)$, интегрируя соотношения (5) в промежутке $[0;+\infty)$, получим условия (3).

Доказательство. Пусть $\psi_{lk}(t)$ – остаточное время обслуживания с момента t до момента завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в l-м узле (нумерация позиций в узле осуществляется от «хвоста» очереди к прибору), $\psi_l(t) = (\psi_{l1}(t), \dots, \psi_{l,i_l(t)}(t))$. Поскольку, вообще говоря, $x(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\xi(t) = \{x(t), \psi(t)\}$, добавляя к $x(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_N(t))$. Пусть выполнены условия (3), (4), т. е. в случае, когда $x(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$, а, следовательно, в общем случае и процесса $\xi(t)$, так как $\xi(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент. Строгое доказательство этого факта может быть проведено, по-видимому, с помощью предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [5]. Введем обозначение

$$F(x,y) = F(x, y_{11}, \dots, y_{1i_1}; y_{21}, \dots, y_{2i_2}; \dots; y_{N1}, \dots, y_{Ni_N}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} P\{x(t) = x, \psi_{l1}(t) < y_{l1}, \dots, \psi_{li_l}(t) < y_{li_l}, l = \overline{1,N}\}.$$

Тогда для $F(x,y)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений (вывод этой системы уравнений осуществляется достаточно стандартным способом и поэтому не приводится, детальное обоснование справедливости подобной системы уравнений, например, для многолинейной СМО с потерями содержится в [5, с. 383-387]):

$$[\lambda + \sum_{l=1}^{N} (\nu_{x_l}(l) + \varphi_{x_l}(l))] F(x,y) = \sum_{l=1}^{N} \left[\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,i_l}} - \left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,i_l}} \right)_{y_{l,i_l}=0} \right] + \quad (8)$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \pi_{l0} \left(\frac{\partial F(x+e_{l1}, y)}{\partial y_{l,i_l+1}} \right)_{y_{l,i_l+1}=0} + \lambda \sum_{l=1}^{N} \pi_{0l} B_l(x_l, y_{l,i_l}) F(x - e_{l1}, y) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \sum_{s=1, s\neq l}^{N} \pi_{sl} B_l(x_l y_{l,i_l}) \left(\frac{\partial F(x + e_{s1} - e_{k1}, y)}{\partial y_{s,i_s+1}} \right)_{y_{s,i_s+1}=0} + \sum_{l=1}^{N} \pi_{ll} B_l(x_l y_{l,i_l}) \left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,i_l}} \right)_{y_{l,i_l}=0} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \nu_{i_l, j_l - 1}(l) F(x - e_{l2}, y) + \sum_{l=1}^{N} \varphi_{i_l, j_l+1}(l) F(x + e_{l2}, y).$$

Разобьем эту систему уравнений на уравнения локального баланса следующим образом:

$$\lambda F(x,y) = \sum_{l=1}^{N} \pi_{l0} \left(\frac{\partial F(x+e_{l1}, y)}{\partial y_{l,i_l+1}} \right)_{y_{l,i_l+1}=0}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,i_l}} \right)_{y_{l,i_l}=0} - \frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,i_l}} - \pi_{ll} B_l(x_l y_{l,i_l}) \left(\frac{\partial F(x,y)}{\partial y_{l,i_l}} \right)_{y_{l,i_l}=0} = \quad (10)$$

$$= \lambda \pi_{0l} B_l(x_l, y_{l,i_l}) F(x - e_{l1}, y) + \sum_{s=1, s \neq l}^{N} \pi_{sl} B_l(x_l y_{l,i_l}) \left(\frac{\partial F(x + e_{s1} - e_{k1}, y)}{\partial y_{s,i_s+1}} \right)_{y_{s,i_s+1}=0},$$

$$(\nu_{i_l,j_l}(l) + \varphi_{i_l,j_l}(l)) F(x, y) = \nu_{i_l,j_l-1}(l) F(x - e_{l2}, y) + \varphi_{i_l,j_l+1}(l) F(x + e_{l2}, y), \quad (11)$$

$$l = \overline{1, N}.$$

Неотрицательным абсолютно непрерывным по y решением уравнений (9 – 11), а следовательно, и уравнений (8) является

$$F(x, y) = p(x) \prod_{l=1}^{N} \prod_{k=1}^{i_l} \mu_{k,j_l}(l) \int_0^{y_{lk}} [1 - B_l(k, j_l, u)] du, \quad (12)$$

где $p(x)$ – стационарная вероятность состояния x процесса $x(t)$ в марковском случае. Действительно, подставляя (12) в (9), деля обе части полученного соотношения на $\lambda F(x, y)$, получим следствие уравнения трафика $1 = \sum_{l=1}^{N} \varepsilon_l \pi_{l0}$. Подставляя (12) в (10), деля обе части полученного соотношения на $F(x, y) B_l(x_l, y_{l,i_l})$ и умножая на $\varepsilon_l \mu_{i_l,j_l}(l) \int_0^{y_{l,i_l}} [1 - B_l(i_l, j_l, u)] du$, получим уравнение трафика (2). И наконец, подставляя (12) в (11) и учитывая (5), получим верное тождество. Так как $F(x, +\infty) = p(x)$, то это и доказывает (6), (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский Ю. В., Нуеман А. Ю.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. 2001. № 3. С. 129–134.

2. *Малинковский Ю. В., Гаврилюк А. А.* Инвариантное распределение открытых экспоненциальных сетей массового обслуживания с зависящими от состояния сети многорежимными стратегиями обслуживания // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2004. № 4(25). С. 124–128.

3. *Нуеман А. Ю.* Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками // Вести. ТГУ. 2002. № 1(1). С. 90–93.

4. *Малинковский Ю. В., Нуеман А. Ю.* Инвариантная мера марковского сетевого процесса с многорежимными стратегиями // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2002. № 6(15). С. 183–188.

5. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1966.