ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С ДОХОДАМИ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Т. В. Русилко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь
E-mail: romaniuk@grsu.by

В статье предлагается использовать замкнутую по структуре сеть массового обслуживания в качестве модели процесса обработки исков и премий в страховой компании. Для прогнозирования ожидаемого дохода страховой компании используется теория марковских процессов с доходами.

Ключевые слова: страховая компания, иск, страховая премия, доход, сеть массового обслуживания, марковский процесс.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим функционирование страховой компании, заключающей однотипные договора страхования. Общее число договоров, заключенных компанией к моменту времени t, $t \in [0,T]$, описывается функцией времени $K(t)$, причем функция $K(t)$ ограничена достаточно большой константой N, например, N – число жителей региона, в котором функционирует компания. Каждый из клиентов компании может находиться в одном из следующих состояний: C_0 – на этапе «ожидания» (не требуется вносить премии, страховой случай не произошел); C_1 – на этапе оценки предъявленного иска; C_2 – на этапе оценки вносимой премии; C_3 – на этапе выплаты по иску или оплаты премии. Пусть $\mu_{01}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, $\mu_{02}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ – соответственно вероятности предъявления иска и премии на интервале времени $[t, t+\Delta t]$, то есть вероятности перехода из состояния C_0 в C_i, $i = 1, 2$. Времена перехода из состояний C_1 в C_3, C_2 в C_3, C_3 в C_0 распределены по показательному закону с интенсивностями μ_1, μ_2, μ_3 соответственно. Значит, время обслуживания клиентов каждым из m_1 оценщиков исков распределено по показательному закону с интенсивностью μ_1, каждым из m_2 оценщиков премий – с интенсивностью μ_2. Время обслуживания клиентов каждым из m_3 кассиров считаем также распределенным по показательному закону с интенсивностью μ_3.

Состояние страховой компании в момент времени t может быть описано вектором

$$k(t) = (k, t) = (k_1(t),\ k_2(t),\ k_3(t)), \tag{1}$$

где $k_i(t)$ – число клиентов, находящихся в момент времени t в состоянии C_i, $i=\overline{1,3}$; число клиентов в состоянии C_0 составляет $k_0(t)=K(t)-\sum_{i=1}^{3}k_i(t)$. Очевидно, что $k(t)$ является марковским процессом с непрерывным временем и конечным множеством состояний.

Моделью описанного процесса обработки исков и премий может служить замкнутая по структуре сеть массового обслуживания, общее число однотипных заявок в которой описывается функцией времени $K(t)$. Сеть состоит из узлов S_0, S_1, S_2, S_3, узел S_0 соответствует внешней среде. Вероятности перехода заявок между узлами сети следующие: $p_{0i}\neq 0$, $i=1,2$, $p_{13}=p_{23}=p_{30}=1$, $p_{ij}=0$ в иных случаях. Остальные параметры функционирования сети описаны выше. Состояние сети в момент времени t описывается вектором (1), где $k_i(t)$ – число заявок в системе S_i, $i=\overline{1,3}$, в момент времени t.

ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Очевидно, что доход страховой компании связан с получением премий от страхователей, а расход обусловлен выплатой по искам и затратами на обслуживание клиентов. Обозначим через $V(k,t)$ полный ожидаемый доход, который получит страховая компания за время t, если в начальный момент времени компания находится в состоянии (k,t) [1]. В течение малого промежутка времени Δt страховая компания может остаться в состоянии (k,t) либо совершить переход в одно из следующих состояний: $(k-I_3,t)$, $(k+I_3-I_1,t)$, $(k+I_3-I_2,t)$, $(k+I_1,t)$, $(k+I_2,t)$. Здесь под I_i будем подразумевать вектор размерности 3, все компоненты которого равны нулю, за исключением i-й, $i=\overline{1,3}$.

Будем считать, что если на интервале времени $[t,t+\Delta t]$ страховая компания совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k-I_3,t)$ с вероятностью $\mu_3\min(m_3,k_3(t))\Delta t+o(\Delta t)$, то доход страховой компании составит $-R_3$ условных единиц плюс ожидаемый доход $V(k-I_3,t)$, который компания получит за оставшееся время t, если бы начальным было состояние $(k-I_3,t)$. При переходе из состояния (k,t) в состояние $(k+I_3-I_i,t)$ на интервале времени $[t,t+\Delta t]$ доход компании составит $-R_i$ у. е. плюс $V(k+I_3-I_i,t)$, вероятность такого перехода равна $\mu_i\min(m_i,k_i(t))\Delta t+o(\Delta t)$, $i=1,2$. Переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_1,t)$, осуществляющийся на интервале времени $[t,t+\Delta t]$ с вероятностью $\mu_{01}(t)k_0(t)\Delta t+o(\Delta t)$, приносит страховой компании $-R_{01}$ у. е. дохода плюс $V(k+I_1,t)$. Переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_2,t)$ за малый промежуток времени Δt осуществляется с вероятностью $\mu_{02}(t)k_0(t)\Delta t+o(\Delta t)$ и приносит страховой компании R_{02} у. е. дохода плюс $V(k+I_2,t)$. То есть R_3, R_1 и R_2 – потери страховщика, связанные соответственно с обслуживанием клиентов на этапе выплаты, на этапе оценки предъявленного иска и на этапе оценки вносимой премии; R_{01} – потери в связи с выплатой по иску, R_{02} – доход от поступления страховой премии. Кроме этого, будем считать, что страховая компания получает доход в размере R у. е. за единицу времени в течение пребывания ее в состоянии (k,t). Компания остается в состоянии (k,t) в течение малого промежутка времени Δt с вероятностью $1-\left[\sum_{i=1}^{3}\mu_i \min(m_i,k_i(t))+\sum_{i=1}^{2}\mu_{0i}(t)k_0(t)\right]\Delta t$, при этом ее доход составит $R\Delta t+V(k,t)$.

Тогда полный ожидаемый доход $V(k,t+\Delta t)$ в момент времени $t+\Delta t$ удовлетворяет следующей системе разностных уравнений:

$$
\begin{aligned}
V(k,t+\Delta t) &= \left\{1-\left[\sum_{i=1}^{3}\mu_i \min(m_i,k_i(t))+\sum_{i=1}^{2}\mu_{0i}(t)k_0(t)\right]\Delta t\right\}(R\Delta t+V(k,t))+\\
&+\mu_3 \min(m_3,k_3(t))\Delta t(-R_3+V(k-I_3,t))+\\
&+\sum_{i=1}^{2}\mu_i \min(m_i,k_i(t))\Delta t(-R_i+V(k+I_3-I_i,t))+\\
&+\mu_{01}(t)k_0(t)\Delta t(-R_{01}+V(k+I_1,t))+\mu_{02}(t)k_0(t)\Delta t(R_{02}+V(k+I_2,t))+o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

Приведенная система может быть представлена в виде системы разностно-дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V(k,t)}{\partial t} &= R-\sum_{i=1}^{3}\mu_i \min(m_i,k_i(t))R_i-\mu_{01}(t)k_0(t)R_{01}+\mu_{02}(t)k_0(t)R_{02}+\\
&+\mu_3 \min(m_3,k_3(t))(V(k-I_3,t)-V(k,t))+\\
&+\sum_{i=1}^{2}\mu_i \min(m_i,k_i(t))(V(k+I_3-I_i,t)-V(k,t))+\\
&+\sum_{i=1}^{2}\mu_{0i}(t)k_0(t)(V(k+I_i,t)-V(k,t)).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Далее будем рассматривать случай большого числа договоров в страховой компании, положим, что функция $K(t)$ принимает достаточно большие значения $1 \ll K(t)\le N$ [2]. Перейдем к вектору относительных переменных $\xi(t)=(\xi,t)=\left(\frac{k_1(t)}{K(t)},\frac{k_2(t)}{K(t)},\frac{k_3(t)}{K(t)}\right)$. Возможные значения вектора $\xi(t)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$
G(t)=\left\{x(t)=(x,t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)):\ x_i(t)\ge 0,\ \sum_{i=1}^{3}x_i(t)\le 1\right\},
$$

в котором они располагаются в узлах трехмерной решетки на расстоянии $\varepsilon(t)=\frac{1}{K(t)}$ друг от друга. При увеличении значений функции $K(t)$ «плотность заполнения» множества $G(t)$ возможными значениями рассматриваемого вектора $\xi(t)$ увеличивается и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение в области $G(t)$. При этих предположениях можем считать, что полный ожидаемый доход страховой компании непрерывно изменяется в зависимости от начального состояния (x,t). Поэтому можем ввести в рассмотрение функцию плотности распределения (концентрации) ожидаемого дохода $v(x,t)$ в области $G(t)$. По аналогии, например, с плотностью распределения массы

$$\rho = \frac{m}{V} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(x_1 \le \xi_1 < x_1 + \varepsilon, x_2 \le \xi_2 < x_2 + \varepsilon, x_3 \le \xi_3 < x_3 + \varepsilon)}{\varepsilon^3},$$

плотность распределения дохода определяется как следующий предел

$$v(x,t) = \lim_{\varepsilon(t) \to 0} \frac{V(x_1(t) \le \xi_1 < x_1(t) + \varepsilon(t), x_2(t) \le \xi_2 < x_2(t) + \varepsilon(t), x_3(t) \le \xi_3 < x_3(t) + \varepsilon(t))}{\varepsilon^3(t)}. \quad (3)$$

Очевидно, что плотность распределения дохода $v(x,t)$ будет обладать свойствами, аналогичными свойствам плотности распределения вероятностей:

$$\frac{1}{V_{sum}} \iiint_{G(t)} v(x,t)dx = 1.$$

А доход $V(\xi,t)$ обладает свойством

$$V(\xi,t)\big|_{\xi=(x_1,x_2,x_3)} = 0, \; V(\xi \in D,t) = \iiint_{D(t)} v(x,t)dx.$$

Из (3) следует, что для $V(k,t)$ справедлива следующая аппроксимация при $K(t) \to \infty$:

$$V(k,t) = V(x \cdot K,t) = \varepsilon^3(t)v(x,t) \text{ или } v(x,t) = K^3(t)V(x \cdot K,t).$$

Тогда $\dfrac{\partial V(k,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial(\varepsilon^3(t)v(x,t))}{\partial t} = 3\varepsilon^2(t)\varepsilon'(t)v(x,t) + \varepsilon^3(t)\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ и уравнение (2) для плотности распределения дохода может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = &-3\varepsilon'(t)K(t)v(x,t) + R - \sum_{i=1}^{3}\mu_i \min(l_i(t),x_i(t))R_i - \mu_{01}(t)x_0(t)R_{01} + \\ &+\mu_{02}(t)x_0(t)R_{02} + K(t)\mu_3 \min(l_3(t),x_3(t))(v(x-e_3,t) - v(x,t)) + \\ &+\sum_{i=1}^{2} K(t)\mu_i \min(l_i(t),x_i(t))(v(x+e_3-e_i,t) - v(x,t)) + \\ &+\sum_{i=1}^{2} K(t)\mu_{0i}(t)x_0(t)(v(x+e_i,t) - v(x,t)),\end{aligned} \quad (4)$$

где $l_i(t) = \dfrac{m_i}{K(t)}$, $e_i = \varepsilon(t)I_i$, $i = \overline{1,3}$.

Полагая, что $v(x,t)$ дифференцируема по t и почти всюду дважды дифференцируема по x_i, $i = \overline{1,3}$, функции $v(x + e_3 - e_i, t)$, $v(x \pm e_i, t)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки (x,t). Уравнение (4) можно записать в виде:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=-3\varepsilon'(t)K(t)v(x,t)+R-\sum_{i=1}^{3}\mu_i\min(l_i(t),x_i(t))R_i-\mu_{01}(t)x_0(t)R_{01}+$$

$$+\mu_{02}(t)x_0(t)R_{02}+\mu_3\min(l_3(t),x_3(t))\left[-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_3(t)}+\frac{\varepsilon(t)}{2}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_3{}^2(t)}\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\mu_i\min(l_i(t),x_i(t))\left[\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_3(t)}-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i(t)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon(t)}{2}\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_3{}^2(t)}-2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_3(t)\partial x_i(t)}+\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i{}^2(t)}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\mu_{0i}(t)x_0(t)\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i(t)}+\frac{\varepsilon(t)}{2}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i{}^2(t)}\right]+O(\varepsilon^2(t)),$$

Последнее уравнение с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2(t))$ можем записать в более компактном виде. Сформулируем результат в виде следующей теоремы.

Теорема. Плотность распределения дохода $v(x,t)$ при условии, что она дважды дифференцируема по x, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{3}A_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i(t)}-\frac{\varepsilon(t)}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}B_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i(t)\partial x_j(t)}-3\varepsilon'(t)K(t)v(x,t)+$$
$$+\left[R-\sum_{i=1}^{3}\mu_i\min(l_i(t),x_i(t))R_i+\left(1-\sum_{j=1}^{3}x_j(t)\right)(\mu_{02}(t)R_{02}-\mu_{01}(t)R_{01})\right],\qquad(5)$$

где $$A_i(x,t)=\sum_{j=1}^{3}\mu_j q_{ji}\min(l_j(t),x_j(t))-\mu_{0i}(t)\left(1-\sum_{j=1}^{3}x_j(t)\right),\ \mu_{03}(t)=0,\qquad(6)$$

$$B_{ii}(x,t)=\sum_{j=1}^{3}\mu_j q^*_{ji}\min(l_j(t),x_j(t))-\mu_{0i}(t)\left(1-\sum_{j=1}^{3}x_j(t)\right),\ i=\overline{1,3},\qquad(7)$$

$$q_{ji}=\begin{cases}1, & j=i,\ i=\overline{1,3},\\ -1, & j\neq i,\ i=3,\\ 0, & \text{в иных случаях;}\end{cases}\qquad q_{ji}=\begin{cases}-1, & j=i,\ i=\overline{1,3},\\ -1, & j\neq i,\ i=3,\\ 0, & \text{в иных случаях;}\end{cases}$$

$$B_{i3}(x,t)=\mu_i\min(l_i(t),x_i(t))=B_{3i}(x,t),\ i=\overline{1,2}.$$

Учитывая (7), выражение $\frac{\varepsilon(t)}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}B_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i(t)\partial x_j(t)}$ можно отнести к $O(\varepsilon^2(t))$. Поэтому будем рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3} A_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i(t)} - 3\varepsilon'(t)K(t)v(x,t) +$$

$$+\left[R - \sum_{i=1}^{3}\mu_i \min(l_i(t), x_i(t))R_i + \left(1 - \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\right)\left(\mu_{02}(t)R_{02} - \mu_{01}(t)R_{01}\right)\right].$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ в области $G(t)$, разделив обе части уравнения на объем области $G(t)$:

$$\frac{1}{m(G(t))}\iiint_{G(t)}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx = -\frac{1}{m(G(t))}\sum_{i=1}^{3}\iiint_{G(t)} A_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i(t)}dx - \frac{3}{m(G(t))}\iiint_{G(t)}\varepsilon'(t)K(t)v(x,t)dx +$$

$$+\frac{1}{m(G(t))}\iiint_{G(t)}\left[R - \sum_{i=1}^{3}\mu_i \min(l_i(t), x_i(t))R_i + \left(1 - \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\right)\left(\mu_{02}(t)R_{02} - \mu_{01}(t)R_{01}\right)\right]dx. \quad (8)$$

Считая, что в левой части этого равенства допустима перемена порядка интегрирования и дифференцирования, получим

$$\frac{1}{m(G(t))}\iiint_{G(t)}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx = \frac{1}{m(G(t))}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{G(t)} v(x,t)dx = \frac{\partial}{\partial t}\overline{v_G}(t),$$

где $\overline{v_G}(t)$ – среднее по x значение дохода при условии изменения начального состояния (x,t) в области $G(t)$.

Рассмотрим интегралы в правой части (8):

$$\frac{3}{m(G(t))}\iiint_{G(t)}\varepsilon'(t)K(t)v(x,t)dx = 3\varepsilon'(t)K(t)\overline{v_G}(t).$$

При расчете оставшихся интегралов используем интегрирование по частям, а также предположим, что выполняются следующие граничные условия [3]:

$$A_3(x,t)v(x,t)\Big|_{x_3=0}^{x_3=1-x_1-x_2} = 0,\ A_2(x,t)v(x,t)\Big|_{x_2=0}^{x_2=1-x_1-x_3} = 0,\ A_3(x,t)v(x,t)\Big|_{x_1=0}^{x_1=1-x_2-x_3} = 0,$$

которые означают, что не допускается поток дохода через границы области $G(t)$ или что в граничных точках области $G(t)$ поставлены отражающие экраны. Тогда, учитывая, что $\dfrac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_i(t)} = const$, получим

$$\frac{1}{m(G(t))}\iiint_{G(t)} A_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i(t)}dx = -\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_i(t)}\overline{v_G}(t),\ \ i = \overline{1,3}.$$

То есть приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{v_G}(t) = \overline{v_G}(t)\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial A_i(x,t)}{\partial x_i(t)} - 3\varepsilon'(t)K(t)\right) +$$

$$+\frac{1}{m(G(t))}\iiint_{G(t)}\left[R - \sum_{i=1}^{3}\mu_i \min(l_i(t), x_i(t))R_i + \left(1 - \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\right)\left(\mu_{02}(t)R_{02} - \mu_{01}(t)R_{01}\right)\right]dx. \quad (9)$$

Из (6) видим, что коэффициенты $A_i(x,t)$ представляют собой кусочно-линейные функции, то есть (9) – дифференциальное уравнение с кусочно-постоянной правой частью. Обозначим множество индексов компонент вектора $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ через $\Omega(t) = \{1, 2, 3\}$. Разобьем $\Omega(t)$ на два непересекающихся множества $\Omega_0(\tau,t)$, $\Omega_1(\tau,t)$, такие, что $\Omega_0(\tau,t) = \{j : l_j(t) < x_j(t) \le 1\}$, $\Omega_1(\tau,t) = \{j : 0 \le x_j(t) \le l_j(t)\}$. При фиксированном t число разбиений такого типа равно $2^3 = 8$, $\tau = \overline{1,8}$. Каждое разбиение будет задавать в множестве $G(t)$ непересекающиеся области $G_\tau(t)$, такие, что

$$G_\tau(t) = \left\{ x(t) : l_i(t) < x_i(t) \le 1, i \in \Omega_0(\tau, t); 0 \le x_j(t) \le l_j(t), j \in \Omega_1(\tau, t); \sum_{c=1}^{3} x_c(t) \le 1 \right\},$$

$$\tau = 1, 2, \ldots, 8, \quad \bigcup_{\tau=1}^{8} G_\tau(t) = G(t).$$

Теперь в каждой из областей разбиения фазового пространства можем записать явный вид (9) и при определенный начальных условиях найти средний ожидаемый доход для каждой из областей $G_\tau(t)$.

Например, зададим следующее разбиение $\Omega_0(1,t) = \{1,2,3\}$, $\Omega_1(1,t) = \{\varnothing\}$, $\tau = 1$, что соответствует наличию очередей на этапах обслуживания и соответствует реальной ситуации обслуживания клиентов в страховых компаниях. Тогда решая (9), при начальном условии $\overline{v_{G_1}}(0) = S$ можем определить средний ожидаемый доход при изменении начального состояния по области $G_1(t)$.

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим функционирование страховой компании, заключающей однотипные договора страхования. Общее число договоров страхования, заключенных к моменту времени t, описывается функцией времени $K(t) = 40000 + \frac{40000}{2\sin(2\pi t/364) + 10}$. Остальные параметры функционирования страховой компании следующие: $\mu_{01}(t) = 0.0001$, $\mu_{02}(t) = 0.001$, $\mu_1 = 0.01$, $\mu_2 = 0.03$, $\mu_3 = 0.1$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$, $R = 10$, $R_{01} = 400$, $R_{02} = 40$, $R_1 = 3$, $R_2 = 1$, $R_3 = 0.3$, $\overline{v_{G_1}}(0) = 5000$. Тогда зависимость среднего ожидаемого дохода при условии изменения начального состояния по области $G_1(t)$ от времени изображена на рис. 1.

Пример 2. В условии примера 1 положим, что интенсивности предъявления исков и премий описываются следующими периодическими функциями времени:

$$\mu_{01}(t) = 0.0001 + \frac{0.0003}{4\sin(2\pi t/364) + 10}, \quad \mu_{02}(t) = 0.001 + \frac{0.01}{10\sin(2\pi t/364) + 30}.$$

Число заключенных договоров страхования описывается функцией

$$K(t) = 30000 + \frac{40000}{10\sin(2\pi t/364 + 50) + 15}.$$

Тогда решение (9) имеет вид рис. 2.

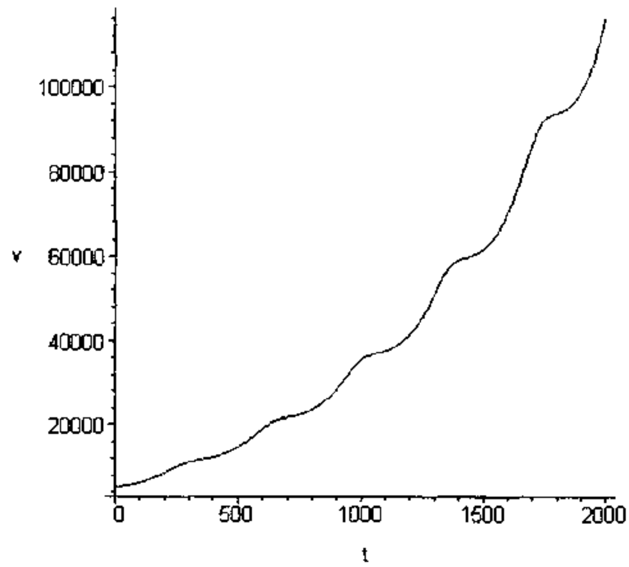

Рис. 1. Прогноз дохода $\overline{v_{G_1}}(t)$ для примера 1

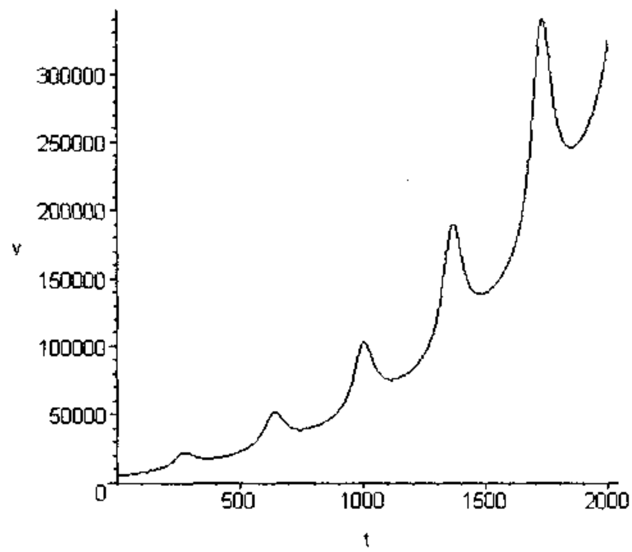

Рис. 2. Прогноз дохода $\overline{v_{G_1}}(t)$ для примера 2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ховард Р. А.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. радио, 1964. 192 с.

2. *Медведев Г. А.* Об оптимизации замкнутой системы массового обслуживания // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 6. С. 65–73.

3. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.

4. *Маталыцкий М. А., Романюк Т. В.* Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения: Монография. Гродно, 2003. 200 с.