АНАЛИЗ ДОХОДОВ В ЗАМКНУТОЙ МАРКОВСКОЙ СЕТИ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

А. В. Паньков

Гродненский государственный университет
Гродно, Беларусь
E-mail: a.pankov@grsu.by

Проведен анализ доходов в марковской сети с центральной системой, которая является моделью изменения доходов в банковской сети. Доходы систем сети при переходах между ее состояниями зависят от времени.

Ключевые слова: марковская сеть с доходами, замкнутая сеть.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим замкнутую марковскую сеть массового обслуживания (МО) с доходами, состоящую из периферийных систем обслуживания (СМО) $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ и центральной системы S_n; будем полагать, что все СМО сети – однолинейные. Тогда состояние такой сети можно описать вектором

$$k(t) = (k, t) = (k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n, t),$$

где k_i – число заявок в системе S_i, $i = \overline{1,n}$. Заявки после обслуживания в периферийной СМО S_i поступают на обслуживание в центральную СМО S_n, а затем с вероятностью p_{ni} возвращается на обслуживание обратно, $\sum_{i=1}^{n-1} p_{ni} = 1$. Времена обслуживания заявок в системе S_i распределены по показательному закону с параметром μ_i, $i = \overline{1,n}$. Если заявками в сети служат транзакции о переводе денег между системами сети, то такая сеть может служить моделью изменения доходов в банковской сети, состоящей из центрального банка и ряда периферийных. В течение всего своего функционирования сеть получает некие доходы – увеличивает (уменьшает) общую сумму дохода на величины, называемые доходами от переходов между состояниями сети. Ранее [1] были рассмотрены случаи, когда доходы от переходов между состояниями зависели только от текущего состояния. Положим, что в данном случае доходы от переходов сети между состояниями зависят от текущего состояния и от времени и являются детерминированными функциям времени. Такая ситуация является наиболее приближенной к практике.

1. АНАЛИЗ ДОХОДОВ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СМО

Через $v_n(k,t)$ обозначим полный ожидаемый доход, который получает система S_n за время t, если в начальный момент времени сеть была в состоянии k. Пусть сеть находится в состоянии (k,t). Предположим, что система S_n получает доход в размере $r_n(k)$ у. е. за единицу времени в течение всего периода пребывания сети в состоянии k. Если она остается в состоянии (k,t) в течение интервала времени Δt, то ожидаемый доход системы S_n составит $r_n(k)\Delta t$ плюс ожидаемый доход $v_n(k,t)$, который она принесет за оставшиеся t единиц времени. Вероятность такого события равна $1-\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)\Delta t + o(\Delta t)$, где $u(k_i)=\begin{cases}1, k_i>0\\ 0, k_i=0\end{cases}$ – функция Хевисайда. Когда сеть за время Δt совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k-I_i+I_n, t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_i u(k_i)\Delta t + o(\Delta t)$, она приносит системе S_n доход в размере $r(k-I_i+I_n,t)$, и ожидаемый доход системы S_n составит $r(k-I_i+I_n,t)$ плюс ожидаемый доход $v_n(k-I_i+I_n,t)$, который будет получен за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было $(k-I_i+I_n,0)$, $i=\overline{1,n-1}$. Здесь I_i – вектор размерности n, состоящий из нулей, за исключением i-й компоненты, которая равна 1. Аналогично, когда сеть совершает переход из состояния (k,t) в состояние $(k+I_i-I_n,t+\Delta t)$ с вероятностью $\mu_n p_{ni} u(k_n)\Delta t + o(\Delta t)$, она приносит системе S_n доход в размере $(-R(k+I_i-I_n,t))$, и ожидаемый доход системы S_n составит $-R(k+I_i-I_n,t)$ плюс ожидаемый доход сети за оставшееся время, если бы начальным состоянием сети было состояние $(k+I_i-I_n,0)$, $i=\overline{1,n-1}$. Заметим, что значения $r_n(k)$, $r(k,t)$ и $R(k,t)$ имеют различные размерности. Описанное выше сведем в табл. 1.

Таблица 1

Переходы между состояниями сети	Вероятности переходов	Доходы системы S_n от переходов между состояниями
$(k,t)\to(k,t+\Delta t)$	$1-\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)\Delta t + o(\Delta t)$	$v_n(k,t)+r_n(k)\Delta t$
$(k,t)\to(k+I_i-I_n,t+\Delta t)$	$\mu_n p_{ni} u(k_n)\Delta t + o(\Delta t)$	$-R(k+I_i-I_n,t)+v_n(k+I_i-I_n,t)$
$(k,t)\to(k-I_i+I_n,t+\Delta t)$	$\mu_i u(k_i)\Delta t + o(\Delta t)$	$r(k-I_i+I_n,t)+v_n(k-I_i+I_n,t)$

Для доходов центральной СМО можно получить систему разностных уравнений:

$$v_n(k,t+\Delta t)=\left(1-\sum_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)\Delta t + o(\Delta t)\right)\left[r_n(k)\Delta t + v_n(k,t)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\mu_i u(k_i)\Delta t+o(\Delta t)\right)\left[r(k-I_i+I_n,t)+v_n(k-I_i+I_n,t)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\mu_n u(k_n)p_{ni}\Delta t+o(\Delta t)\right)\left[-R(k+I_i-I_n,t)+v_n(k+I_i-I_n,t)\right],$$

из которой следует система разностно-дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_n(k,t)}{dt}=r_n(k)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i u(k_i)v_n(k,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\mu_i u(k_i)r(k-I_i+I_n,t)-\mu_n u(k_n)p_{ni}R(k+I_i-I_n,t)\right]+ \qquad (1)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\mu_i u(k_i)v_n(k-I_i+I_n,t)+\mu_n u(k_n)p_{ni}v_n(k+I_i-I_n,t)\right].$$

2. АНАЛИЗ ДОХОДОВ ПЕРИФЕРИЙНЫХ СИСТЕМ И СЕТИ В ЦЕЛОМ

Для нахождения доходов, которые получают периферийные системы S_i, $i=\overline{1,n-1}$, аналогично можно составить табл. 2. Для этого через $v_i(k,t)$ обозначим полный ожидаемый доход, который получает периферийная система S_i за время t, если в начальный момент времени сеть была в состоянии k, $i=\overline{1,n-1}$.

Таблица 2

Переходы между состояниями сети	Вероятности переходов	Доходы системы S_i от переходов между состояниями
$(k,t)\to(k,t+\Delta t)$	$1-\sum_{j=1}^{n}\mu_j u(k_j)\Delta t+$ $+o(\Delta t)$	$v_i(k,t)+r_i(k)\Delta t$
$(k,t)\to$ $(k+I_i-I_n,t+\Delta t)$	$\mu_n p_{ni}u(k_n)\Delta t+$ $+o(\Delta t)$	$v_i(k+I_i-I_n,t)$
$(k,t)\to$ $(k-I_i+I_n,t+\Delta t)$	$\mu_i u(k_i)\Delta t+$ $+o(\Delta t)$	$v_i(k-I_i+I_n,t)$

Тогда будем иметь

$$v_i(k,t+\Delta t)=\left(1-\sum_{j=1}^{n}\mu_j u(k_j)\Delta t+o(\Delta t)\right)\left[r_i(k)\Delta t+v_i(k,t)\right]-$$

$$-\left(\mu_i u(k_i)\Delta t+o(\Delta t)\right)r(k-I_i+I_n,t)+\left(\mu_n u(k_n)p_{ni}\Delta t+o(\Delta t)\right)R(k+I_i-I_n,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\mu_j u(k_j)\Delta t+o(\Delta t)\right)v_i(k-I_j+I_n,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\mu_n u(k_n)p_{nj}\Delta t+o(\Delta t)\right)v_i(k+I_j-I_n,t),$$

откуда следует, что

$$\frac{dv_i(k,t)}{dt} = r_i(k) - \sum_{j=1}^{n} \mu_j u(k_j) v_i(k,t) +$$
$$+ \left[\mu_n u(k_n) p_{ni} R(k + I_i - I_n) - \mu_i u(k_i) r(k - I_i + I_n)\right] + \tag{2}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \left[\mu_j u(k_j) v_i(k - I_j + I_n, t) + \mu_n u(k_n) p_{nj} v_i(k + I_j - I_n, t)\right],\ i = \overline{1, n-1}.$$

Просуммировав ожидаемые доходы центральной и периферийных СМО, получим, что суммарный доход всех систем сети $\Theta(k,t) = v_n(k,t) + \sum_{i=1}^{n-1} v_i(k,t)$, как следует из (1), (2), удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{d\Theta(k,t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} r_i(k) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i u(k_i) \Theta(k,t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\mu_i u(k_i) \Theta(k - I_i + I_n, t) + \mu_n u(k_n) p_{ni} \Theta(k + I_i - I_n, t)\right]. \tag{3}$$

Заметим, что общий доход сети $\Theta(k,t)$ не зависит от $r(k,t)$, $R(k,t)$. Этого следовало ожидать, поскольку, согласно закону сохранения денежной массы в замкнутой сети (если центральная СМО получает доход, то периферийные СМО несут убытки и наоборот), ее величина возрастает только за счет роста процентов от денежной массы, хранящейся в системах сети, что выражается величиной $\sum_{i=1}^{n} r_i(k)$.

В [2] получено аналитическое решение системы дифференциальных уравнений (1) операционным методом. Для решения использовался пакет математических вычислений Mathematica. Опыт показывает, что получить аналитическое решение не всегда возможно из-за больших размерностей решаемых систем дифференциальных уравнений. К примеру, при числе систем сети, равном 3, и числе заявок, циркулирующих в сети, равном 5, число состояний и число уравнений $L = C_{n+K-1}^{n-1} = 21$, а при числе систем и числе заявок в сети, равном 7 и 5 соответственно, число состояний достигает уже 462. Для практических целей интерес представляет именно анализ доходов в сетях с наибольшим числом систем и заявок. В данной работе предлагается находить решение систем (1) – (3) численным методом.

3. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДОХОДОВ ПРИ БОЛЬШИХ t

В системе уравнений (2) опустим индекс i. Пусть $V(t)$ – вектор-столбец полных ожидаемых доходов некоторой системы сети с компонентами $v(j,t)$, $j = \overline{1,l}$. Тогда система уравнений (2) в матричной форме запишется в виде

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q(t) + AV(t). \tag{4}$$

Вектор $Q(t)$ обычно называется вектором нормы выручки, компоненты его обозначим $q(j,t)$, $j=\overline{1,l}$. В [2] получено решение уравнения (4) операционным методом:

$$U(s)=\frac{1}{s}(sI-A)^{-1}G(s)+(sI-A)^{-1}V(0), \tag{5}$$

где $U(s)$ и $G(s)$ – преобразования Лапласа векторов $V(t)$ и $Q(t)$ соответственно, I – единичная матрица.

Матрица $(sI-A)^{-1}$ всегда содержит стохастическую матрицу S с сомножителем $\frac{1}{s}$, поскольку s является множителем определителя матрицы $(sI-A)$ [3]. Остальным слагаемым матрицы $(sI-A)^{-1}$ соответствуют переходные составляющие с коэффициентами вида $e^{-\alpha t}$, $te^{-\alpha t}$ и т. д., которые стремятся к нулю с ростом t. Матрицы, содержащие эти компоненты в качестве сомножителей, сами являются инфинитезимальными матрицами, как и матрица A [3]. Можно обозначить переходные составляющие матрицы $(sI-A)^{-1}$ символом $\psi(s)$ и записать

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s}S+\Psi(s), \tag{6}$$

откуда следует, что

$$H(t)=S+T(t),$$

где матрица $T(t)$ стремится к нулевой матрице при $t\to\infty$.

Если подставить (6) в (5), то получим

$$U(s)=\frac{1}{s}\left[\frac{1}{s}S+\Psi(s)\right]+G(s)+\left[\frac{1}{s}S+\Psi(s)\right]V(0),$$

т. е.

$$U(s)=\frac{1}{s^2}SG(s)+\frac{1}{s}\Psi(s)G(s)+\frac{1}{s}SV(0)+\Psi(s)V(0). \tag{7}$$

Исследуем поведение величины $V(t)$ при больших t, определив вид прообраза каждого слагаемого равенства (7).

Рассмотрим вначале случай, когда вектор $Q(t)$ не зависит от времени. Как следует из (3), системе уравнений (4) при $Q(t)=Q$ удовлетворяет общий суммарный доход всех систем сети, в этом случае соотношения (5) и (7) имеют вид:

$$U(s)=\frac{1}{s}(sI-A)^{-1}Q+(sI-A)^{-1}V(0), \tag{8}$$

$$U(s)=\frac{1}{s^2}SQ+\frac{1}{s}\Psi(s)Q+\frac{1}{s}SV(0)+\Psi(s)V(0). \tag{9}$$

Как известно,

$$t\risingdotseq\frac{1}{s^2},\ 1\risingdotseq\frac{1}{s}.$$

Поэтому прообраз первого слагаемого $\frac{1}{s^2}SQ$ в (9) представляет вектор прямых с коэффициентами наклона, которые являются компонентами вектора SQ.

Можно показать [3], что матрица $\Psi(s)$ представима в виде

$$\Psi(s)=\sum_i \frac{D_i}{s-\lambda_i},$$

где D_i – некоторые не зависящие от s матрицы, а $\lambda_i<0$ – характеристические числа. Следовательно,

$$\frac{1}{s}\Psi(s)=\sum_i\left(-\frac{D_i}{\lambda_i s}+\frac{Dli}{\lambda_i(s-\lambda_i)}\right).$$

Значит, прообразом $\frac{1}{s}\Psi(s)$ служит сумма

$$\sum_i\left(-\frac{D_i}{\lambda_i}\right)+\sum_i\frac{D_i}{\lambda_i}e^{\lambda_i t}=\Psi(0)+\sum_i\frac{D_i}{\lambda_i}e^{\lambda_i t},$$

в которой второе слагаемое исчезает с ростом t. Поэтому прообразом второго слагаемого $\frac{1}{s}\Psi(s)Q$ в (9) является величина $\Psi(0)Q$.

Прообраз слагаемого $\frac{1}{s}SV(0)$ равен $SV(0)$, а прообраз $\Psi(s)V(0)$ соответствует переходным составляющим, которые стремятся к нулю при $t\to\infty$.

Таким образом, когда t велико и $Q(t)=Q$, вектор $V(t)$ имеет вид:

$$V(t)=SQt+\Psi(0)Q+SV(0). \tag{10}$$

Вектор $g=SQ$ обычно называется вектором прибылей. Если обозначить

$$V=\Psi(0)Q+SV(0),$$

то уравнение (10) при больших t примет вид

$$V(t)=gt+V,$$

т. е. доходы приблизительно линейно зависят от времени. Напомним, что это будет всегда выполняться для общего суммарного дохода сети, а также для доходов систем сети в случае, когда $r(k,t)=r(k)$, $R(k,t)=R(k)$ (в этом случае $Q(t)=Q$).

4. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим сеть со следующими параметрами: $n=4$, $K=9$, $p_{4i}=\frac{1}{n-1}$, $i=\overline{1,n-1}$, $\mu_1=1$, $\mu_2=3$, $\mu_3=5$, $\mu_4=9$. Поскольку сеть замкнута, то ее число состояний равно $L=C_{n+K-1}^{n-1}=220$, некоторые из них: (0,0,0,9), (0,0,1,8), (0,0,2,7), (0,0,3,6), (0,0,4,5), (0,0,5,4), (0,0,6,3), (0,0,7,2), (0,0,8,1), (0,0,9,0), (0,1,0,8), (0,1,1,7), (0,1,2,6), (0,1,3,5), (0,1,4,4), (0,1,5,3), (0,1,6,2), (0,1,7,1), (0,1,8,0) и т. д., переобозначим их от 1 то 220 соответственно. Будем находить ожидаемые доходы центральной СМО. Пусть доходы $r_4(k)$ – целые числа из отрезка $[0;100]$, функции $r(k,t)$ и $R(k,t)$ имеют вид $c\cos(ax+b)$ или $c\sin(ax+b)$, где коэффициенты a, b и c – действительные числа, принимающие значения из дискретного множества $\{-20;-19{,}5;-19,\ldots,19;19{,}5;20\}$.

Систему уравнений (1) можно записать в виде (4), где

$$V^T(t)=\left(V_1(t),V_2(t),\ldots,V_{220}(t)\right).$$

Для решения этого дифференциального уравнения необходимо задать вектор начальных условий. Пусть компонентами этого вектора будут целые числа из отрезка $[0;100]$.

Алгоритм поиска численного решения системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений реализован в виде программы для системы математических вычислений Mathematica. В ходе выполнения расчета программа вычисляет состояния рассматриваемой системы МО, строит матрицу коэффициентов A уравнения (11), вычисляет вектор доходов $Q(t)$. Все основные функции скомпонованы в виде пакета функций для Mathematica.

Решение системы уравнений (1) в системе Mathematica производится с помощью оператора `NDSolve`, который по умолчанию производит вычисления с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка.

На рис. 1–4 приведены графики изменения доходов $v(40,t)$, $v(55,t)$, $v(141,t)$, которые соответствуют состояниям (0,4,5,0), (0,9,0,0), (3,0,4,2).

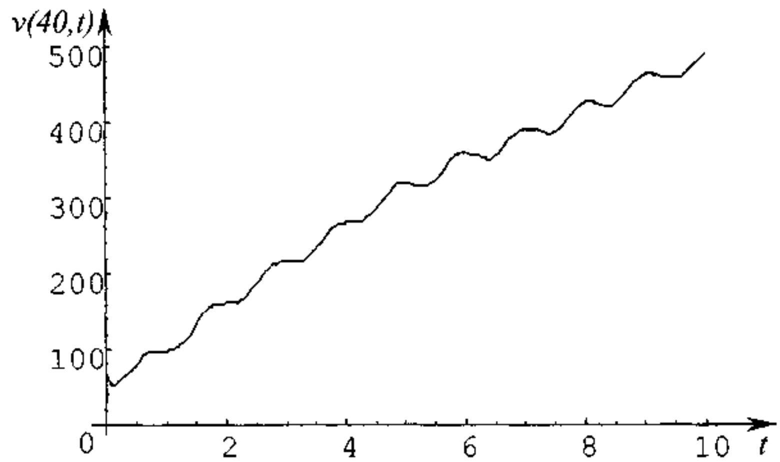

Рис. 1. Изменение доходов $v(40,t)$

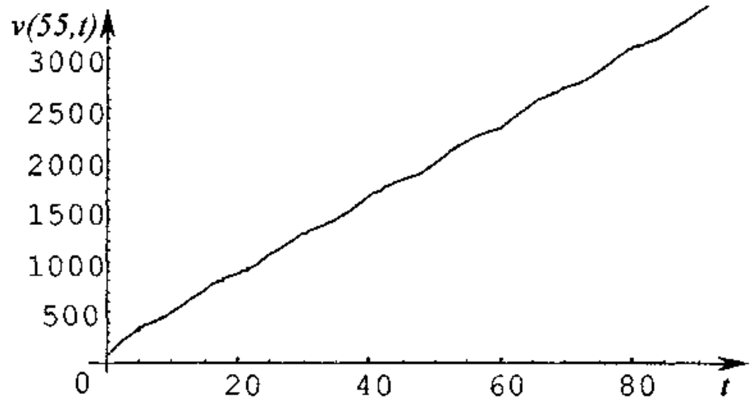

Рис. 2. Изменение доходов $v(55,t)$

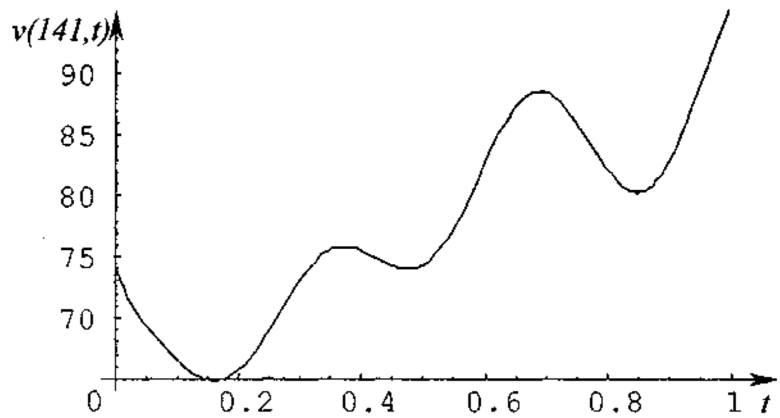

Рис. 3. Изменение доходов $v(141,t)$

Рис. 4. Изменение доходов $v(141,t)$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маталыцкий М. А., Паньков А. В.* Вероятностный анализ доходов в банковских сетях // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ. Мат. Информ. 2004. №2. С. 86–91.

2. *Matalytsky M., Pankov A.* Analysis of one Markov queueing network with incomes // Proceedings of BWWQT–2005. Minsk: BSU, 2005 (в печати).

3. *Ховард Р. А.* Динамическое программирование и марковские процессы. М.: Сов. радио, 1964. 191 с.