ОБНАРУЖЕНИЕ МОМЕНТА ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ GARCH-ПРОЦЕССА

Ю. Б. Буркатовская [1], С. Э. Воробейчиков [2]

[1] *Томский политехнический университет*
[2] *Томский государственный университет*
Томск, Россия
E-mail: vassa@vmm.tsu.ru, sev@vmm.tsu.ru

Рассматривается задача гарантированного последовательного обнаружения момента изменения параметров GARCH-процесса. Строится решающая процедура, и находятся ее основные характеристики: вероятности ложной тревоги и запаздывания в обнаружении разладки. Работоспособность процедуры подтверждается компьютерными экспериментами.

Ключевые слова: момент разладки, GARCH-процесс.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 04–01–00855.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время при построении математических моделей экономических процессов широкое применение находят процессы с условной неоднородностью – ARCH и GARCH-процессы [1, 2]. Такие модели позволяют при небольшом числе параметров учитывать характерные особенности данных, связанные с кластерностью данных. При исследовании данных на большом промежутке времени оказывается невозможным использовать единственную модель, поскольку характер поведения процесса на различных участках может существенно различаться. В этом случае используют несколько моделей процесса. При этом возникает задача определения моментов времени, в которые происходит изменение параметров модели. Для решения этой задачи предложен ряд алгоритмов [3–5]. В этих работах предлагаются алгоритмы обнаружения изменения среднего значения процесса, основанные на сравнении выборочных средних значений процесса на начальном и конечном участках наблюдений. В данной работе предлагается алгоритм обнаружения момента изменения параметров GARCH-процесса, использующий метод обнаружения разладки в процессах рекуррентного типа [6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть случайный процесс X_t описывается уравнением

$$X_t = R_t \varepsilon_t, \tag{1}$$

где ε_t – независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\varepsilon_t = 0, D\varepsilon_t = 1$, и

$$R_t^2 = \gamma + \alpha R_{t-1}^2 + \beta X_{t-1}^2. \tag{2}$$

Предположим, что в неизвестный неслучайный момент времени θ вектор параметров $\{\gamma, \alpha, \beta\}$ меняет свое значение с $\{\gamma_0, \alpha_0, \beta_0\}$ на $\{\gamma_1, \alpha_1, \beta_1\}$. Параметры процесса неотрицательны, причем $\alpha + \beta < 1$. Ставится задача по наблюдениям за процессом X_t обнаружить момент разладки θ.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШАЮЩЕЙ ПРОЦЕДУРЫ

Пусть p – некоторое положительное число. Введем обозначение $Z_t = |X_t|^p$. Тогда, учитывая (1), имеем:

$$Z_t = |R_t|^p |\varepsilon_t|^p. \tag{3}$$

Предположим, что величина $\sigma_p = M|\varepsilon_t|^p < \infty$. Тогда (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} Z_t &= \sigma_p |R_t|^p + |R_t|^p \xi_t, \\ \xi_t &= |\varepsilon_t|^p - \sigma_p. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, задача обнаружения момента θ сводится к задаче обнаружения момента изменения условного математического ожидания величин Z_t. Далее будем использовать обозначение $R_{t,i}$, если параметры процесса (2) принимают значения $\{\gamma_i, \alpha_i, \beta_i\}$ с момента 0 до момента t включительно. Пусть $a_t = |R_t|^p$, $a_{t,i} = |R_{t,i}|^p$, $b_t = \max(a_{t,0}, a_{t,1})$. Определим статистику $J(t)$ следующим образом:

$$J(t) = \frac{(Z_t - \sigma_p a_{t,0})^2 - (Z_t - \sigma_p a_{t,1})^2}{b_t^2} = \frac{\sigma_p (a_{t,1} - a_{t,0})(2Z_t - \sigma_p a_{t,1} - \sigma_p a_{t,0})}{b_t^2}. \tag{5}$$

Изучим свойства этих статистик. При $t \le \theta$, учитывая, что в этом случае $|R_t|^p = |R_{t,0}|^p = a_{t,0}$, и подставляя (4) в (5), имеем

$$J(t)=\frac{\sigma_p\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\left(2a_{t,0}\left(\sigma_p+\xi_t\right)-\sigma_p a_{t,1}-\sigma_p a_{t,0}\right)}{b_t^2}=$$

$$=\frac{\sigma_p\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\left(\sigma_p a_{t,0}-\sigma_p a_{t,1}+2a_{t,0}\xi_t\right)}{b_t^2}=$$

$$=-\frac{\sigma_p^2\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)^2}{b_t^2}+2\sigma_p\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\frac{a_{t,0}}{b_t^2}\xi_t.$$

При $t>\theta$, представляя $\left|R_t\right|^p$ в виде $a_{t,1}-\left(a_t-a_{t,1}\right)$, имеем:

$$J(t)=\frac{\sigma_p\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\left(2a_{t,1}\left(\sigma_p+\xi_t\right)-\sigma_p a_{t,1}-\sigma_p a_{t,0}\right)}{b_t^2}+Y(t)=$$

$$=\frac{\sigma_p\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\left(\sigma_p a_{t,1}-\sigma_p a_{t,0}+2a_{t,1}\xi_t\right)}{b_t^2}+Y(t)=$$

$$=+\frac{\sigma_p^2\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)^2}{b_t^2}+2\sigma_p\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\frac{a_{t,1}}{b_t^2}\xi_t+Y(t), \tag{6}$$

где $Y(t)=\dfrac{2\sigma_p\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\left(a_t-a_{t,1}\right)\left(\sigma_p+\xi_t\right)}{b_t^2}$.

Пусть $F_t=\sigma\{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_t\}$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\{\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_t\}$. Тогда величины a_t и $a_{t,i}$ согласованы с F_{t-1}, и, согласно свойствам условных математических ожиданий, имеем:

$$M\left[J(t)\middle|F_{t-1}\right]=\begin{cases}-r_{t-1}, & \text{при } t\le\theta,\\ +r_{t-1}+q_{t-1}, & \text{при } t>\theta,\end{cases} \tag{7}$$

где

$$r_{t-1}=\frac{\sigma_p^2\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)^2}{b_t^2},\quad q_{t-1}=\frac{2\sigma_p^2\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)\left(a_t-a_{t,1}\right)}{b_t^2}. \tag{8}$$

Определим последовательность случайных моментов остановки $\tau_i=\tau_i(H)$ следующим образом:

$$\tau_0=0,\quad \tau_i=\inf\left\{T>\tau_{i-1}:\ \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{T}r_{t-1}\ge H\right\}, \tag{9}$$

где H – положительный параметр процедуры. С каждым моментом τ_i свяжем решающую статистику J_i:

$$J_i=\frac{1}{H}\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i}\mu(t)J(t), \tag{10}$$

где весовые коэффициенты $\mu(t)=1$ при $\tau_{i-1}\le t<\tau_i$, а $\mu(\tau_i)$ находится из уравнения:

$$\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i-1} r_{t-1}+\mu(\tau_i)r_{\tau_i-1}=H. \tag{11}$$

Заметим, что $0<\mu(\tau_i)\le 1$. Из (7), (10) и (11) получаем:

$$J_i=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{H}\eta_{i,0}, & \text{при } \tau_i\le\theta,\\ +1+\dfrac{1}{H}\eta_{i,1}+\dfrac{1}{H}\zeta_i, & \text{при } \tau_{i-1}>\theta,\end{cases} \tag{12}$$

$$\eta_{i,k}=2\sigma_p^2\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i}\mu(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})a_{t,k}}{b_t^2}\xi_t, \tag{13}$$

$$\zeta_i=2\sigma_p\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i}\mu(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})(a_t-a_{t,1})}{b_t^2}(\sigma_p+\xi_t). \tag{14}$$

При сделанных предположениях относительно параметров процесс (2) является стационарным. Легко показать, что $a_t^{2/p}-a_{t,1}^{2/p}=\alpha_1^{t-\theta}\left(R_{\theta,0}^2-R_{\theta,1}^2\right)$. Так как $0\le\alpha_1<1$, то $\zeta_i\to 0$ при $\tau_{i-1}-\theta\to\infty$, то есть при $H\to\infty$, поэтому при расчете характеристик процедуры величиной ζ_i/H можно пренебречь. Для исследования свойств величин $\eta_{i,k}$ введем усеченный момент остановки $\tau_i(N)=\min(\tau_i,N)$ и рассмотрим случайные величины

$$\eta_{i,k}(N)=2\sigma_p^2\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau(N)}\mu(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})a_{t,k}}{b_t^2}\xi_t.$$

Используя свойства условных математических ожиданий, получаем:

$$M\eta_{i,k}(N)=2\sigma_p^2M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{N}\mu(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})a_{t,k}}{b_t^2}\chi_{[t\le\tau_i]}\xi_t=$$

$$=2\sigma_p^2\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{N}MM\left[\mu(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})a_{t,k}}{b_t^2}\chi_{[t\le\tau_i]}\xi_t\middle|F_{t-1}\right]=$$

$$2\sigma_p^2\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{N}M\mu(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})a_{t,k}}{b_t^2}\chi_{[t\le\tau_i]}M\left[\xi_t\middle|F_{t-1}\right]=0.$$

Оценим теперь дисперсию случайной величины $\eta_{i,k}(N)$.

$$M\eta_{i,k}^2(N)=4\sigma_p^4M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i(N)}\sum_{s=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i(N)}\mu(t)\mu(s)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})a_{t,k}}{b_t^2}\frac{(a_{s,1}-a_{s,0})a_{s,k}}{b_s^2}\xi_t\xi_s=$$

$$=4\sigma_p^4M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{N}\mu^2(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})^2a_{t,k}^2}{b_t^4}\chi_{[t\le\tau_i]}\xi_t^2+$$

$$+8\sigma_p^4M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{N}\sum_{s=\tau_{i-1}+1}^{t-1}\mu(t)\frac{(a_{t,1}-a_{t,0})a_{t,k}}{b_t^2}\frac{(a_{s,1}-a_{s,0})a_{s,k}}{b_s^2}\chi_{[t\le\tau_i]}\xi_t\xi_s.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что второе слагаемое равно нулю. Первое слагаемое равно

$$4\sigma_p^4 \sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{N} MM\left[\mu^2(t)\frac{\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)^2 a_{t,k}^2}{b_t^4}\chi[t\le\tau_i]\xi_t^2\middle|F_{t-1}\right]=$$

$$=4\sigma_p^4\left(\sigma_{2p}-\sigma_p^2\right)M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i(N)}\mu^2(t)\frac{\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)^2 a_{t,k}^2}{b_t^4}.$$

Учитывая, что $a_{t,k}^2 \le b_k^2$, и используя (8) и определение моментов τ_i (9), получаем:

$$\sigma_p^2 M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i(N)}\mu^2(t)\frac{\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)^2 a_{t,k}^2}{b_t^4}\le M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i(N)}\mu(t)\frac{\sigma_p^2\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)^2}{b_t^2}\le M\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i}\mu(t)r_{t-1}=H.$$

Поскольку $\tau_i(N)\to\tau_i$ почти наверное при $N\to\infty$, имеем:

$$M\eta_{i,k}=0,\quad D\eta_{i,k}\le 4\sigma_p^2\left(\sigma_{2p}-\sigma_p^2\right)H. \tag{15}$$

Учитывая (12), получаем, что математическое ожидание статистик (10) меняется с -1 на 1 после момента разладки θ, и их дисперсии не превосходят $4\sigma_p^2\left(\sigma_{2p}-\sigma_p^2\right)/H$. В связи с этим процедура обнаружения разладки строится следующим образом. Выбираются параметры $H>0$ и $\delta:|\delta|<1$. Строится последовательность статистик J_i по формулам (8), (10). Решение о наличии разладки принимается, когда значение статистики превышает параметр δ.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕДУРЫ ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКИ

Основными характеристиками последовательных процедур обнаружения момента изменения свойств случайного процесса являются вероятности ложной тревоги и запаздывания в обнаружении разладки. Благодаря выбору моментов остановки τ_i дисперсии решающих статистик ограничены сверху постоянной величиной, зависящей от параметров процедуры, что позволяет получить точные формулы для вероятностей ошибок.

Оценим вероятность ложной тревоги, то есть принятия решения о наличии разладки при $\tau_i\le\theta$.

$$p_0=P\{J_i>\delta|\tau_i\le\theta\}=P\left\{\frac{1}{H}\eta_{i,0}>\delta+1\right\}\le\frac{4\sigma_p^2\left(\sigma_{2p}-\sigma_p^2\right)}{H(1+\delta)^2}.$$

Аналогично можно оценить вероятность запаздывания, то есть принятия решения об отсутствии разладки при $\tau_{i-1}>\theta$.

$$p_1=P\{J_i>\delta|\tau_{i-1}>\theta\}=P\left\{\frac{1}{H}\eta_{i,1}<\delta-1\right\}\le\frac{4\sigma_p^2\left(\sigma_{2p}-\sigma_p^2\right)}{H(1-\delta)^2}.$$

Окончательно получаем:

$$p_1 \le \frac{4\sigma_p^2\left(\sigma_{2p}-\sigma_p^2\right)}{H(1-\delta)^2},\ p_0 \le \frac{4\sigma_p^2\left(\sigma_{2p}-\sigma_p^2\right)}{H(1+\delta)^2}. \tag{16}$$

Как видно из (16), параметр процедуры H обратно пропорционален вероятности ложной тревоги. Поэтому достаточно малые значения p_0 требуют больших значений H, а так как $r_t \le \sigma_p^2$, следовательно, $\tau_i - \tau_{i-1} \ge H/\sigma_p^2$. Поэтому уменьшение p_0 приводит к увеличению $\tau_i - \tau_{i-1}$, а значит, запаздывания в обнаружении разладки. Так как оценка вероятности p_0 получена с использованием неравенства Чебышева, она является завышенной. Получим оценки для p_0 и p_1 при больших значениях H, используя один из вариантов центральной предельной теоремы для мартингалов.

Лемма [7]. Пусть $0<\Delta<1$ и $C>0$. Предположим, что $\{u_t, F_t\}_{t\ge 0}$ – стохастическая последовательность типа мартингал-разность, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{gathered} |u_t| \le \Delta \quad \forall t \ge 0, \\ \sum_{t=1}^{\infty} M\left[u_t^2 \middle| F_{t-1}\right] > C \quad \text{п. н.} \end{gathered} \tag{17}$$

Пусть

$$\tau = \inf\left\{T : \sum_{t=1}^{T} M\left[u_t^2 \middle| F_{t-1}\right] \ge C\right\}. \tag{18}$$

Тогда существует функция $\rho:(0,\infty)\to[0,2]$, не зависящая от распределения мартингал-разности, такая, что $\lim\limits_{x\to 0}\rho(x)=0$ и

$$\sup_x \left| P\left\{\sum_{t=1}^{\tau} u_t \le x\right\} - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right)\right| \le \rho\left(\frac{\Delta}{\sqrt{C}}\right).$$

Используем эту лемму для доказательства асимптотической нормальности величин $\eta_{i,k}$ (13). Введем обозначение $\tilde{\xi}_t = \xi_t \chi\left[|\xi_t| \le \sqrt[4]{H}\right]$ и рассмотрим случайные величины

$$u_t = \frac{2\sigma_p^2}{\sqrt{H}}\mu(t)\frac{\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)}{b_t}\xi_t,\ \tilde{u}_t = \frac{2\sigma_p^2}{\sqrt{H}}\mu(t)\frac{\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)}{b_t}\left(\tilde{\xi}_t - M\tilde{\xi}_t\right).$$

Для них выполнены условия (17) и (18), следовательно, при $C = 4\sigma_p^2 D\tilde{\xi}_t$ и $\Delta = H^{-1/4}$ для достаточно больших H верно утверждение леммы. Далее рассмотрим разность

$$\sum_{t=1}^{\tau} u_t - \sum_{t=1}^{\tau}\tilde{u}_t = \frac{2\sigma_p^2}{\sqrt{H}}\sum_{t=1}^{\tau}\mu(t)\frac{\left(a_{t,1}-a_{t,0}\right)}{b_t}\left(\xi_t - \tilde{\xi}_t + M\tilde{\xi}_t\right).$$

Используя свойства условных математических ожиданий, получаем:

$$M\left(\sum_{t=1}^{\tau} u_t - \sum_{t=1}^{\tau} \widetilde{u}_t\right)^2 \le \frac{4\sigma_p^2}{H} M \sum_{t=1}^{\tau} r_{t-1} M\left(\xi_t - \widetilde{\xi}_t + M\widetilde{\xi}_t\right)^2 \le 4\sigma_p^2 M\left(\xi_1 - \widetilde{\xi}_1 + M\widetilde{\xi}_1\right)^2.$$

Учитывая, что $\widetilde{\xi}_1 \to \xi_1$ почти наверное при $H \to \infty$, имеем:

$$\lim_{H\to\infty} \sup_x \left| P\left\{\sum_{t=1}^{\tau} u_t \le x\right\} - \Phi\left(x \Big/ 2\sigma_p \sqrt{\left(\sigma_{2p} - \sigma_p^2\right)}\right)\right| = 0.$$

Заметим, что введенный момент остановки τ совпадает с моментом τ_1, определяемым формулой (9). Аналогичный результат можно получить для $\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} u_t$. Поскольку при $x > 0$

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{H}} \eta_{i,k} > x\right\} \le P\left\{\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} u_t\right\},$$

то для расчета вероятностей p_0 и p_1 на основании леммы можно использовать асимптотическую нормальность величин $\sum_{t=\tau_{i-1}+1}^{\tau_i} u_t$:

$$\begin{aligned} p_0 &\le \Phi\left(-\sqrt{H}(1+\delta) \Big/ 2\sigma_p \sqrt{\left(\sigma_{2p} - \sigma_p^2\right)}\right), \\ p_1 &\le \Phi\left(-\sqrt{H}(1-\delta) \Big/ 2\sigma_p \sqrt{\left(\sigma_{2p} - \sigma_p^2\right)}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Использование этого факта при подборе параметров процедуры позволяет уменьшить запаздывание в обнаружении разладки при заданных вероятностях ошибок.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Для проверки работоспособности процедуры были проведены компьютерные эксперименты. Моделировался процесс (1), где шумы ε_t имели гауссовское распределение. Момент разладки θ полагался равным 1000, для каждого набора параметров рассматривалось 5000 реализаций процесса. В таблице приведены результаты экспериментов. Здесь $\hat{T}_0$ – среднее время между ложными тревогами, $\hat{T}_1$ – среднее время запаздывания в обнаружении разладки, $\hat{p}_0$ и $\hat{p}_1$ – выборочные вероятности ложной тревоги и запаздывания, p_0 и p_1 – теоретические вероятности ошибок, полученные по формулам (19). Возможность использования этих формул подтверждена статистической проверкой гипотезы о гауссовости распределения величин $\eta_{i,k}$.

Результаты численного моделирования

$\gamma_0 = 0,9; \alpha_0 = 0,4; \beta_0 = 0,2; \gamma_1 = 1,2; \alpha_1 = 0,3; \beta_1 = 0,5$

H	δ	$\hat{T}_0$	$\hat{T}_1$	$\hat{p}_0$	$\hat{p}_1$	p_0	p_1
5	0	525	56	0,117	0,220	0,215	0,215
10	0	2034	101	0,049	0,119	0,131	0,131
15	0	8121	153	0,023	0,077	0,085	0,085
20	0	28087	177	0,009	0,059	0,057	0,057
5	0,2	767	64	0,080	0,286	0,171	0,263
10	0,2	5324	115	0,024	0,190	0,089	0,186
15	0,2	21834	172	0,009	0,138	0,050	0,137
20	0,2	104166	202	0,002	0,110	0,028	0,103
5	–0,2	364	52	0,169	0,172	0,263	0,171
10	–0,2	1346	90	0,093	0,085	0,186	0,089
15	–0,2	3690	131	0,054	0,040	0,137	0,050
20	–0,2	8143	158	0,031	0,027	0,103	0,028

Как видно из таблицы, процедура обнаруживает момент разладки при хорошем согласии между аналитическими и выборочными значениями вероятностей ошибок. При этом среднее время между ложными тревогами как минимум на порядок меньше времени запаздывания. Выборочные вероятности не превышают существенно теоретических. Отклонение выборочных вероятностей ошибок от теоретических в меньшую сторону наблюдается в случае, когда дисперсии решающих статистик намного меньше их верхней границы, определенной формулой (15). Увеличение параметра H приводит к увеличению среднего времени между ложными тревогами и времени запаздывания. Также среднее время между ложными тревогами растет с увеличением параметра δ, а время запаздывания – с уменьшением параметра δ, что следует из принципа построения процедуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Engle R. F.* Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation // Econometrica. 1982. № 50(4). P. 987–1007.

2. *Bollerslev T.* Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. V. 31. P. 307–327.

3. *Chu C.-S. J.* Detecting Parameter Shift in GARCH Models // Econometric Reviews. 1995. V. 14. P. 241–266.

4. *Mikosh T., Stărică C.* Change of Structure in Financial Time Series, Long Range Dependence and the GARCH Model. Preprint. 1999.

5. *Kokoszka P.S., Leipus R.* Detection and Estimation of Changes in Regime / Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M. S. (Eds.) Long-Range Dependence: Theory and Applications. Birkhauser, Boston. 2002. P. 325–337.

6. *Воробейчиков С. Э., Конев В. В.* Последовательный метод обнаружения разладок случайных процессов рекуррентного типа // Автоматика и телемеханика. 1984. № 5. С. 27–38.

7. *Freedman D.* Brownian Motion and Diffusion. Holden Day, San Francisko, 1971.