ДИФФУЗИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СЕТЕЙ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

М. А. Маталыцкий, Т. В. Романюк

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
г. Гродно, Беларусь
romaniuk@grsu.by

В работе рассматривается диффузионная аппроксимация замкнутых по структуре сетей, в которых число обслуживаемых заявок может зависеть от времени, а также сетей с ограниченным временем ожидания заявок в очередях. Описано применение сетей в качестве моделей процессов обработки исков в страховых компаниях.

Ключевые слова: сеть с центральной системой обслуживания, уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка, разнотипные иски.

Исследование сетей массового обслуживания (МО) и их применение в качестве математических моделей различных объектов постоянно поддерживалось на кафедре теории вероятностей и математической статистики БГУ. Первые существенные результаты в этой области были получены Г. А. Медведевым как раз по диффузионной аппроксимации замкнутых экспоненциальных сетей и их оптимизации [1; 2]. Позднее в Гродно стали развиваться другие методы анализа сетей в переходном режиме [3; 7], которые применялись для исследования моделей компьютерных и банковских сетей, а также моделей обработки исков в страховых компаниях. В данной статье результаты работ [1; 2] обобщены для различных сетей более общего вида.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЕТИ С РАЗНОТИПНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Рассмотрим замкнутую сеть МО с центральной системой обслуживания, в которой обслуживаются K_i заявок типа i, $i=\overline{1,n-1}$. Заявки типа i обслуживаются в m_i-линейной СМО S_i и поступают на обслуживание в центральную систему S_n, после обслуживания в которой они поступают во внешнюю среду; из внешней среды заявки типа i поступают на обслуживание опять в систему S_i, $i=\overline{1,n-1}$. Пусть $K_1+K_2+...+K_{n-1}=K$ и будем полагать, что $K>>1$.

Каждая заявка типа i может находиться в одном из следующих состояний: C_0 – не требующем обслуживания, C_1 – требующем обслуживания в системе S_i, $i=\overline{1,n-1}$, C_2 – требующем обслуживания в системе S_n. Для унификации обозначений введем в рассмотрение систему обслуживания S_0 с числом линий обслуживания $m_0=K$, пребывание заявок в которой будет соответствовать их пребыванию в состоянии C_0 (во внешней среде). Переход некоторой заявки типа i из системы S_0 в систему S_i происходит в случайные моменты времени независимо от того, в каком состоянии находятся другие заявки, и таким образом, что вероятность такого перехода на интервале времени $[t, t+\Delta t]$ равна $\mu_{0i}(t)\Delta t + o(\Delta t)$, где $\mu_{0i}(t)$ характеризует интенсивность такого перехода для заявок типа i. Предполагается, что она является кусочно-постоянной функцией времени с двумя интервалами постоянства $[0, T/2]$ и $(T/2, T]$. Вероятности переходов заявок между остальными СМО сети следующие: $p_{in} = p_{n0} = 1$, $i = \overline{1, n-1}$, $p_{ij} = 0$ – в остальных случаях. Времена обслуживания заявок типа i в каждой линии системы S_i и времена их обслуживания в системе S_n распределены по показательному закону с интенсивностями μ_i и μ_n соответственно, $i = \overline{1, n-1}$. Система S_i, как уже упоминалось, имеет m_i линий обслуживания, система S_n – одну линию, система S_0 – K линий обслуживания. Дисциплины обслуживания заявок в системах – FIFO. Будем предполагать, что наша сеть в некоторый момент времени t находится в состоянии $k(t) = (k_1(t), k_2(t), ..., k_n(t))$, если в этот момент времени $k_i(t)$ заявок типа i находятся в состоянии C_1, $i = \overline{1, n-1}$, а $k_n(t)$ заявок находятся в состоянии C_2; при этом очевидно, что $k_0(t) = K - \sum_{i=1}^{n} k_i(t)$ заявок находятся в состоянии C_0. Вектор $k(t)$ образует n-мерный марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Введем следующие стоимостные коэффициенты: d_i – затраты на содержание одной заявки типа i в очереди и на обслуживании в системе S_i (в условных единицах) в единицу времени, $i = \overline{1, n}$, E_i – затраты на содержание одной линии обслуживания в системе S_i, $i = \overline{1, n-1}$, E_n – затраты на содержание системы S_n. Пусть, кроме того, $l_i = \frac{m_i}{K}$, $l_n = \frac{1}{K}$ – относительное число линий обслуживания соответственно в системах S_i и S_n, $i = \overline{1, n-1}$; $\xi_i(t) = \frac{k_i(t)}{K}$ – относительное число заявок, а $n_i(t) = M\{\xi_i(t)\}$ – среднее относительное число заявок в системе S_i, $i = \overline{1, n}$. Тогда общие средние затраты на содержание сети на интервале времени $[0, T]$ можно выразить по формуле

$$W(T) = W(T, m_1, m_2, ..., m_{n-1}) = \frac{1}{T}\int_0^T \left[K \sum_{i=1}^{n} (d_i n_i(t) + E_i l_i) \right] dt. \qquad (1)$$

Нас будет интересовать следующая задача:

$$\begin{cases} W(T) \to \min\limits_{m_i, i=\overline{1,n-1}} \\ K n_i(t) \le m_i, \ i = \overline{1, n-1}, \\ K n_n(t) \le 1, \ t \in [0, T]. \end{cases} \qquad (2)$$

Опишем кратко применение данной сети в качестве модели в одной задаче страхования. Пусть компания заключила со страхователями K_i договоров о страховании типа i, $i=\overline{1,n-1}$, например, K_1 договоров о страховании имущества, K_2 договоров о страховании автомобилей, K_3 договоров о страховании жизни и т. д., K_1+K_2+ $+...+K_{n-1}=K$. Таким образом, в течение определенного интервала времени к ней могут обратиться с исками типа i K_i человек. Иск при предъявлении проходит две стадии обработки – стадию оценки и стадию выплаты, оцениванием исков типа i занимается m_i сотрудников компании, которых будем называть оценщиками, выплатой – один кассир. Например, m_1 – число оценщиков исков по страхованию имущества, m_2 – число оценщиков исков по страхованию автомобилей, m_3 – число оценщиков исков по страхованию жизни, m_4 – число оценщиков исков по страхованию грузоперевозок. Иски страхователей могут находиться в одном из следующих состояний: C_0 – иск не предъявляется, C_1 – иск находится на стадии оценивания, C_2 – иск находится на стадии выплаты. Переход некоторого иска типа i из состояния C_0 в состояние C_1 происходит в случайные моменты времени, независимо от того, в каком состоянии находятся другие иски, и независимо от времени, таким образом, что вероятность перехода на интервале времени $[t,t+\Delta t]$ равна $\mu_{0i}(t)\Delta t+o(\Delta t)$, где $\mu_{0i}(t)$ – интенсивность такого перехода. Можно предположить, что интенсивность $\mu_{0i}(t)$ является кусочно-постоянной функцией от времени с двумя интервалами постоянства на отрезке времени $[0,T]$. При этом учитывается сезонный характер подачи исков: интенсивность их поступления может принимать одно значение, например, в зимний период, и другое в летний. Времена обработки исков оценщиками и времена между переходами исков из состояния C_2 в состояние C_0 распределены по показательному закону с интенсивностями μ_i, μ_n соответственно, $i=\overline{1,n-1}$.

Интересной является следующая задача: требуется найти число оценщиков m_i, $i=\overline{1,n-1}$, которые должны работать на различных интервалах времени, чтобы среднее число исков типа i, находящихся в состоянии C_1, и среднее число исков, находящихся в состоянии C_2, т. е. $Kn_i(t)$ и $Kn_n(t)$ не превышало соответственно m_i и 1, и чтобы потери (1) были минимальными. Введя стоимостные коэффициенты эту задачу можно свести к задаче (2).

Вернемся к нашей сети МО. Чтобы найти распределение вероятностей случайного вектора $\left\{k_i(t),\ \overline{i=1,n}\right\}$, удобно перейти к относительным параметрам, рассматривая вектор $\left(\dfrac{k_1(t)}{K},\dfrac{k_2(t)}{K},...,\dfrac{k_n(t)}{K}\right)$. В этом случае возможные значения этого вектора принадлежат ограниченному замкнутому множеству $G=\left\{x=(x_1,x_2,...,x_n):0\le x_i\le 1,\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\le 1\right\}$, в котором они располагаются в узлах n-мерной решетки на расстоянии $\varepsilon=\dfrac{1}{K}$ друг от друга. При увеличении K «плотность заполнения» множества G возможными компонентами данного вектора увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью вероятностей $p(x,t)=K^n P(xK,t)$, $x\in G$, где $p(x,t)$ имеет смысл плотности вероятностей случайного вектора $\left\{\frac{k(t)}{K}\right\}$.

Используя технику [1], можно показать, что плотность $p(x,t)$ при больших K с точностью до членов порядка $\varepsilon^2=\frac{1}{K^2}$ удовлетворяет уравнению Колмогорова – Фоккера – Планка

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(A_i(x)p(x,t)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\big(B_i(x)p(x,t)\big), \tag{3}$$

где $$A_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j q_{ji}\min(l_j,x_j)+\mu_{0i}(t)\left(1-\sum_{j=1}^{n}x_j\right),\ \mu_{0n}(t)=0,$$

$$B_{ij}(x)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\min(l_j,\ x_j)+\mu_{0i}(t)\left(1-\sum_{j=1}^{n}x_j\right), & i=j,\\ -2\mu_i\min(l_j,\ x_j), & i\neq j,\ j=n,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}\qquad q_{ji}=\begin{cases}-1, & j=i,\ j,i=\overline{1,n},\\ 1, & j\neq i,\ i=n,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

Отсюда следует, что математические ожидания $n_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, с точностью $O(\varepsilon^2)$ определяются из системы уравнений

$$\frac{dn_i(t)}{dt}=A_i\big(n(t)\big)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j q_{ji}\min\big(l_j,n_j(t)\big)+\mu_{0i}(t)\left(1-\sum_{i=1}^{n}n_i(t)\right). \tag{4}$$

Решив ее, можно перейти к решению оптимизационной задачи (2). Решение системы уравнений (4) в некоторых частных случаях приведено в [6].

Рассмотрим теперь более общую сеть МО, чем описанная выше, когда число заявок каждого типа $K_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, и, соответственно, общее число заявок $K(t)=\sum_{i=1}^{n-1}K_i(t)$ являются некоторыми функциями времени. Такие сети являются замкнутыми только по структуре, поскольку в них обслуживается переменное число заявок. Введем обозначения:

$$l_i(t)=\frac{m_i}{K(t)},\ i=\overline{1,n-1},\ l_n(t)=\frac{1}{K(t)},\ n_i(t)=M\left\{\frac{k_i(t)}{K(t)}\right\},\ i=\overline{1,n}.$$

Тогда общие средние затраты на содержание сети на интервале времени $[0,T]$ выражаются соотношением (1), в котором вместо K мы должны подставить $K(t)$, и в ограничения задачи (2) также.

Можно показать, что в этом случае плотность распределения вероятностей $p(x,t)=p(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ вектора $\frac{k(t)}{K(t)}=\left(\frac{k_1(t)}{K(t)},\frac{k_2(t)}{K(t)},...,\frac{k_n(t)}{K(t)}\right)$ с точностью до $O(\varepsilon^2(t))$, где $\varepsilon(t)=l_n(t)$, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(A_i(x,t)p(x,t)\big)+\frac{\varepsilon(t)}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\big(B_{ij}(x,t)p(x,t)\big)+$$
$$+2\varepsilon(t)K'(t)p(x,t),$$

где $A_i(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j q_{ji}\min\big(l_j(t),x_j(t)\big)+\mu_{0i}(t)\left(1-\sum_{j=1}^{n}x_j(t)\right)$; $\mu_{0n}(t)=0$,

$$B_{ij}(x,t)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\min(l_j(t),x_j(t))+\mu_{0i}(t)(1-\sum_{j=1}^{n}x_j(t)),\ i=j,\\ -2\mu_i\min(l_i(t),x_i(t)), i\neq j,\ j=n,\\ 0,\ \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

которое при постоянном числе заявок превращается в уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка (4). Система уравнений для среднего относительного числа заявок в системах сети, полученная методом гауссова приближения, имеет вид:

$$\begin{cases}\frac{dn_i(t)}{dt}=-\mu_i n_i(t)+\mu_{0i}(t)\left(1+\varepsilon(t)-\sum_{j=1}^{n}n_j(t)\right),\ i=\overline{1,n-1},\\ \frac{dn_n(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n-1}\mu_i n_i(t)-\mu_n n_n(t).\end{cases}$$

Решение оптимизационной задачи (2) для некоторых частных случаев приведено в [6].

АППРОКСИМАЦИЯ СЕТИ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК В ОЧЕРЕДЯХ

Рассмотрим замкнутую сеть МО произвольной структуры, состоящую из $n+1$ систем обслуживания (СМО) $S_0,S_1,...,S_n$, в которой циркулируют K однотипных заявок. Система S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, время обслуживания в каждой из которых распределено по показательному закону со средним μ_i^{-1}, $i=\overline{0,n}$. Кроме того, предположим, что длительность пребывания заявок в очереди i-й СМО является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром ν_i, $i=\overline{0,n}$. Заявки на обслуживание выбираются в соответствии с дисциплиной FIFO. Заявка, обслуживание которой в системе S_i закончено, с вероятностью p_{ij} переходит в очередь системы S_j, $i,j=\overline{0,n}$. Заявка, время ожидания которой в очереди S_i истекло, переходит в очередь системы S_j с вероятностью q_{ij}, $i, j = \overline{0,n}$. Матрицы переходов $P = \|p_{ij}\|$, $Q = \|q_{ij}\|$, $i, j = \overline{0,n}$, в общем случае не тождественны и являются матрицами вероятностей переходов неприводимой марковской цепи. Вектор $k(t) = (k_0(t), k_1(t), ..., k_n(t))$, где $k_i(t)$ – число заявок в системе S_i в момент времени t, $i = \overline{0,n}$, образует $(n+1)$-мерный марковский процесс с непрерывным временем и конечным числом состояний.

Как и в предыдущем случае, используя технику [1], можно показать, что плотность распределения вероятностей вектора относительных переменных $\xi(t) = \left(\frac{k_0(t)}{K}, \frac{k_1(t)}{K}, ..., \frac{k_n(t)}{K}\right)$ удовлетворяет с точностью $O(\varepsilon^2)$, где $\varepsilon = \frac{1}{K}$, уравнению Колмогорова – Фоккера – Планка (3) в котором

$$A_i(x) = \sum_{j=0}^{n} [\mu_j p_{ji}^* \min(l_j, x_j) + (x_j - l_j)\nu_j q_{ji}^* u(x_j - l_j)],$$

$$B_{ii}(x) = \sum_{j=0}^{n} [\mu_j r_{ji} \min(l_j, x_j) + (x_j - l_j)\nu_j r_{ji}^* u(x_j - l_j)],$$

$$B_{ij}(x) = -2\mu_i p_{ij} \min(l_i, x_i) - 2(x_i - l_i)\nu_i q_{ij} u(x_i - l_i),\ i \neq j,$$

$$p_{ji}^* = r_{ji} = p_{ji},\ q_{ji}^* = r_{ji}^* = q_{ji},\ i \neq j,$$

$$p_{ji}^* = -r_{ji} = -1 + p_{ii},\ q_{ji}^* = -r_{ji}^* = -1 + q_{ii},\ i = j,$$

$u(x)$ – функция Хевисайда.

Компоненты вектора $n(t) = (n_1(t), n_2(t), ..., n_n(t))$ с той же точностью определяются из системы уравнений

$$\frac{dn_i(t)}{dt} = A_i(n(t)) = \Sigma_0[\mu_j p_{ji}^* l_j + (n_j(t) - l_j)\nu_j q_{ji}^*] + \Sigma_1 \mu_j p_{ji}^* n_j(t),\ \ i = \overline{0,n},$$

где $\Sigma_0 = \sum_{j \in \Omega_0(t)}$, $\Sigma_1 = \sum_{j \in \Omega_1(t)}$, $\Omega_0(t) = \{j : l_j < n_j(t) \leq 1\}$, $\Omega_1(t) = \{j : 0 \leq n_j(t) \leq l_j\}$ – непересекающиеся множества индексов компонент вектора $n(t)$.

Очевидно, что сеть МО, рассмотренная в [1; 2], является частным случаем такой сети, когда $\nu_i = 0$, $i = \overline{0,n}$. Данная сеть может быть использована в качестве модели процесса обработки исков в страховой компании, имеющей центральное отделение и $n-1$ филиал. Иск при предъявлении проходит две стадии обработки – стадию оценки в любом из филиалов и стадию выплаты в центральном отделении. Будем предполагать, что суммарное время пребывания страхователя, подающего иск, в очереди i-о филиала и время, необходимое ему для обращения в другой филиал, распределено также по показательному закону с другим параметром ν_i, т. е. страхователь не дождавшись обслуживания в i-м филиале с вероятностью q_{ij} предъявляет иск в j-й филиал, $i, j = \overline{1, n-1}$.

Данная модель может быть расширена на случай разнотипных исков. Пусть общее число договоров страхования, заключенных компанией к моменту времени t, $t \in [0, T]$, определяется некоторой функцией $\sum_{c=1}^{r-1} K_c(t) = K(t)$, где $K_c(t)$ – число договоров типа c, $c = \overline{1, r-1}$. Считаем, что страховая компания состоит из n филиалов, которые, вообще говоря, могут отличаться не только по числу занятых сотрудников, но и по набору типов исков, которые они могут обслуживать. Полагаем, что вероятность предъявления иска типа c в филиал номер i на интервале времени $[t, t+\Delta t]$ равна $\mu_{0ic}\Delta t + o(\Delta t) = \mu_{0c} p_{0ic}\Delta t + o(\Delta t)$, где μ_{0c} – интенсивность предъявления исков типа c, p_{0ic} – вероятность предъявления исков типа c в i-й филиал, $\sum_{i=1}^{n} p_{0ic} = 1$, $c = \overline{1, r-1}$, $i = \overline{1, n}$. Каждый из исков, предъявленных в i-й филиал, $i = \overline{1, n}$, проходит две стадии обработки – оценки и выплаты. Оценкой исков типа c занимаются m_{ic} сотрудников (оценщиков) i-го филиала, время обработки исков каждым из оценщиков будем считать распределенным по показательному закону со средним значением μ_{ic}^{-1}, $i = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r-1}$. Иск, прошедший этап оценки в i-м филиале поступает в отдел выплат того же филиала, где обслуживается одним из m_{ir} кассиров, причем время, затрачиваемое каждым кассиром на выплату по иску распределено также по показательному закону со средним значением μ_{ir}^{-1}, $i = \overline{1, n}$. Кроме этого, предположим, что время ожидания страхователя, подающего иск типа c в очереди на оценку i-о филиала, и время, необходимое ему для обращения в другой филиал, ограничено случайной величиной, распределенной экспоненциально с параметром ν_{ic}, $i = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r-1}$. То есть, страхователь не дождавшись обслуживания в i-м филиале с вероятностью q_{icjc} предъявляет иск типа c в филиал номер j, осуществляющий оценку исков такого типа, $i, j = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r-1}$.

Состояние страховой компании в момент времени t может быть описано с помощью вектора

$$k(t) = \left(k_{11}(t), k_{12}(t), \ldots, k_{1r-1}(t), k_{1r}(t), \ .\ .\ .\ , k_{n1}(t), k_{n2}(t), \ldots, k_{nr-1}(t), k_{nr}(t)\right),$$

где $k_{ic}(t)$ – число исков типа c, находящихся в момент времени t на этапе оценки в i-м филиале, $i = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r-1}$; $k_{ir}(t)$ – число исков, находящихся в момент времени t в i-м филиале на стадии выплаты, $i = \overline{1, n}$.

Моделью описанного процесса может служить замкнутая по структуре сеть МО, общее число разнотипных заявок (исков), в которой описывается функцией времени $K(t)$. Сеть состоит из $nr+1$ систем $S_0, S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{1r}, \ldots, S_{n1}, S_{n2}, \ldots, S_{nr}$, система S_0 соответствует внешней среде (иск не предъявляется), причем время ожидания заявок в очередях систем S_{ic}, $i = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r-1}$, ограничено экспоненциальной случайной величиной. Вероятности переходов между системами сети следующие: $p_{0ic} \neq 0$, $p_{icir} = p_{ir0} = 1$, $i = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r-1}$. Кроме этого, возможны следующие переходы заявок из очередей систем: $q_{icjc} \neq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, $c = \overline{1, r-1}$, $q_{icjs} = 0$ в остальных случаях.

Установлено, что плотность распределения вероятностей вектора относительных переменных $\left(\frac{k(t)}{K(t)}\right)$ удовлетворяет с точностью до $O(\varepsilon^2(t))$, где $\varepsilon(t)=\frac{1}{K(t)}$, дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\frac{\partial}{\partial x_{ic}}\left(A_{ic}(x,t)p(x,t)\right)+\frac{\varepsilon(t)}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\frac{\partial^2}{\partial x_{ic}\partial x_{js}}\left(B_{icjs}(x,t)p(x,t)\right)+$$

$$+nr\frac{K'(t)}{K(t)}p(x,t),$$

где

$$A_{ic}(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}[\nu_{js}q^{*}_{jsic}(x_{js}(t)-l_{js}(t))u(x_{js}(t)-l_{js}(t))+\mu_{js}p^{*}_{jsic}\min(x_{js}(t),l_{js}(t))]+$$

$$+\mu_{0ic}\left(1-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}x_{js}(t)\right),$$

$$\mu_{0ir}(t)=0,\ i=\overline{1,n}\ .$$

Коэффициенты $B_{icjs}(x,t)$ из-за громоздкости здесь не приводятся.

Компоненты $n_{ic}(t)=M\left(\frac{k_{ic}(t)}{K(t)}\right)$, $i=\overline{1,n}$, $c=\overline{1,r}$, вектора $n(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dn_{ic}(t)}{dt}=A_{ic}(n(t)),\ i=\overline{1,n},\ c=\overline{1,r}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г. А.* Об оптимизации замкнутой системы массового обслуживания // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1975. № 6. С. 65–73.

2. *Медведев Г. А.* Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С.199–203.

3. *Маталыцкий М. А.* Исследование стохастических моделей вычислительных систем и сетей в нестационарном режиме и в условиях большой нагрузки. М., 1989. Деп. в ВИНИТИ АН СССР. № 1534. Вып. 89. 199 с.

4. *Маталыцкий М. А.* Сети массового обслуживания в стационарном и переходном режимах. Гродно, 2001. 211 с.

5. *Астахов А. М., Маталыцкий М. А., Романюк Т. В.* Исследование вероятностной модели одной локальной вычислительной сети // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2002. № 1. С. 33–42.

6. *Маталыцкий М. А., Романюк Т. В.* Приближенные методы анализа сетей с центральной системой обслуживания и их применения. Гродно, 2003. 200 с.

7. *Matalytski M., Pankov A.* Analysis of stochastic model of incomes changing in the open banking network // Computer Science. 2004. Vol. 3. № 4. C. 22–30.