РОБАСТНАЯ КАЛМАНОВСКАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В АНАЛИЗЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В. И. Лобач

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
lobach@bsu.by

Рассматривается метод робастизации фильтра Калмана на основе применения методологии *М*-оценок. Приводится подходящая аппроксимация рекуррентных формул оценивания вектора состояний системы.

Ключевые слова: фильтр Калмана, *М*-оценки, линейная регрессионная модель, модель в пространстве состояний.

ВВЕДЕНИЕ

Фильтр Калмана является полезным инструментом для анализа динамических линейных систем, включающих в себя модели временных рядов типа $AR(n)$, $ARMA(n,m)$ и т. д.

Рассмотрим модель динамической системы в виде модели в пространстве состояний

$$x_t = F_t x_{t-1} + v_t\,, \tag{1}$$

$$y_t = H_t x_t + w_t\,, \tag{2}$$

где

$$E\{v_t\} = 0,\ E\{w_t\} = 0,\ E\{u_s v'_t\} = \delta_{st} Q_t,\ E\{w_j w'_t\} = 0,\ x_0 \sim N(m_0, \Gamma_0). \tag{3}$$

Уравнение состояния (1) описывает поведение n-мерного вектора состояния x_t во времени, канал наблюдений (2) описывает соотношение между ненаблюдаемым состоянием x_t и m-вектором наблюдений y_t. Предполагается, что матрицы F_t, H_t, Q_t, R_t имеют соответствующие размерности и известны. Начальное состояние x_0 распределено по нормальному закону с известными параметрами.

Фильтр Калмана позволяет строить линейные рекуррентные, оптимальные в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{x}_t^t$ состояний x_t, а также матрица ковариаций оценок $P_t^t = E(x_t - \hat{x}_t^t)(x_t - \hat{x}_t^t)'$ в текущий момент времени, используя наблюдения $y_0^t = \{y_0, y_t, \ldots, y_t\}$. Формулы, определяющие фильтр Калмана, имеют вид [1]:

$$\hat{x}_t^t = \hat{x}_t^{t-1} + P_t^{t-1} H'_t (H_t P_t^{t-1} H'_t + R_t)^{-1} (y_t - H_t \hat{x}_t^{t-1})\,, \tag{4}$$

$$P_t^t = P_t^{t-1} - P_t^{t-1} H'_t (H_t P_t^{t-1} H'_t + R_t)^{-1} H_t P_t^{t-1}\,, \tag{5}$$

где

$$\hat{x}_t^{t-1} = F_t x_{t-1}^{t-1}\,, \tag{6}$$

$$P_t^{t-1} = F_t P_{t-1}^{t-1} F'_t + Q_t \tag{7}$$

прогнозные значения вектора состояния x_t и матрица ковариаций прогнозных значений, построенные по данным до момента $t-1$.

Стандартная процедура калмановской фильтрации предполагает, что случайные возмущения v_t, w_t в (1) и (2) распределены по нормальному закону. Однако это предположение о нормальности распределения не всегда выполняется из-за «засорения» данных. Поэтому робастизация фильтра Калмана представляется очень важным с практической точки зрения [2, 3, 4].

РОБАСТНЫЙ ФИЛЬТР КАЛМАНА

Оценку $\hat{x}_t^t$ состояния x_t в (4) можно получить как решение следующей задачи на минимум [5]:

$$\hat{x}_t^t = \operatorname{argmin}\{(\hat{x}_t^{t-1} - x_t)'(P_t^{t-1})^{-1}(\hat{x}_t^{t-1} - x_t) + (y_t - Hx_t)' P_t^{-1}(y_t - Hx_t)\}, \qquad (8)$$

где argmin берется по всем $x_t \in R^n$. Процедуру (8) можно представить как обобщенный метод наименьших квадратов в следующей линейной регрессионной модели

$$\begin{pmatrix} (P_t^{t-1})^{-1/2}\hat{x}_t^{t-1} \\ P_t^{-1/2} \;\; y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P_t^{t-1})^{-1/2} \\ P_t^{-1/2} \;\; H_t \end{pmatrix} x_t + \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где символ $B^{-1/2}$ означает квадратный корень из обратной матрицы B^{-1}, случайные последовательности ε_t, η_t имеют следующие свойства:

$$E\{\varepsilon_t\} = 0,\ E\{\eta_t\} = 0,\ E\{\varepsilon_t \eta'_t\} = I. \qquad (10)$$

Перепишем модель (9) покомпонентно

$$c_{it} = a_{it}x_t + \varepsilon_{it}, \quad i = 1,2\ldots n, \qquad (11)$$

$$d_{jt} = b_{jt}x_t + \eta_{jt},\ j = 1,2\ldots m,$$

где

$$\left((P_t^{t-1})^{-1/2}\hat{x}_t^{t-1}\right) = \begin{pmatrix} c_{1t} \\ \vdots \\ c_{nt} \end{pmatrix},\ R_t^{-1/2}y_t = \begin{pmatrix} d_{1t} \\ \vdots \\ d_{mt} \end{pmatrix},$$

$$\left((P_t^{t-1})^{-1/2}\right) = \begin{pmatrix} a_{1t} \\ \vdots \\ a_{nt} \end{pmatrix},\ R_t^{-1/2}H_t = \begin{pmatrix} b_{1t} \\ \vdots \\ b_{mt} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{pmatrix},\ \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ \vdots \\ \eta_{mt} \end{pmatrix}.$$

Оценка наименьших квадратов $\hat{x}_t^t$ состояния x_t находится из условия

$$\hat{x}_t^t = \operatorname{argmin}\left\{\sum_{i=1}^{n}(c_{it} - a_{it}x_t)^2 + \sum_{j=1}^{m}(d_{jt} - b_{jt}x_t)^2\right\}. \qquad (12)$$

Эта оценка может быть «робастизирована» следующим образом

$$\tilde{x}_t^t = \operatorname{argmin}\left\{\sum_{i=1}^{n} g_{1i}(c_{it} - a_{it}x_t) + \sum_{j=1}^{m} g_{2j}(d_{jt} - b_{jt}x_t)\right\}, \tag{13}$$

где функции g_{1i}, g_{2j} и их производные ψ_{1i}, ψ_{2j} выбираются в соответствии с методологией построения *М*-оценок [6]. Используя (13), можно получить уравнения для оценок $\tilde{x}_t^t$ в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it}\psi_{1i}(c_{it} - a_{it}\tilde{x}_t^t) + \sum_{j=1}^{m} b_{jt}\psi_{2j}(d_{jt} - b_{jt}\tilde{x}_t^t) = 0. \tag{14}$$

Система уравнений (14) точно может быть решена только в некоторых специальных случаях. Воспользуемся следующей аппроксимацией системы (14)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{it}w_{1it}(c_{it} - a_{it}\tilde{x}_t^t) + \sum_{j=1}^{m} b_{jt}w_{2jt}(d_{jt} - b_{jt}\tilde{x}_t^t) = 0, \tag{15}$$

где веса $w_{1it}, i = \overline{1,n}$; $w_{2jt}, i = \overline{1,m}$, определены формулами

$$w_{1it} = \frac{\psi_{1i}(c_{it} - a_{it}\tilde{x}_t^{t-1})}{c_{it} - a_{it}\tilde{x}_t^{t-1}},$$

$$w_{2it} = \frac{\psi_{2j}(d_{jt} - b_{jt}\tilde{x}_t^{t-1})}{d_{jt} - b_{jt}\tilde{x}_t^{t-1}}. \tag{16}$$

Уравнение (15) получается из уравнения (14) заменой $\tilde{x}_t^t$ на $\tilde{x}_t^{t-1}$.

Используя аппроксимацию (15), получим робастную модификацию уравнений (4), (5)

$$\tilde{x}_t^t = \tilde{x}_t^{t-1} + (P_t^{t-1})^{1/2} W_{1t}^{-1} (P_t^{t-1})^{1/2} H'_t (H_t (P_t^{t-1})^{1/2} W_{1t}^{-1} (P_t^{t-1})^{1/2} H' +$$

$$+ R_t^{1/2} W_{2t}^{-1} R_t^{1/2})^{-1} (y_t - H_t \tilde{x}_t^{t-1}), \tag{17}$$

$$P_t^t = (P_t^{t-1})^{1/2} W_{1t}^{-1} (P_t^{t-1})^{1/2} - (P_t^{t-1})^{1/2} W_{1t}^{-1} (P_t^{t-1})^{1/2} H'_t (H_t (P_t^{t-1})^{1/2} \times$$

$$\times W_{1t}^{-1} (P_t^{t-1})^{1/2} H'_t + R_t^{1/2} W_{2t}^{-1} R_t^{1/2})^{-1} H_t (P_t^{t-1})^{1/2} W_{1t}^{-1} (P_t^{t-1})^{1/2}, \tag{18}$$

где $\tilde{x}_t^{t-1}$, P_t^{t-1} определены в (6), (7) и

$$\mathrm{W}_{1t} = \operatorname{diag}\{\mathrm{w}_{11t}, \mathrm{w}_{12t}, \ldots, \mathrm{w}_{1nt}\}, \; \mathrm{W}_{2t} = \operatorname{diag}\{\mathrm{w}_{21t}, \mathrm{w}_{22t}, \ldots, \mathrm{w}_{2mt}\}.$$

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим $AR(p)$ модель временного ряда, представленную в виде модели в пространстве состояний

$$x_t = x_{t-1}, \tag{19}$$

$$y_t = h_t x_t + \varepsilon_t, \tag{20}$$

где $h_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-p})$, $\varepsilon_t \sim (1-\varepsilon)N(0,\sigma^2) + \varepsilon R(a,b)$, $R(a, b)$ обозначает равномерное распределение на (a, b). Процесс y_t – одномерный, если $n = p$, $m = 1$. В соответствии с формулами (15), (16) получим следующий алгоритм робастного оценивания параметров AR-модели, записав его в рекуррентном виде:

$$\hat{x}_t^t = \hat{x}_{t-1}^{t-1} + P_{t-1}^{t-1} h'_t \sigma^{-1} \psi_H \left(\frac{\sigma(y_t - h_t \hat{x}_{t-1}^{t-1})}{h_t P_{t-1}^{t-1} h'_t + \sigma^2} \right), \tag{21}$$

$$P_t^t = P_{t-1}^{t-1} - \frac{P_{t-1}^{t-1} h'_t h_t P_{t-1}^{t-1}}{h_t P_{t-1}^{t-1} h'_t + \sigma^2}, \tag{22}$$

где $\psi_H(Z) = \begin{cases} z & \text{для } |z| \le c, \\ c \operatorname{sgn} z & \text{для } |z| > c, \end{cases}$ $\quad c = 1{,}645$ для $\varepsilon = 0{,}05$.

В таблице представлены результаты моделирования $AR(1)$ процесса $y_t = 0{,}5 y_{t-1} + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim 0{,}95N(0,1) + 0{,}05R(-25, 25)$, $x_0 = 0$, $P_0 = 1$.

Робастный фильтр Калмана для $AR(1)$ – модели

t	10	20	30	40	50	60
$\hat{x}_t^t$	0,480	0,510	0,480	0,488	0,495	0,496

Результаты моделирования показывают эффективность применения робастного фильтра Калмана для оценивания параметра $\theta = 0{,}5$ $AR(1)$ модели временного ряда с «загрязненными» данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана-Бьюси. М., 1982.
2. *Ершов А. А., Липцер Р. Ш.* Робастный фильтр Калмана в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. 1978. Т. 39. С. 359–367.
3. *Mascreliez, Martin R. D.* Robust Bayssian estimation for the linear model and robustifying the Kalman Filter // IEEE Trans.Automat.Control AC–22. 1977. P. 361–371.
4. *Stockinger N., Dutter R.* Robust Time Series Analysis: A survey // Kybernetika. 1987. Vol. 23.
5. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М., 1972.
6. *Хьюбер П.* Робастность в статистике. М., 1984.