АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

А. Н. Ковальчук

Белорусский государственный педагогический университет имени М. Танка
г. Минск, Беларусь
kavalchuk@bsu.by

В алгебре обобщенных случайных процессов рассматриваются системы уравнений в дифференциалах и исследуется их ассоциированные решения. Доказывается, что они являются решениями систем стохастических дифференциальных уравнений в θ-интегралах.

Ключевые слова: система стохастических дифференциальных уравнений, алгебра обобщенных случайных процессов, ассоциированные решения уравнений в дифференциалах.

При аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений возникают трудности, связанные с тем, что соответствующие «приближенные» решения уравнений не сходятся к ним, если даже предел существует. Предел решений аппроксимирующих уравнений, если он существует, как правило, является решением некоторого другого уравнения. Учитывая неустойчивость решений уравнений Ито, которая впервые была отмечена в [1], можно понять, почему в задачах подобного типа уравнения обычно рассматриваются в симметризованной форме. Важной оказывается «согласованность» симметризированных стохастических и обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [2] вышеуказанные трудности удалось преодолеть лишь введением запаздывания.

Одним из вариантов решения задачи аппроксимации систем стохастических дифференциальных уравнений является использование аппарата алгебр обобщенных случайных процессов [3]. Используя этот подход, в статье [4] исследованы ассоциированные решения стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов. В данной статье исследованы ассоциированные решения систем дифференциальных уравнений в θ-интегралах, содержащие обобщенный случайный процесс броуновского движения.

Пусть – полное вероятностное пространство, $T=[0,a]$ – отрезок вещественной прямой R, $a\in R$. Также пусть $\{F_t\}_{t\in T}$ – стандартный, непрерывный справа поток σ-алгебр и $B(t)$, $t\in T$ – стандартный процесс F_t-броуновского движения [5]. В алгебре обобщенных случайных процессов $G(\tilde{T},\Omega)^d$ [3] рассмотрим следующую задачу Коши

$$\begin{cases} d_{\tilde h}\tilde X^i\left(\tilde t,\omega\right)=\sum\limits_{j=1}^{r}\tilde\sigma^{ij}\left(\tilde X\left(\tilde t,\omega\right)\right)d_{\tilde h}\tilde B^j\left(\tilde t,\omega\right)+a^i\left(\tilde X\left(\tilde t,\omega\right)\right)d_{\tilde h}\tilde t, \\ \tilde X^i\Big|_{[\tilde 0,\tilde h)}=\tilde X_0^i\left(\tilde t,\omega\right),\ i=\overline{1,d}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\tilde\sigma^{ij}=[(\sigma_n^{ij})]\in G(R^d)$, $\tilde B^j=[(B_n^j)]\in G\left(\tilde T,\Omega\right)^d$ – обобщенные случайные процессы броуновского движения, $\tilde a^i=[(a_n^i)]\in G\left(R^d\right)$, $i=\overline{1,d}, j=\overline{1,r}$, $\tilde t=[(t)]\in\tilde T$, $\tilde h=[(h_n)]\in H$, $\tilde t+\tilde h\in\tilde T$, $\tilde X_0^i=[X_{0n}^i]\in G\left(\tilde T,\Omega\right)$, $i=\overline{1,d}$, $\tilde X=(\tilde X^1,\ldots,\tilde X^d)$, $\tilde X_0=\left(\tilde X_0^1,\ldots,\tilde X_0^d\right)$.

Для существования и единственности решения задачи Коши (1) в алгебре $G\left(\tilde T,\Omega\right)^d$, необходимо и достаточно, чтобы для любых представителей (σ_n^{ij}), (a_n^i), (X_{0n}^i), (B_n^j), (h_n), $i=\overline{1,d}, j=\overline{1,r}$, выполнялись следующие условия:

$$\frac{d^l}{dt^l}X_{0n}^i\left(h_n-s,\omega\right)-\frac{d^l}{dt^l}X_{0n}^i\left(s,\omega\right)-\sum_{j=1}^{r}\frac{d^l}{dt^l}\left\{\sigma_n^{ij}\left(X_{0n}^i\left(s,\omega\right)\right)\left[B_n^j\left(h_n+s,\omega\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-B_n^j\left(s,\omega\right)\right]\right\}-\frac{d^l}{dt^l}a_n^i\left(X_{0n}^i\left(s,\omega\right)\right)h_n\xrightarrow[s\to+0]{}0,\qquad i=\overline{1,d}, \tag{2}$$

для почти всех $\omega\in\Omega$ и любого $l=0,1,2\ldots$, где $d^l/dx^lX(s)$, $l=1,2\ldots$ – l-ая производная случайного процесса $X(s)$ для почти всех $\omega\in\Omega$ [4].

Несложно видеть, что на уровне представителей задача (1) запишется следующим образом

$$\begin{cases} X_n^i\left(t+h_n\right)-X_n^i\left(t\right)=\sum\limits_{j=1}^{r}\sigma_n^{ij}\left(X_n\left(t\right)\right)\left[B_n^j\left(t+h_n\right)-B_n^j\left(t\right)\right]+a_n^i\left(X_n\left(t\right)\right)h_n, \\ X_n^i\left(t\right)\Big|_{[0,h_n)}=X_{n0}^i\left(t\right),\ i=\overline{1,d},\ j=\overline{1,r},\quad t\in T, \end{cases} \tag{3}$$

где $B_n^j(t)=(B^j*\rho_n)(t)=\int_0^{1/n}B^j\left(t+s\right)\rho_n\left(s\right)ds$, $\rho_n\in C^\infty\left(R\right)$, $\rho_n\ge0$, $\operatorname{supp}\rho_n\subset[0,1/n]$, $\int_0^{1/n}\rho_n\left(s\right)ds=1$; $\sigma_n^{ij}\left(u\right)=\left(\sigma^{ij}*\overline\rho_n\right)\left(u\right)$, $a_n^i\left(u\right)=\left(a^i*\overline\rho_n\right)\left(u\right)$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,r}$ $u\in R^d$, $\overline\rho_n\in C^\infty(R^d)$, $\overline\rho_n\ge0$, $\operatorname{supp}\overline\rho_n\subset[0,1/n]^d$, $\int_{[0,1/n]^d}\overline\rho_n(u)du=1$.

Рассмотрим систему уравнений, ассоциированную системе (3)

$$X^i\left(t\right)=x^i+\sum_{j=1}^{r}(\theta)\int_0^t\sigma^{ij}\left(X\left(s\right)\right)dB^j\left(s\right)+\int_0^t a^i\left(X\left(s\right)\right)ds,\quad i=\overline{1,d},\ t\in T, \tag{4}$$

где $x=(x^1,\ldots,x^d)\in R^d$, $\theta\in[0,1]$ и стохастический интеграл в правой части (4) это стохастический θ-интеграл [6]. Если $a^i\in C_B^1\left(R^d\right)$, $\sigma^{ij}\in C_B^2\left(R^d\right)$, $i=\overline{1,d}, j=\overline{1,r}$, то существование и единственность решения системы (4) доказана в [5].

Для произвольной фиксированной точки t из отрезка $T=\left[0,a\right]\subset R$ имеет место представление:

$$t=\tau'_t+k_t h_n=\tau_t+m_t\delta;\ \delta_1=\lambda h_n;\lambda\in N;\ 1/n\le\delta_1<1/n+h_n, \qquad (5)$$

где $\tau_t=\tau'_t+k'_t h_n;\tau_t\in[\delta,2\delta);\ 1/n<\delta=lh_n<1;\ l,m_t,k_t,k_t\in N$.

Обозначим

$$K(n,h_n)=\iint\limits_{\substack{0\le s,\tau\le 1/n\\ |s-\tau|\le h_n}}\left(1-|s-\tau|h_n^{-1}\right)\rho_n(s)\rho_n(\tau)dsd\tau .$$

С помощью представления (5) решение системы (3) можно записать в виде

$$X_n^i(t)=X_{0n}^i(\tau'_t)+\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{k_t-1}\sigma_n^{ij}(X_n(\tau'_t+kh_n))\left[B_n^j(\tau'_t+(k+1)h_n)-B_n^j(\tau'_t+kh_n)\right]+$$

$$+\sum_{k=0}^{k_t-1}a_n^i(X_n(\tau'_t+kh_n))h_n . \qquad (6)$$

Л е м м а 1. Пусть $a^i\in C_B^1(R^d)$, $\sigma^{ij}\in C_B^2(R^d)$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,r}$. Тогда, если «начальное условие» $X_{0n}(t)$ системы (3) принадлежит $L^2(\Omega,A,P)$ и является $F_{t+1/n}$ измеримым для любых $t\in[0,h_n)$, то $X_n(t)$ принадлежит $L^2(\Omega,A,P)$ и является $F_{t+1/n}$ измеримым для всех $t\in T$ и справедливо следующее неравенство

$$E\|X_n(t+h_n)-X_n(t)\|^{2p}\le Ch_n^p+Ch_n^{2p},\ p=1,2,\dots,$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^d.

Л е м м а 2. Пусть $a^i\in C_B^1(R^d)$, $\sigma^{ij}\in C_B^2(R^d)$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,r}$. Тогда для решения задачи $X_n(t)$ и всех $t\in T$ справедливы неравенства

$$E\left[\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sigma_n^{ij}(X_n(\tau_t+k\delta))\left[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta)\right]-(1)\int_{\tau_t}^{t}\sigma^{ij}(X(s))dB^j(s)\right]^2$$

$$\le C\big/\left(n^4\delta^2h_n\right)+C/(n\delta)+C\delta+C\delta\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E\left[X_n^j(\tau_t+k\delta)-X_n^j(\tau_t+k\delta)\right]^2,\ i=\overline{1,d}.$$

Л е м м а 3. Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда для любого $t\in T$ и $i=\overline{1,d}$, справедливо следующее неравенство

$$E\left\{\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{\alpha=1}^{d}\left(\sigma_n^{\alpha j}\partial_\alpha\sigma_n^{ij}\right)(X_n(\tau_t+k\delta))\left(B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta)\right)^2-\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_{\tau_t}^{t}\left(\sigma^{\alpha j}\partial_\alpha\sigma^{ij}\right)(X(s))ds\right\}^2\le\frac{C}{n\delta}+C\delta+C\delta\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E\left[X_n^j(\tau_t+k\delta)-X^j(\tau_t+k\delta)\right]^2.$$

Л е м м а 4. Пусть $X_n(t)$ – решение задачи (3), $a^i \in C_B^1(R^d)$, $\sigma^{ij} \in C_B^2(R^d)$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,r}$. Тогда для всех $t\in T$ и $i=\overline{1,d}$

$$\mathsf{E}\left\{\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{q=0}^{l-2}\sum_{\alpha=1}^{d}\left(\sigma_n^{\alpha j}\partial_\alpha\sigma_n^{ij}\right)(X_n(\tau_t+k\delta))\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left[B_n^j(\tau_t+k\delta+(q+1)h_n)-B_n^j(\tau_t+k\delta+qh_n)\right]^2-h_nK(n,h_n)\right)\right\}^2\le\frac{C}{n^2\delta^2}+C\delta.$$

Л е м м а 5. Для любых $t\in T$ и $i=\overline{1,d}$ при выполнении условия предыдущей леммы справедливо неравенство

$$\mathsf{E}\left[\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=0}^{l-1}a_n^i(X_n(\tau_t+k\delta+ph_n))h_n-\int_{\tau_t}^{t}a^i(X(s))ds\right]^2\le$$

$$\le C\delta^2/h_n+C\delta\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{k_t-1}\mathsf{E}\left(X_n^j(\tau_t+k\delta)-X^j(\tau_t+k\delta)\right)^2.$$

Доказательство лемм 1–5 проводится методами аналогичными доказательствам соответствующих утверждений из статьи [7].

Теорема 1. Пусть $\theta\in[0;1/2]$, $a^i\in C_B^1(R^d)$, $\sigma^{ij}\in C_B^2(R^d)$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,r}$ «начальное условие» задачи Коши (3) $X_{n0}(t)$ принадлежит $L^2(\Omega,A,P)$ и является $F_{t+1/n}$ измеримым для любых $t\in[0,h_n)$. Тогда для решения задачи Коши (3) $X_n(t)$ и решения уравнения (4) $X(t)$ справедливо следующее неравенство

$$\sup_{t\in T}E\|X_n(t)-X(t)\|^2\le C\sup_{t\in[0,h_n)}E\|X_{0n}(t)-x\|^2+Cn^{-2/3}h_n^{-1/3}+$$

$$Ch_n+C\left(K(n,h_n)-(1-2\theta)\right)^2,$$

если $n^{-3/2}<h_n$.

Доказательство. В дальнейших выкладках мы будем использовать то, что система уравнений (4) с θ-интегралами эквивалентна следующей системе уравнений с интегралами Ито [6]

$$X^i(t)=x^i+\sum_{j=1}^{r}(\mathrm{I})\int_0^t\sigma^{ij}(X(s))dB^j(s)+\theta\sum_{j=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_0^t\left(\sigma^{\alpha j}\partial_\alpha\sigma^{ij}\right)(X(s))ds+$$

$$+\int_0^t a^i(X(s))ds,\quad i=\overline{1,d}.$$

Используя эту связь и формулу (6), представим разность $X_n^i(t)-X^i(t)$ в следующем виде

$$X_n^i(t)-X^i(t)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{k_t'-1}\sigma_n^{ij}(X_n(\tau_t'+kh_n))\left[B_n^j(\tau_t'+(k+1)h_n)-B_n^j(\tau_t'+kh_n)\right]-$$

$$X_{0n}^i(\tau_t')-x^i+\sum_{j=1}^{r}(\theta)\int_0^{\tau_t}\sigma^{ij}(X(s))dB^j(s)+\sum_{k=0}^{k_t'}a_n^i(X_n(\tau_t'+kh_n))h_n-\int_0^{\tau_t}a^i(X(s))ds+$$

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sigma_n^{ij}(X_n(\tau_t+k\delta))\left[B_n^j(\tau_t+(k+1)\delta)-B_n^j(\tau_t+k\delta)\right]-\sum_{j=1}^{r}(\mathrm{I})\int_{\tau_t}^{t}\sigma^{ij}(X(s))dB^j(s)+$$

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=0}^{l-1}\left(\sigma_n^{ij}(X_n(\tau_t+k\delta+ph_n))-\sigma_n^{ij}(X_n(\tau_t+k\delta))\right)\times$$

$$\left[B_n^j(\tau_t+k\delta+(p+1)h_n)-B_n^j(\tau_t+k\delta+ph_n)\right]-\theta\sum_{j=1}^{r}\sum_{\alpha=1}^{d}\int_{\tau_t}^{t}\left(\sigma^{\alpha j}\partial_\alpha\sigma^{ij}\right)(X(s))ds+$$

$$\sum_{k=0}^{m_t-1}\sum_{p=0}^{l-1}a_n^i(X_n(\tau_t+k\delta+ph_n))h_n-\int_{\tau_t}^{t}a^i(X(s))ds.$$

Тогда, используя леммы 1–5, формулу Тейлора для функции σ_n^{ij}, неравенство Гельдера, а также то, что $a^i\in C_B^1\left(R^d\right)$, $\sigma^{ij}\in C_B^2\left(R^d\right)$, получим

$$E\left[X_n^i(t)-X^i(t)\right]^2\le C\left[X_{n0}^i(\tau_t')-x^i\right]^2+C\delta^2/h_n+C/(n\delta)+C/\left(n^4\delta^2h_n\right)+$$

$$+C\left(K(n,h_n)-(1-2\theta)\right)^2+C\delta\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=0}^{m_t-1}E\left[X_n^j(\tau_t+k\delta)-X_n^j(\tau_t+k\delta)\right]^2,\ i=\overline{1,d}.$$

Пользуясь дискретным аналогом неравенства Гронуола для предыдущих неравенств, получаем

$$E\|X_n(t)-X(t)\|^2\le C\|X_{0n}(\tau_t')-x\|^2+C\delta^2/h_n+C/(n\delta)+C/\left(n^4\delta^2h_n\right)+$$

$$+C\left(K(n,h_n)-(1-2\theta)\right)^2.$$

При $n^{-3/2}<h_n\le n^{-5/4}$, положив $\delta=h_nn^{1/2}$, при $n^{-5/2}<h_n\le n^{-1/2}$ — $\delta=h_n^{1/3}n^{-1/3}$, а в случае $n^{-1/2}<h_n$, взяв $\delta=h_n$, получим требуемое в условии теоремы неравенство.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, если $\sup\limits_{t\in[0,h_n)}E\left\|X_{0n}(t)-x\right\|^2\to 0$ и $K(n,h_n)\to(1-2\theta)$ при $n\to\infty$, $h_n\to 0$, так, что $n^3h_n^2\to 0$, то

$$\sup_{t\in T}E\|X_n(t)-X(t)\|^2\to 0.$$

Доказательство получается предельным переходом в неравенствах из условия теоремы 1.

Пусть $\tilde{X}(t) = [(X_n(t))]$ – решение задачи Коши (1). Случайный процесс $X(t)$, $t \in T$ назовем θ-*ассоциированным* решением данной задачи, если при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ и $K(n,h_n) \to (1-2\theta)$, $\theta \in [0,1/2]$ для любого $X_n \in \tilde{X}(t)$ $X_n(t)$ сходится к $X(t)$ почти всюду по $\omega \in \Omega$ и равномерно по $t \in T$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (2), обобщенный случайный процесс $\tilde{X}_0$ ассоциирует $x \in R^d$ и $K(n,h_n) \to (1-2\theta)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, так, что $n^3 h_n^2 \to 0$. Тогда θ-ассоциированное решение задачи Коши (1) в прямом произведении алгебр обобщенных случайных процессов $G(\tilde{T},\Omega)^d$ является сильным решением стохастического дифференциального уравнения (4).

Доказательство вытекает из следствия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wong E., Zakai M.* On the relationship between ordinary and stochastic differential equations // Internat. J. Engin. Sci. 1965. Vol. 3. P. 213–229.

2. *Мацкявичюс В.* Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений // Лит. мат. сб. 1978. Т. 18. № 3. С. 101–108.

3. *Лазакович Н. В.* Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38. № 5. С. 23–27.

4. *Лазакович Н. В., Стащуленок С. П., Юферева И. В.* Стохастические дифференциальные уравнения в алгебре обобщенных случайных процессов // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 3. № 12. С. 2080–2082.

5. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986. 448 с.

6. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 630 с.

7. *Лазакович Н. В., Яблонский О. Л.* О приближении решений одного класса стохастических уравнений // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 87–102.