УСЛОВИЕ ЭРГОДИЧНОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

В. И. Клименок, А. Н. Дудин

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь
klimenok@bsu.by, dudin@bsu.by

Получены достаточные условия эргодичности для многомерных цепей Маркова, блочная матрица одношаговых вероятностей переходов которых имеет следующую структуру. Все блочные строки этой матрицы, за исключением, быть может, нескольких первых строк, являются суммами соответствующих строк блочных матриц верхней хессенберговой теплицевой структуры и матрицы, состоящей из одинаковых блочных строк. Такие цепи Маркова возникают при исследовании широкого круга систем массового обслуживания.

Ключевые слова: многомерная цепь Маркова, условие эргодичности.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [5] введен в рассмотрение класс многомерных цепей Маркова, который является в некотором смысле гибридом цепей Маркова, имеющих блочную верхне хессенбергову квазитеплицеву структуру матрицы переходных вероятностей (квазитеплицевых цепей Маркова [3,4] или цепей Маркова типа M/G/1 [7]), и цепей, матрица вероятностей переходов которой состоит из одинаковых блочных строк. В [5] указаны системы массового обслуживания, которые могут быть описаны в терминах такого класса цепей Маркова. Также в [5] предложен алгоритм нахождения стационарного распределения вероятностей состояний этих цепей.

При этом вопрос существования стационарного распределения, совпадающего в данном случае с эргодическим, практически не затрагивался. В данной статье этот вопрос детально исследован. Установлены достаточные условия эргодичности.

УСЛОВИЕ ЭРГОДИЧНОСТИ

Рассматривается многомерная цепь Маркова $\xi_n = \{i_n, \nu_n^{(1)}, ..., \nu_n^{(M)}\}, n \geq 1$ с пространством состояний $\{(0,1,...)\times(0,1,...,W_1)\times...\times(0,1,...,W_M)\}$ Матрица P одношаговых вероятностей переходов этой цепи имеет блочную структуру следующего вида:

$$P = \begin{pmatrix} V_0^{(0)} & V_1^{(0)} & \dots & V_{N-1}^{(0)} & V_N^{(0)} & V_{N+1}^{(0)} & V_{N+2}^{(0)} & \dots \\ V_0^{(1)} & V_1^{(1)} & \dots & V_{N-1}^{(1)} & V_N^{(1)} & V_{N+1}^{(1)} & V_{N+2}^{(1)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_0^{(N)} & V_1^{(N)} & \dots & V_{N-1}^{(N)} & V_N^{(N)} & V_{N+1}^{(N)} & V_{N+2}^{(N)} & \dots \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{N-1} & Y_0 + A_N & Y_1 + A_{N+1} & Y_2 + A_{N+2} & \dots \\ A_0 & A_1 & \dots & A_{N-1} & A_N & Y_0 + A_{N+1} & Y_1 + A_{N+2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Здесь $N \geq 0$, все блоки являются квадратными матрицами размерности $K = \prod_{m=1}^{M}(W_m + 1)$.

При выводе достаточных условий эргодичности цепи Маркова $\xi_n, n \geq 1$ будем использовать векторный аналог известной теоремы Мустафы [6], который сформулируем следующим образом.

Для того чтобы неприводимая непериодическая цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$ была эргодичной, достаточно существования числа $\varepsilon > 0$, неотрицательного целого числа i_0 и набора неотрицательных векторов $\vec{X}_i, i \geq 0$ размерности K таких, что выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}\vec{X}_j - \vec{X}_i < -\varepsilon\vec{e}, i > i_0, \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}\vec{X}_j < \infty, i = \overline{0, i_0}. \tag{2}$$

Здесь P_{ij} – матрицы переходных вероятностей цепи $\xi_n, n \geq 1$,

$$P_{ij} = \begin{cases} V_j^{(i)}, j \geq 0, i = \overline{0, N}, \\ A_j, j < i - 1, \\ Y_{j-i+1} + A_j, j \geq i - 1, i > N, \end{cases}$$

$\vec{e}$ – вектор столбец, состоящий из единиц.

Введем обозначения для матричных производящих функций

$$V^{(i)}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} V_l^{(i)} z^l, i = \overline{0, N}, A(z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l z^l, Y(z) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l z^l, |z| \leq 1.$$

Далее будем называть неотрицательную матрицу субстохастической, если сумма элементов любой ее строки не превышает единицы, причем существует хотя бы одна строка, для которой упомянутая сумма меньше единицы. Будем различать случаи неразложимой и разложимой матрицы $Y(z)$. В последнем случае без ограничения общности будем считать, что матрица $Y(z)$ уже приведена к нормальной форме (см., например, [2]) и имеет следующий вид:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} Y^{(1)}(z) & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & Y^{(2)}(z) & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & Y^{(m)}(z) & 0 & \ldots & 0 \\ Y^{(m+1,1)}(z) & Y^{(m+1,2)}(z) & \ldots & Y^{(m+1,m)}(z) & Y^{(m+1)}(z) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y^{(s,1)}(z) & Y^{(s,2)}(z) & \ldots & Y^{(s,m)}(z) & Y^{(s,m+1)}(z) & \ldots & Y^{(s)}(z) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $Y^{(1)}(z), \ldots, Y^{(s)}(z)$ – неразложимые матрицы и в каждой строке $Y^{(n,1)}(z), \ldots, Y^{(n,n-1)}(z)$, $n = m+1, \ldots, s$ есть по крайней мере одна ненулевая матрица.

Л е м м а.

1. Если $Y(1)$ – неразложимая субстохастическая матрица, то существует целое число $J > N$ такое, что матрица $\Omega_J = \sum_{j=J+1}^{\infty} A_j + Y(1)$ также является неразложимой субстохастической.

2. Если $Y(1)$ – разложимая матрица вида (3), где $Y^{(1)}(1),...,Y^{(m)}(1)$ – субстохастические матрицы, то существует целое число $J > N$ такое, что:

а) либо матрица Ω_J является неразложимой субстохастической;

б) либо матрица Ω_J является разложимой матрицей, имеющей нормальную форму

$$\Omega_J = \begin{pmatrix} \Omega_J^{(1)} & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \Omega_J^{(2)} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \Omega_J^{(k)} & 0 & ... & 0 \\ \Omega_J^{(k+1,1)} & \Omega_J^{(k+1,2)} & ... & \Omega_J^{(k+1,k)} & \Omega_J^{(k+1)} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega_J^{(r,1)} & \Omega_J^{(r,2)} & ... & \Omega_J^{(r,k)} & \Omega_J^{(r,k+1)} & ... & \Omega_J^{(r)} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $1 \le r \le s, 0 \le k \le m$, матрицы $\Omega_J^{(n)}, n = \overline{1,k}$ являются субстохастическими.

Доказательство. Пусть $Y(1)$ – субстохастическая матрица (неразложимая или разложимая).

Предположим, что не существует такого целого числа $J > N$, что матрица Ω_J является субстохастической. Но матрица $\sum_{j=0}^{\infty} A_j + Y(1)$ – стохастическая, и отсутствие такого числа J означало бы, что для любого $J > N$ $\sum_{j=0}^{J} A_j = 0.$ Из этого следует, что все матрицы $A_j, j \ge 0$ – нулевые и $Y(1)$ является стохастической матрицей. Из полученного противоречия немедленно следуют утверждения 1 и 2а леммы.

Пусть теперь $Y(1)$ – разложимая матрица, удовлетворяющая предположению 2 леммы. Понятно, что в результате суммирования матрицы $Y(1)$ вида (3) и неотрицательной матрицы $\sum_{j=J+1}^{\infty} A_j$ степень разложимости $Y(1)$ может либо не измениться, либо уменьшиться. Отсюда следует, что для любого $J > N$ параметры r,k определяющие структуру Ω_J, таковы, что $1 \le r \le s,\ 0 \le k \le m.$ Здесь $r = 1$ соответствует случаю неразложимой Ω_J, который был рассмотрен выше. В случае $r > 1, k \ge 1$ доказательство того, что существует $J > N$ такое, что каждая из матриц $\Omega_J^{(n)}, n = \overline{1,k}$ является субстохастической, не отличается от рассмотренного выше для случая неразложимой субстохастической $Y(1)$. Действительно, как нетрудно видеть, каждая из матриц $\Omega_J^{(n)}, n = \overline{1,k}$ получена в результате суммирования некоторого из блоков $Y^{(1)}(1),...,Y^{(m)}(1)$ (либо блочно-диагональной матрицы, образованной последовательно расположенными блоками) с соответствующим блоком матрицы $\sum_{j=J+1}^{\infty} A_j$. Если бы какая-то из матриц $\Omega_J^{(n)}, n=\overline{1,k}$ была стохастической для любого $J > N$, то из этого следовало бы, что та из матриц (те из матриц) $Y^{(1)}(1),...,Y^{(m)}(1)$, которая вошла (которые вошли) в качестве слагаемого в $\Omega_J^{(n)}$, является стохастической (являются стохастическими), что противоречит предположению 2 леммы. Полученное противоречие заканчивает доказательство утверждения 2 леммы.

Теорема. Пусть выполняются следующие неравенства:

$$\left[V^{(i)}(z)\right]'\Big|_{z=1} < \infty, i=\overline{0,N}, \; Y'(1) < \infty, \; A'(1) < \infty. \tag{5}$$

Тогда

1. Если $Y(1)$ является неразложимой субстохастической матрицей либо разложимой матрицей вида (3), где $Y^{(m)}(1), n=\overline{1,m}$ — субстохастические матрицы, то цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$ является эргодичной.

2. Если $Y(1)$ является неразложимой стохастической матрицей либо разложимой матрицей вида (3), где среди матриц $Y^{(n)}(1), n=\overline{1,m}$ имеются стохастические матрицы $Y^{(n_\ell)}(1), \ell=\overline{1,L}, L \leq m$, то достаточным условием эргодичности цепи Маркова $\xi_n, n \geq 1$ является:

а) в случае неразложимой $Y(1)$ – выполнение следующего неравенства:

$$\left[\det(zI - Y(z))\right]'_{z=1} > 0; \tag{6}$$

б) в случае разложимой $Y(1)$ – выполнение следующих неравенств:

$$\left[\det(zI - Y^{(n_\ell)}(z))\right]'_{z=1} > 0, \; \ell=\overline{1,L}. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим левую часть неравенства (1) как $\vec{\Gamma}_i$, т. е.

$$\vec{\Gamma}_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}\vec{X}_j - \vec{X}_i, \; i > i_0. \tag{8}$$

Пусть $Y(1)$ — неразложимая субстохастическая матрица либо разложимая матрица, удовлетворяющая условиям леммы.

Тогда, в соответствии с леммой, существует $J > N$ такое, что Ω_J является неразложимой субстохастической либо разложимой матрицей с нормальной формой вида (4). Определим тестовую функцию $\vec{X}_j, \; j \geq 0$ следующим образом:

$$\vec{X}_j = \begin{cases} 0, & j \leq J \\ (j+1)\vec{e} + \vec{\alpha}, & j > J, \end{cases} \tag{9}$$

где $\vec{\alpha}$ – некоторый вещественнозначный вектор. Положив в (8) $i_0 = J$ и подставив в (8) $\vec{X}_j, \; j \geq 0$ в виде (9), получим следующие выражения для векторов $\vec{\Gamma}_i$:

$$\vec{\Gamma}_i = \sum_{j=J+1}^{\infty} A_j\left[(j+1)\vec{e}+\vec{\alpha}\right] + \sum_{j=i+1}^{\infty} Y_{j-i+1}\left[(j+1)\vec{e}+\vec{\alpha}\right] - \left[(i+1)\vec{e}+\vec{\alpha}\right] =$$

$$= \sum_{j=J+1}^{\infty} A_j(j+1)\vec{e} + \left(Y(z)-zI\right)'_{z=1}\vec{e} + \left(\sum_{j=J+1}^{\infty} A_j + Y(1) - I\right)\vec{\alpha},\ i > J. \qquad (10)$$

Покажем, что существует такой вектор $\vec{\alpha}$, что векторы (10) имеют только отрицательные компоненты, т. е. имеет место равенство

$$\sum_{j=J+1}^{\infty} A_j(j+1)\vec{e} + \left(Y(z)-zI\right)'_{z=1}\vec{e} + (\Omega_J - I)\vec{\alpha} = \vec{\Delta},\ i > J, \qquad (11)$$

где $\vec{\Delta} < 0$.

Обозначим

$$\vec{\beta}_J = \sum_{j=J+1}^{\infty} A_j(j+1)\vec{e} + \left(Y(z)-zI\right)'_{z=1}\vec{e} - \vec{\Delta} \qquad (12)$$

и возьмем в качестве $\vec{\Delta}$ отрицательный вектор такой, что абсолютные величины его компонент больше абсолютных величин соответствующих компонент вектора $\left(Y(z)-zI\right)'_{z=1}\vec{e}$. Из (11), (12) следует, что $\vec{\alpha}$ удовлетворяет системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(I - \Omega_J)\vec{\alpha} = \vec{\beta}_J, \qquad (13)$$

где $\vec{\beta}_J > 0$.

Так как Ω_J – неразложимая субстохастическая матрица либо разложимая матрица с нормальной формой вида (4), то матрица $(I-\Omega_J)^{-1}$ существует и неотрицательна (см., например [1]). Тогда система (13) имеет единственное неотрицательное решение

$$\vec{\alpha} = (I-\Omega_J)^{-1}\vec{\beta}_J. \qquad (14)$$

Подставив вектор $\vec{\alpha}$ вида (14) в (9), мы получим тестовую функцию, удовлетворяющую условиям теоремы Мустафы и такую, что $\vec{\Gamma}_i = \vec{\Delta} < 0,\ i > J$. Из этого следуют условия (1) теоремы Мустафы.

Нетрудно показать, что при тестовой функции вида (9) выполняются также условия (2) этой теоремы. Тогда цепь Маркова $\xi_n,\ n \geq 1$ эргодична.

Пусть теперь $Y(1)$ – неразложимая стохастическая матрица, т. е. все матрицы $A_j,\ j \geq 0$ – нулевые. Тогда утверждение 2а теоремы следует из результатов для многомерных квазитеплицевых цепей Маркова (см., например [3, 4]).

И, наконец, пусть $Y(1)$ – разложимая матрица вида (3), где среди диагональных блоков $Y^{(n)}(1),\ n=\overline{1,m}$ имеются стохастические матрицы $Y^{(n_\ell)}(1),\ \ell=\overline{1,L},\ L \leq m$. Без ограничения общности будем считать, что $n_\ell = \ell,\ \ell=\overline{1,L}$. Обозначим через d_ℓ размерность матрицы $Y^{(n_\ell)}(1),\ \ell=\overline{1,L}$. Используя схему доказательства леммы, нетрудно показать, что существует целое число $J_0 > N$ такое, что для любого $J \geq J_0$ матрица Ω_J имеет вид (4), где $k \geq L$, матрицы $\Omega_J^{(\ell)},\ \ell=\overline{1,L}$ – стохастические, матрицы $\Omega_J^{(\ell)},\ \ell=\overline{L+1,k}$ – субстохастические.

Возьмем тестовую функцию в виде (9). Число J пока не фиксируем, предполагаем только, что $J \ge J_0$. Векторы $\vec{\Gamma}_i, i > J$ по-прежнему имеют вид (10). Положив $\vec{\Gamma}_i = \vec{\Delta} < 0, i > J$, получим СЛАУ для компонент вектора $\vec{\alpha}$

$$\left(I - \Omega_J\right)\vec{\alpha} = \sum_{j=J+1}^{\infty} A_j \left(j+1\right)\vec{e} + \left(Y(z) - zI\right)'_{z=1}\vec{e} - \vec{\Delta},\ j > J. \qquad (15)$$

Наша задача – показать, что существует вектор $\vec{\Delta} < 0$ такой, что система (15) имеет решение, при котором векторы $\vec{X}_j,\ j \ge 0$ в (9) неотрицательны.

Разобьем вектор $\vec{\alpha}$ на подвекторы следующим образом: $\vec{\alpha} = \left(\vec{\alpha}^{(1)^T},...,\vec{\alpha}^{(L)^T},\vec{\alpha}^{(L+1)^T}\right)^T$, где $\vec{\alpha}^{(\ell)}$ – вектор-столбец размерности d_ℓ, $\ell = \overline{1,L}$. Аналогичным образом разобьем на подвекторы вектор $\vec{\Delta}$, т. е. $\vec{\Delta} = \left(\vec{\Delta}^{(1)^T},...,\vec{\Delta}^{(L)^T},\vec{\Delta}^{(L+1)^T}\right)^T$. Тогда система (15) распадается на $L+1$ СЛАУ

$$\left(I - Y^{(\ell)}(1)\right)\vec{\alpha}^{(\ell)} = \left(Y^{(\ell)}(z) - zI\right)'_{z=1}\vec{e} - \vec{\Delta}^{(\ell)},\ \ell = \overline{1,L} \quad , \qquad (16)$$

$$\left(\hat{I} - \hat{\Omega}_J\right)\vec{\alpha} = \left(\hat{\Omega}_J(z) - z\hat{I}\right)'_{z=1}\vec{e} - \vec{\Delta}^{(l+1)}, \qquad (17)$$

где $\hat{\Omega}_J, \hat{I}, \hat{\Omega}_J(z)$ – прямоугольные матрицы, составленные из последних $K - \sum_{\ell=1}^{L} d_\ell$ строк матриц Ω_J, I_K, $\sum_{j=J+1}^{\infty} A_j z^{j+1} + Y(z)$ соответственно. Из результатов для квазитеплицевых цепей Маркова [3, 4], следует, что при выполнении неравенств (7) (напомним, что мы без ограничения общности условились считать $n_\ell = \ell,\ \ell = \overline{1,L}$) существуют такие отрицательные векторы $\vec{\Delta}_0^{(\ell)}$, $\ell = \overline{1,L}$, что каждая из систем (16) имеет бесконечное множество решений. Зафиксируем какое-то из решений $\vec{a}_0^{(\ell)}$, $\ell = \overline{1,L}$. Зафиксируем также число $J \ge J_0$, обеспечивающее неотрицательность подвекторов $\vec{X}_j^{(\ell)}$, $\ell = \overline{1,L}$ векторов $\vec{X}_j$, $j > J$, задающих тестовую функцию (9). Подставляя таким образом зафиксированные $\vec{\alpha}^{(\ell)}$, $\ell = \overline{1,L}$ и J в (17), получим систему линейных алгебраических уравнений для компонент вектора $\vec{\alpha}^{(L+1)}$:

$$\left(\hat{I} - \hat{\Omega}_J\right)\left(\vec{\alpha}^{(1)^T},...,\vec{\alpha}^{(L)^T},\vec{\alpha}^{(L+1)^T}\right)^T = \left(\hat{\Omega}_J(z) - z\hat{I}\right)'_{z=1}\vec{e} - \vec{\Delta}^{(L+1)}.$$

Нетрудно видеть, что матрица $\tilde{\Omega}_J$, образованная последними $K - \sum_{\ell=1}^{L} d_\ell$ столбцами матрицы $\hat{\Omega}_J$, является либо неразложимой субстохастической, либо разложимой матрицей, у которой диагональные блоки, являющиеся единственными ненулевыми блоками в соответствующих блочных строках, являются субстохастическими неприводимыми матрицами.

Вследствие этого матрица $\left(\tilde{I} - \tilde{\Omega}_J\right)^{-1}$ существует и неотрицательна [1]. Положим в (18) $\vec{\Delta}^{(L+1)} = \Delta_0^{(L+1)}$, где компоненты отрицательного вектора $\vec{\Delta}_0^{(L+1)}$ являются достаточно большими по абсолютной величине числами, обеспечивающими положительность столбца свободных членов системы (18). Тогда (18) имеет единственное неотрицательное решение $\vec{\alpha}_0^{(L+1)}$. Положив в (9) $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_0$, мы определим тестовую функцию, удовлетворяющую теореме Мустафы и такую, что $\vec{\Gamma}_i = \vec{\Delta}_0 < 0, i > J$, т. е. выполняется условие (1) этой теоремы. Нетрудно проверить также, что при такой тестовой функции выполняются и условия (2) теоремы Мустафы. Тогда цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$ эргодична.

Следствие 1. Если $Y_\ell = 0, \ell \geq 0$ и выполняются неравенства $\left[V^{(i)}(z)\right]'_{z=1} < \infty$, $i = \overline{0, N}$, $A'(1) < \infty$, то цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$ эргодична.

Следствие 2. Если матрица $A(1)$ не имеет нулевых строк и выполняются неравенства (5), то цепь Маркова $\xi_n, n \geq 1$ эргодична.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М., 1969.
2. *Гантмахер Ф. П.* Теория матриц. М., 1967.
3. *Dudin A. N., Klimenok V. I.* Multi-dimensional quasitoeplitz Markov chains // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1999. Vol. 12. P. 393–415.
4. *Дудин А. Н., Клименок В. И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн., 2000.
5. *Дудин А. Н., Клименок В. И.* Об одном классе многомерных цепей Маркова // Вестн. ТГУ. Приложение 1. Материалы науч. конф., симпозиумов, школ, проводимых в ТГУ. 2002. № 1. С. 42–47.
6. *Moustafa M. D.* Input-output Markov processes // Proc. Koninkl. Net. Akad. Wetensch. 1957. Vol. A60. P. 112–118.
7. *Neuts M.* Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications // New York, 1989.