СХОДИМОСТЬ АДАПТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ ПРИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Н. А. Карпиевич

Белорусский государственный университет
г. Минск, Беларусь

Приводятся в явном виде условия сходимости в среднем квадратическом и почти наверное адаптивных алгоритмов при коррелированных наблюдениях. При этом допускается, что и сами точки, в которых проводятся наблюдения, могут интерпретироваться как случайные.

Ключевые слова: адаптивный алгоритм, стохастическая аппроксимация, сходимость.

В данной работе изучается сходимость в среднем квадратическом и почти наверное адаптивного алгоритма

$$c_n = c_{n-1} + \gamma_n \varphi(x_n)[y_n - \varphi^t(x_n)c_{n-1}], \tag{1}$$

который, в частности, можно рассматривать как обучающийся алгоритм оценивания вектора неизвестных параметров $c \in R^m$ при квадратичном критерии качества для объекта, описываемым уравнением

$$y = \varphi^t(x)c. \tag{2}$$

Предполагается, что γ_n – заданная числовая последовательность, y и x наблюдаемые процессы, причем

$$y_n = \varphi^t(x_n)c + \xi_n, \tag{3}$$

где y_n – результаты наблюдений; x_n – точки, в которых производятся наблюдения; $\varphi(x)$ – базисные функции, $\{\xi_n\}$ – в общем случае могут быть и случайными, характеризующими помехи.

Алгоритм (1) относится к так называемым алгоритмам типа стохастической аппроксимации (ТСА – алгоритмом). Подобные алгоритмы исследовались в общем случае многими авторами [см., например [1]–[5] и библиографию к ним]. Однако имеющиеся признаки сходимости из-за общности задачи в основном сложны и заданны в неявном виде, что существенно затрудняет их применение к алгоритмам конкретного вида. Причем основное предположение этих работ – некоррелированность выборки. Вопросы же сходимости ТСА – алгоритмов при коррелированных выборках мало изучены. Один из первых результатов в этом направлении получен в работе [5]. В ней для векторного случая исследована задача выбора оптимального γ_n (в смысле минимума следа матрицы вариаций оценок) и задача сходимости в среднеквадратическом для скалярного случая ($m = 1$). Данная работа является непосредственным ее расширением на векторный случай.

Прежде чем приступить к формулировкам основных результатов введем следующие ограничения на параметры алгоритма (1):

а) $\{\varphi(x_n)\}$ – последовательность независимых случайных векторов с неизвестным распределением;

б) $\{\xi_n\}$ – последовательность коррелированных между собой случайных величин, независящих от $\{\varphi(x_n)\}$, с корреляционной функцией

$$M(\xi_n \xi_k) = \rho(n,k), M\xi_n = 0.$$

Кроме того, введем обозначения

$$u_n = c_n - c, \varphi(x_n) = \varphi_n, B_n = \varphi_n \varphi_n^t,$$

$$A_n = I - \gamma_n B_n, \|\varphi\|^2 = \varphi^t \varphi, \tag{4}$$

λ_n – наименьшее собственное число матрицы

$$F_n = M[(2 - \gamma_n \|\varphi\|^2) B_n]. \tag{5}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если выполнены условия (а) и (б) и, кроме того, для любого n

$$F_n = M[(2 - \gamma_n \|\varphi\|^2) B_n] > 0; \tag{6}$$

$$\gamma_n \lambda_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \lambda_n = \infty; \tag{7}$$

$$\frac{\gamma_n}{\lambda_n} M\|\varphi_n\|^2 \rho(n,n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

$$d_{n-1} = \frac{1}{\lambda_n} M\|\varphi_n\| \sum_{s=1}^{n-1} \gamma_s \prod_{k=s+1}^{n-1} (1 - \frac{\gamma_k \lambda_k}{2}) M\|\varphi_s\| |\rho(n,s)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{8}$$

то

$$M\|c_n - c\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

то есть алгоритм (1) сходится в среднеквадратическом.

Доказательство. Алгоритм (1) можно рассматривать с общей точки зрения, как последовательные приближения некоторого линейного операторного уравнения

$$x(t) = A(t)x(t) + f(t).$$

Следовательно, и вопрос его сходимости в метрике определенного пространства можно рассматривать как задачу сходимости приближенного решения операторных уравнений. Как известно из общей теории приближенного решения операторных уравнений (в частности линейных) основное ограничение здесь состоит в том, чтобы соответствующий ряд Неймана сходился. Последнее же обычно достигается наложением на оператор A условия сжимаемости в соответствующем пространстве более общего условия $r(t) \le 1$, где r – спектральный радиус оператора A. Основная идея доказательства это теоремы и подчинена по существу реализации двух этих ограничений применительно к алгоритму (1).

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы. При обозначениях (4) из (3) и (1) получаем

$$u_n = A_n u_{n-1} + \gamma_n \varphi_n \xi_n. \tag{9}$$

Отсюда следует, что

$$u^t{}_n u_n = u_{n-1}^t A_n^2 u_{n-1} + 2\gamma_n \varphi_n^t A_n u_{n-1} \xi_n + \gamma_n^2 \|\varphi_n\|^2 \xi_n^2.$$

Если ввести далее матрицу $W(n, s)$ по правилу

$$W(n,s) = A_n W(n-1,s), s = \overline{1,n}, \tag{10}$$

$W(n, s) = I$ при $n \le s$ то из (9) и (10) следует, что u_n представима в виде

$$u_n = W(n,0)u_0 + \sum_{s=1}^{n} W(n,s)\gamma_s \varphi_s \xi_s, \tag{11}$$

где u_0 – начальное состояние, причем

$$W(n,s) = A_n A_{n-1} \dots A_{s+1}.$$

Тем самым для следа матрицы вариаций оценок получаем следующее выражение

$$M\|u_n\|^2 = M[u_{n-1}^t A_n^2 u_n] + 2\gamma_n M[\varphi_n^t A_n] \sum_{s=1}^{n-1} \gamma_s M[W(n-1,s)] M(\varphi_s)\rho(n,s) + \\ +\gamma_n^2 M\|\varphi_n\|^2 \rho(n,n). \tag{12}$$

Не нарушая общности здесь предполагалось, что начальное состояние некоррелировано с ξ_n. Оценим теперь сверху каждое из слагаемых (12). В силу условия (б)

$$M[u_{n-1}^t A_n^2 u_{n-1}] = M[u_{n-1}^t M(A_n^2) u_{n-1}]. \tag{13}$$

Так как выражение в скобках – квадратичная форма по u_{n-1}, то

$$u_{n-1}^t M(A_n^2) u_{n-1} \le \mu_n M\|u_{n-1}\|^2, \tag{14}$$

где μ_n – наибольшее собственное число матрицы $M(A_n^2)$. Но в соответствии с (4), (5)

$$A_n = I - \gamma_n B_n.$$

Поэтому из (14) и (13) окончательно получим

$$M[u_{n-1}^t A_n^2 u_{n-1}] \le (1-\gamma_n \lambda_n) M\|u_{n-1}\|^2, \tag{15}$$

где λ_n – минимальное собственное число матрицы B_n. В силу условия (6) $\lambda_n > 0$ и $\lambda_n \gamma_n < 1$.

Оценим теперь второе слагаемое. Так как выполнено условие (б), то из уравнения (10) следует

$$\|M(W(n,s))\| \le \|M(A_n)\| \|M(W(n-1,s))\|.$$

Так как по доказанному ранее

$$\|M(A_n)\|^2 \le 1 - \gamma_n \lambda_n,$$

то

$$\|M(W(n,s))\|^2 \le \prod_{k=s+1}^{n} (1-\gamma_k \lambda_k). \tag{16}$$

В результате из (12) с учетом (15) и (16) получаем следующее неравенство для

$$v_n = M\|u_n\|^2$$

$$v_n \le (1-\gamma_n\lambda_n)u_{n-1} + 2\gamma_n M\|\varphi_n\| \sum_{s=1}^{n-1} \gamma_s \beta(n-1,s) M\|\varphi_s\| \rho(n,s) + \gamma_n^2 M\|\varphi_n\|^2 \rho(n,n), \tag{17}$$

где по обозначению

$$\beta(n,s) = \prod_{k=s+1}^{n} (1 - \frac{1}{2}\gamma_k \lambda_k). \tag{18}$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно применить теперь к неравенству (17) лемму 1 [4].

В заключение доказательства остановимся вкратце на анализе условий теоремы. Условие (6) обеспечивает свойство $\lambda_n > 0$, а соответственно при ограничении (7) и сжимаемость матрицы $W(n, s)$. В принципе оно всегда может быть выполнено соответствующим выбором управляющего параметра γ_n и точек x_n, в которых производятся измерения. Что касается условия (8), то при наличии (6) и (7) оно в первую очередь задает ограничения на корреляционные свойства вектора ошибок $\xi_n = (\xi_{1,\dots,}\xi_n)$. Представляет интерес вопрос о существовании представителя класса условий (6)–(8). С этой целью рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть вектор φ_n таков, что для всех n

$$M\|\varphi_n\|^4 \le m_4 < \infty, \lambda_n \ge \lambda > 0. \tag{19}$$

1. Если дополнительно к (6), (19) $\{\xi_n\}$ – последовательность некоррелированных случайных величин, то очевидно выполнение условий теоремы, если только

$$\gamma_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty, |\rho(n,n)| \le \rho < \infty. \tag{20}$$

2. Пусть

$$\rho(n,s) = \begin{cases} 0, n-s > n_0 > 0 \\ |\rho(n,s)| \le \rho < \infty, n-s \le n_0 \end{cases}.$$

Тогда условие (7) приобретает вид (20), а

$$d_{n-1} \le \gamma_n \beta^2 \rho \sum_{s=n-1-n_0}^{n} \gamma_s = 0,(\gamma_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

если только имеет место (20).

3. Пусть $\lambda\gamma_n = \dfrac{2a}{n} < 1$

Тогда (см. [1] с. 241)

$$(1-\xi_s)s^a n^{-a} \le \beta(n-1,s) = \prod_{k=s+1}^{n} (1 - \frac{\lambda_k \gamma_k}{2}) \le \prod_{k=s+1}^{n} (1 - \frac{a}{n}) \le (1+\xi_s)s^a n^{-a}, \tag{21}$$

где $\xi_s \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$.

Теперь нетрудно заметить, что для $\rho(n,s)$ вида

$$\rho_1 \frac{s^p}{n^p} \le |\rho(n,s)| \le \rho \frac{s^p}{n^p}, \rho > 0$$

условие (8) выполняться не будет. Тем более не будет оно выполняться и для равномерно ограниченных $\rho(n,s)$.

Рассмотрим далее случай, когда $\rho(n,s)$ изменяется как показательная функция, т. е.

$$|\rho(n,s)| \le \rho \ell^{-\lambda|n-s|}, \lambda > 0, \tag{22}$$

что характерно для марковских процессов. Тогда, используя оценку (21), можно непосредственно показать, что при условии (20) $d_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а следовательно имеет место среднеквадратическая сходимость. Таким образом, доказано следствие.

Следствие. Если выполнены условия (а), (б), (6) и (19) и одно из дополнительных

1) $\rho(n,s)=\begin{cases}0, n\neq s\\ \rho, n=s\end{cases}$

2) $\rho(n,s)=\begin{cases}0, n-s\geq n_0>0\\ |\rho(n,s)|\leq\rho, n-s\leq n_0\end{cases}$

3) $|\rho(n,s)|\leq\rho\ell^{-\lambda|n-s|}$,

то

$$M\|c_n-c\|^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

как только

$$\gamma_n\to 0,\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty. \tag{23}$$

Оказывается можно получить более общий результат. Для этого докажем предварительно лемму.

Л е м м а. Если выполнено условие (23) и для $n>s$

$$\sup_{n>s}\left|\frac{\rho(n,s)}{\rho(n-1,s)}\right|\leq\rho<1,\sup_{n,s}|\rho(n,s)|<\rho_1<\infty,$$

то

$$\lim d_{n-1}=\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s|\rho(n,s)|\prod_{k=s+1}^{n-1}(1-\gamma_k)=0,$$

причем $d_{n-1}=0(\gamma_n)$

Доказательство. Имеем очевидно

$$d'_{n-1}=\gamma_{n-1}|\rho(n,n-1)|+(1-\gamma_{n-1})\sum_{s=1}^{n-2}\gamma_s|\rho(n-1,s)|\left|\frac{\rho(n,s)}{\rho(n-1,s)}\right|\beta(n-2,s), \tag{24}$$

где по обозначению

$$\beta(n,s)=\prod_{k=s+1}^{n}(1-\gamma_k),\beta(n,n)=1.$$

При условиях леммы из (24) следует непосредственно неравенство

$$d'_{n-1}\leq\rho(1-\gamma_{n-1})d'_{n-2}+\rho_1\gamma_{n-1},$$

которое приводит к следующей оценке

$$d'_{n-1}\leq\rho^{n-1}\beta(n-1,0)d'_0+\rho_1\frac{1}{\rho}\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s\beta(n-1,s)\rho^{(n-s)}, \tag{25}$$

где $d'_0\overset{def}{=}1$.

Так как при условии (23) $\beta(n,s)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ для любого фиксированного s и имеет место неравенство $\beta(n,s)\leq 1$, то первое слагаемое в оценке (25) будет стремиться при $n\longrightarrow\infty$ к нулю не медленнее чем ρ^{n-1}.

Покажем, что и второе слагаемое сходится к нулю, причем его величина порядка γ_n. Действительно для любого $\xi>0$ найдется такое n_0, что для всех $n\geq n_0,\gamma_n\leq\xi$.

Поэтому

$$\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s\beta(n-1,s)\rho^{n-s} \le \sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s\rho^{n-s} \le \int_{s=1}^{n_0-1}\gamma_s\rho^{n-s} + \xi\sum_{n=n_0}^{n}\rho^{n-s} \le a_1\rho^n + a_2\xi,$$

что в силу произвольности ξ и доказывает сходимость d_n к нулю при $n \longrightarrow \infty$.

Что касается скорости сходимости, то она определяется вторым слагаемым в оценке (25), поскольку первое слагаемое имеет скорость более высокую, чем ρ^{n-1}. Для оценки скорости сходимости второго слагаемого к нулю воспользуемся тем, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\beta(n,s)\rho^{-s} = \infty.$$

Значит, по лемме из ([1], с. 215)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s\beta(n-1,s)\rho^{-s}}{\sum_{s=1}^{n-1}\beta(n-1,s)\rho^{-s}} = \lim_{n\to\infty}\gamma_n.$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty}\rho^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s\beta(n-1,s)\rho^{-s} = \lim_{n\to\infty}\gamma_n \lim_{n\to\infty}(\rho^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\beta(n-1,s)\rho^{-s}). \tag{26}$$

Осталось показать, что второе выражение в (26) имеет предел отличный от нуля. Для этого заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}(\rho^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\beta(n-1,s)\rho^{-s}) \le \lim_{n\to\infty}\rho^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\rho^{-3} = \frac{1}{1-\rho}.$$

С другой стороны, так как $\gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то найдется постоянная $a > 0$ такая, что при всех n $1-\gamma_n \ge a$, а значит $\beta(n,s) \ge a^{n-1-s}$.

Тем самым $\lim\limits_{n\to\infty}\rho^{n-1}\sum\limits_{s=1}^{n-1}\beta(n-1,s)\rho^{-s} \ge \dfrac{1}{1-a\rho}$.

В итоге с учетом (26) мы можем записать, что

$$d'_{n-1} = 0(\gamma_n), \tag{27}$$

где (27) означает $d'_{n-1} = 0(\gamma_n) \Leftrightarrow \dfrac{d'_{n-1}}{\gamma_n}$ – ограниченная последовательность.

Теорема 2. Если выполнены условия (а), (б), (6), (19), (23) и, кроме того,

$$\sup_{u,s}\left|\frac{\rho(n,s)}{\rho(n-1,s)}\right| \le \rho < 1, \sup_{n,s}\left|\rho(n,s)\right| < \infty,$$

то

$$M\|c_n - c\|^2 \xleftarrow[n\to\infty]{} 0.$$

При этом, если дополнительно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2 < \infty, \tag{28}$$

то
$$\|c_n - c\|^2 \xrightarrow{п.н.} 0.$$

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из теоремы 1 и доказанной выше леммы, поскольку d_n в теореме с точностью до постоянного множителя совпадает с d_n' из леммы.

Докажем второе утверждение. Для этого согласно задаче 2 ([1], с. 219) достаточно показать, что для $u_n = c_n - c$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{M[\frac{\|u_{n+1}\|^2 - \|u_n\|^2}{\|u_1\|^2,\ldots\|u_n\|^2}\} < \infty .$$

Действительно, из (9) получаем, что

$$\|u_n\|^2 - \|u_{n-1}\|^2 = -\gamma_n u_{n-1}'(2-\gamma_n\|\varphi_n\|^2)B_n u_{n-1} + 2\gamma_n\varphi_n' A_n u_{n-1}\xi_n + \gamma_n^2\|\varphi_n\|^2\xi_n^2,$$

откуда в силу независимости φ_n от $u_{n-1}, u_{n-2,\ldots}$ следует

$$M[(\|u_n\|^2 - \|u_{n-1}\|^2) \big/ u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0] = -\gamma_n\{M[(u_{n-1}' F_n u_{n-1} + 2M(\varphi_n' A_n)u_{n-1}\xi_n +$$

$$+\gamma_n M\|\varphi_n\|^2\xi_n) \big/ u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0]\}.$$

Так как по условию $F_n > 0$, $M\|\varphi_n\|^2 \le b^2$, $MA_n^2 \le 1-\gamma_n\lambda$, а u_{n-1} выражается равенством (11), то так же, как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\{M[(\|u_n\|^2 - \|u_{n-1}\|^2) \big/ u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0]\} \le b^2\sum_{n=1}^{\infty}2\gamma_n\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s\prod_{k=s+1}^{n-1}\left(1-\frac{\gamma_k\lambda}{2}\right)\|\rho(n,s)\| +$$

$$+\rho_1 b^2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2.$$

Заметим, что внутренняя сумма в первом слагаемом имеет тот же вид, что и d_{n-1}^{+} из леммы. Поэтому она представляет величину порядка $0(\gamma_n)$. В итоге предыдущее выражение можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left\{M\left[\left(\|u_n\|^2 - \|u_{n-1}\|^2\right) \big/ u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0\right]\right\} \le K\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^2 ,$$

что в сочетании с условием (28) гарантирует сходимость необходимого ряда, а значит и сходимость

$$\|u_n\|^2 = \|c_n - c\|^2 \xrightarrow{п.н.} 0 .$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. М., 1972.

2. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающихся систем. М., 1970.

3. *Айзерман М. А.* и др. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М., 1970.

4. *Поляк Б. Г.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. Автоматика и телемеханика. 1976. Т. 1. № 12. С. 83–94; 1977. Т. 2. С. 101–107.

5. *Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления М., 1981.

6. *Медведев Г. А.* Адаптивное оценивание при зависимых выборках // Вестн. БГУ. Сер 1. Мат., мех., физика. 1981. № 3.

7. *Красносельский М. А.* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.

8. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М., 1980.