НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ ЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ К ПУПЫРЧАТЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ

С. Н. Гуз, Н. В. Сергиевич, М. Д. Юдин

Мозырский государственный педагогический университет
г. Мозырь, Беларусь
mozvuz@mail.gomel.by

Общие результаты по необходимым и достаточным условиям сходимости распределений сумм зависимых векторов применяются в пуассоновских условиях к суммам зависимых двумерных векторов.

Ключевые слова: распределение вероятностей, случайные векторы, зависимость случайных векторов, предельное распределение.

В [1] даются необходимые и достаточные условия сходимости распределений сумм зависимых векторов к безгранично делимым распределениям, логарифм характеристической функции (х. ф.) которых выражается по формуле, обобщающей известную формулу Колмогорова (см., например [2–4]) для сумм независимых случайных величин.

В данной работе результат из [1] используется для нахождения необходимых и достаточных условий сходимости распределений сумм зависимых двумерных векторов к пупырчатому распределению. Приводятся компьютерные изображения поверхностей плотностей пупырчатых распределений.

1. Сформулируем результат из [1] для двумерных векторов.

Пусть $\{\xi_{ns}\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$, – система серий двумерных случайных векторов, определенных при каждом n на общем вероятностном пространстве, координаты которых имеют ограниченные дисперсии, $\xi_{ns}=\left(\xi_{ns}^{(1)},\xi_{ns}^{(2)}\right)$, $x,t\in R^2$, $x=(x_1,x_2)$, $t=(t_1,t_2)$, $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение.

Центрируем векторы системы $\{\xi_{ns}\}$, положив $\eta_{ns}=\xi_{ns}-M\xi_{ns}$, где $\eta_{ns}=\left(\eta_{ns}^{(1)},\eta_{ns}^{(2)}\right)$. Введем ковариационную матрицу $B_n=\left\|b_{n(i,j)}\right\|$, где $b_{n(i,j)}=\sum\limits_{0\le|s-p|\le m_n} M\left(\xi_{ns}^{(i)}\xi_{np}^{(j)};|\xi_{ns}|\le\varepsilon,\left|\xi_{np}\right|\le\varepsilon\right)$, $i,j=1,2$, $\varepsilon>0$, m_n определяется в теореме 1, и функцию

$$K_n(x)=\sum_{s=1}^{n} M\left(\eta_{ns}^2;\eta_{ns}\le x\right), \tag{1}$$

где $\eta_{ns}\le x$ означает $\eta_{ns}^{(i)}\le x_i$, $i=1,2$ [5]. И опять $h(n)$ – медленно меняющаяся функция при $n\to\infty$ [3].

Как показано в [1], для случая ограниченных дисперсий справедлива.

Теорема 1. Пусть случайные векторы системы $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$–зависимы, где m_0 – любое постоянное число, $0<\rho\le 1/8$, кроме того, найдутся такие H_1, H_2 и n_0, что при $n \ge n_0$,

$$\max_{s,i} M\eta_{ns}^{(i)2} \le \frac{H_1 h(n)}{n}, \quad \max_{s,r,q,i,j,k} M\left|\eta_{ns}^{(i)}\eta_{nr}^{(j)}\eta_{nq}^{(k)}\right| \le \frac{H_2 h(n)}{n^{3/2}}, \tag{2}$$

где $0 \le |s-r| \le m_0 n^{1/4-\rho}$, $0<|s-q| \le m_0 n^{1/4-\rho}$.

Тогда

1) для того чтобы суммы $S_n = \sum_{s=1}^{n} \eta_{ns}$ имели предельное распределение при $n\to\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы:

$$K_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}} K(x) < \infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} B_n = B;$$

2) при этом предельное распределение сумм S_n необходимо безгранично делимо с логарифмом х. ф.

$$\psi(t) = \int_{R^2} \left(e^{i(t,x)} - 1 - i(t,x)\right)\frac{1}{|x|^2} dK(x) - \frac{(t,Bt^*)}{2}, \tag{3}$$

где из области интегрирования исключен нуль-вектор, t^* — вектор-столбец.

В [1] указано, что требования m_n-зависимости в теореме 1 можно заменить на требования выполнения условия равномерно сильного перемешивания (р. с. п.) [3] с коэффициентом $\beta(\tau) = o\left(\tau^{-3-\varepsilon_1}\right)$, $\varepsilon_1 > 0$, с заменой в (2) первого условия на $\max_{s,i} M\eta_{ns}^{(i)} \le \frac{H_1}{n}$.

2. Пусть δ_k – τ-окрестность точки $x_k = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}\right)$, $x_k \ne 0$, на плоскости.

Мы назовем точку x_k носителем пуассоновских вероятностей с весом λ_k, если при любом $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=1}^{n} P\{\eta_{ns} \in \delta_k\} = \lambda_k.$$

Теорема 2. Пусть случайные векторы системы $\{\xi_{ns}\}$ $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$– зависимы, где m_0 – любое постоянное число, $0<\rho\le 1/8$, кроме того, найдутся такие H_1, H_2 и n_0, что выполняются условия (2). Тогда для того чтобы суммы $S_n = \sum_{s=1}^{n} \eta_{ns}$ имели при $n\to\infty$ предельное распределение, логарифм х. ф. которого

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k \left(e^{i(t,x_k)} - 1 - i(t,x_k)\right) - \frac{(t,Bt^*)}{2}, \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$, точки $x_1, x_2, \dots, x_k$ были носителями пуассоновских вероятностей с весами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ при любом $0 < \tau < \min|x_k - x_i|$, $k = \overline{1,\nu}$, $i = \overline{0,\nu}$, $x_0 = 0$, и

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\overline{\bigcup_{k=0}^{\nu}\delta_k}} x^2 dP\{\eta_{ns} \le x\} = 0,$$

где δ_0 – τ-окрестность нуля.

Доказательство.

Достаточность. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 2 $K_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}} K(x)$, где $K(x)$ порождает на $R^2\big/_0$ меру [6] $\mu(B) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{n}\int\limits_B x^2 dP\{\xi_{ns} \le x\}$, $B \in \mathcal{B}(R^2)$, причем мера μ дискретная и ограниченная: $\mu(x_k) = |x_k|^2\lambda_k$ и $\mu(x) = 0$ при $x \ne x_k$, $k = \overline{1,\nu}$.

По свойствам интеграла Стилтьеса и согласно теореме 1 из (3) получаем, что суммы S_n будут иметь предельное распределение, логарифм х. ф. которого выражается по формуле (4).

Необходимость. Если логарифм предельной х. ф. сумм S_n выражается по формуле (4), то согласно теореме 1,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty} B_n = B \text{ и } K_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{сл.}} K(x) < \infty,$$

где $K(x)$ порождает на $R^2\big/_0$ меру $\mu(x_k) = |x_k|^2\lambda_k$ и $\mu(x) = 0$ при $x \ne x_k$, $k = \overline{1,\nu}$. Следовательно, при любом $0 < \tau < \min|x_k - x_i|$, $k = \overline{1,\nu}$, $i = \overline{0,\nu}$, $x_0 = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n} P\{\eta_{ns} \in \delta_k\} = \lambda_k, \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\overline{\bigcup_{k=1}^{\nu}\delta_k}} x^2 dP\{\eta_{ns} \le x\} = 0,$$

т. е. $x_1, x_2, \dots, x_k$ – точки пуассоновских вероятностей с весами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Если $\sum\limits_{s=1}^{n} M\xi_{ns} \to l_0 = \left(l_0^{(1)}, l_0^{(2)}\right)$, то в условиях теоремы 2 суммы $S_n^* = \sum\limits_{s=1}^{n}\xi_{ns}$ будут иметь предельные распределения, логарифм х. ф. которого

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{\nu}\lambda_k\left(e^{i(t,x_k)} - 1 - i(t,x_k)\right) - \frac{(t,Bt^*)}{2} + i(t,l_0),$$

что следует из свойств х. ф.

Следовательно, в условиях теоремы 2, если $\sum_{s=1}^{n} M\xi_{ns} \to l_0$, то предельное распределение сумм S_n будет сверткой нормального, вырожденного распределений и ν распределений Пуассона, то есть будет иметь плотность вероятности

$$p(x) = \frac{e^{-\sum_{k=1}^{\nu}\lambda_k}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{\substack{m_k=0 \\ k=\overline{1,\nu}}}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{\nu} \frac{\lambda_k^{m_k}}{m_k!}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z, B^{-1}z^*\right)\right\}, \tag{5}$$

где $z = x - \left(l_0 - \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k x_k\right) - \sum_{k=1}^{\nu} m_k x_k$, $x = (x_1, x_2)$.

Распределения с плотностью (5) мы называем пупырчатыми.

3. Рассмотрим в качестве примеров два случая.

1. Носители пуассоновских вероятностей не лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

Например, $x_1 = (1,0)$, $x_2 = (0,1)$. В этом случае из формулы (5) получаем, если $\sum_s M\xi_{ns}^{(1)} \to \lambda_1$, $\sum_s M\xi_{ns}^{(2)} \to \lambda_2$ при $n \to \infty$,

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}}{m_1!m_2!} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x-q, B^{-1}(x-q)^*\right)\right\}, \tag{6}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $q = (m_1, m_2)$, $B^{-1} = \left\|c_{n(i,j)}\right\|$ – матрица, обратная матрице B [7].

На рис.1 дано изображение поверхности плотности (6) при $c_{11} = c_{22} = 14$, $c_{12} = c_{21} = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

2. Носители пуассоновских вероятностей x_1 и x_2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат: $x_2 = kx_1$, $0 < k \neq 1$. В этом случае из формулы (5) получаем [8]

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{|B^{-1}|}}{2\pi} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}}{m_1!m_2!} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z, B^{-1}z^*\right)\right\}, \tag{7}$$

где $z = x - (l_0 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2) - m_1 x_1 - m_2 x_2$.

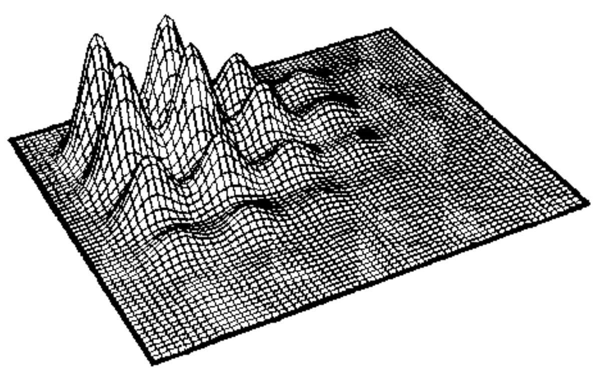

Рис. 1

На рис. 2 дано изображение поверхности плотности (7) при $l_0 = (1,1)$, $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (5,5)$, $\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.5$, $c_{11} = c_{22} = 8$, $c_{12} = c_{21} = 2$.

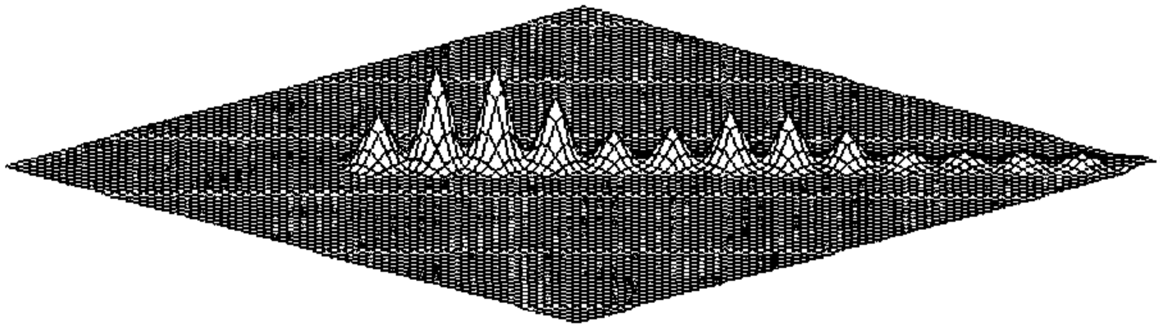

Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юдин М. Д.* О необходимых условиях сходимости распределений сумм зависимых случайных векторов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 1. С. 34–37.
2. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М., 1949.
3. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М., 1965.
4. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., 1972.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М, 1977.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С .В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М, 1972.
7. *Гуз С. Н., Сергиевич Н. В., Юдин М. Д.* О влиянии зависимости случайных слагаемых на предельные распределения их сумм // Весці НАН Беларусі. 2002. № 3. С.30–34.
8. *Гуз С. Н., Сергиевич Н. В., Юдин М. Д.* Сложное пуассоновское распределение в моделировании некоторых деформаций // Веснік Мазырскага дзяржаўнага педагагічнага інстытута. 1999. № 2. С. 26–30.