КОРНЕВОЙ МЕТОД СИНТЕЗА ИНТЕРВАЛЬНОГО УСТОЙЧИВОГО ПОЛИНОМА НА ОСНОВЕ ИСХОДНОГО НЕУСТОЙЧИВОГО

А.А. Несенчук

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Сурганова 6, 22012 Минск, Беларусь
anes@newman.bas-net.by

Введение. В области исследования и синтеза характеристических полиномов динамических систем существует значительное количество известных подходов и методов. Представляют большой интерес задачи об устойчивости, решаемые в современных постановках в робастном варианте [1, 2].

В настоящей работе для нахождения устойчивого полинома на основе исходного неустойчивого используется метод корневого годографа [3, 4, 5]. Метод состоит в последовательной настройке (корректировке) значений всех или некоторых коэффициентов исходного полинома. Данный метод может быть применен для произвольного полинома с коэффициентами из некоторой области вещественного пространства.

1. Постановка задачи. Определим характеристический полином вида

$$g_n(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n, \tag{1}$$

где a_j — действительные коэффициенты полинома, $g = \overline{1, n}$.

Предположим, что полином (1) неустойчив и требуется настроить его коэффициенты таким образом, чтобы перевести его в устойчивое состояние, т.е. построить на его основе устойчивый полином. Эффективным средством синтеза устойчивых полиномов является метод корневого годографа [3, 4, 5]. Однако, как известно, классический метод корневого годографа позволяет варьировать (настраивать) только один коэффициент полинома, а этого далеко не всегда бывает достаточно. Поэтому задача состоит в том, чтобы обобщить метод корневого годографа на случаи вариации произвольного количества коэффициентов и решить таким образом проблему синтеза (по определенному критерию) асимптотически устойчивого полинома на основе заданного неустойчивого. Для ее решения вводится понятие расширенного (полного) корневого годографа полинома.

2. Синтез интервального полинома. Запишем следующую систему полиномов:

$$E_n = \begin{cases} s + a_1 = g_1(s) & (2.1) \\ s^2 + a_1 s + a_2 = g_2(s) & (2.2) \\ \dots & \dots \\ s^\eta + a_1 s^{\eta-1} + \dots + a_{\eta-1}s + a_\eta = g_\eta(s) & (2.\eta) \\ \dots & \dots \\ s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \dots + a_{n-2}s + a_{n-1} = g_{n-1}(s) & (2.n-1) \\ s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = g_n(s), & (2.n) \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$g_\eta(s) = s^\eta + a_1 s^{\eta-1} + \dots + a_{\eta-1}s + a_\eta; \qquad (3)$$

$$g_{\eta-1}(s) = (g_\eta(s) - a_\eta)/s; \qquad (4)$$

η — порядковый номер полинома в системе (2), равный его степени, $\eta = \overline{1, n}$; a_j — коэффициенты, $j = \overline{1, \eta}$. Полиномы системы (2) имеют общие коэффициенты, но не общие корни.

Определение 1. *Систему полиномов вида (2) назовем расширением полинома (1) или расширенным полиномом (1).*

Определение 2. *Расширенным или полным корневым годографом полинома (1) назовем совокупность свободных корневых годографов всех полиномов его расширения.*

Определение 3. *Полином $g_{\eta-1}(s)$ (4) назовем порождающим по отношению к полиному $g_\eta(s)$ (3), а корневой годограф полинома $g_{\eta-1}(s)$ относительно a_j — порождающим годографом по отношению к свободному корневому годографу полинома $g_\eta(s)$.*

Утверждение 1. *Каждая начальная точка свободного корневого годографа полинома $g_\eta(s)$ (3) расширения (2) (за исключением расположенной в начале координат) при вариации некоторого коэффициента a_j этого полинома в пределах определенного интервала значений, $\underline{a}_j \le a_j \le \overline{a}_j$, перемещается вдоль своей уникальной траектории, представляющей собой одну из ветвей корневого годографа полинома $g_{\eta-1}(s)$ (4), построенного относительно этого коэффициента, а ее текущее положение определяется в точке этой ветви, соответствующей текущему значению a_j.*

Следствие. *Если полином $g_{\eta-1}(s)$, который является порождающим по отношению к полиному $g_\eta(s)$, асимптотически устойчив,* *то все начальные точки свободного корневого годографа порождаемого полинома $g_\eta(s)$, за исключением нулевой, располагаются в левой полуплоскости корней: $\forall s_\mu^{\eta-1}[\mathrm{Re}\ s_\mu^{\eta-1} < 0 \to \mathrm{Re}\ p_\mu^\eta < 0]$, а их значения равны соответствующим значениям корней полинома $_{\eta-1}(s)$. Здесь s_μ^η — корни полинома $g_\eta(s)$; $s_\mu^{\eta-1}$ — корни полинома $g_{\eta-1}(s)$; p_μ^η — начальные точки свободного годографа полинома $g_\eta(s)$, значение каждой из которых равно соответствующему значению корня $s_\mu^{\eta-1}$; μ — порядковый номер корня (начальной точки), $\mu = \overline{1, \eta - 1}$.*

На базе приведенного выше следствия разработан метод синтеза устойчивого интервального полинома, который основывается на следующем утверждении и теореме.

Утверждение 2. *Если все начальные точки свободного корневого годографа полинома (3), за исключением одной в начале координат, располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, то для обеспечения асимптотической устойчивости этого полинома необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$0 < a_\eta < \inf A_\eta^+. \tag{5}$$

Теорема 1. *Для обеспечения асимптотической устойчивости полинома (1) достаточно*

а) найти в расширении (2) полинома устойчивый полином степени k ближайшей к n;

б) настроить последовательно начиная с $j = k + 1$ каждый коэффициент a_j полинома (1) в интервале $k < l \leq n$ путем настройки свободного члена a_η соответствующего полинома расширения с порядковым номером $\eta = j$ согласно условию (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Список литературы

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. *Харитонов В.Л.* Об асимптотический устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. XIV. № 11. С. 2086–2088.
3. *Римский Г.В., Таборовец В.В.* Автоматизация исследований динамических систем. Минск: Наука и техника, 1978.
4. *Barmish B.R, Tempo R.* The robust root locus // Automatica. 1993. V. 26. P. 183–192.
5. *Несенчук А. А.* Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода. Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2005.