СВОЙСТВА ГАМИЛЬТОНОВЫХ МАТРОИДОВ

А. Н. Исаченко[1], Я. А. Исаченко[2]

[1]*Белорусский государственный университет*
Минск, Беларусь,
E-mail: isachen@bsu.by
[2]*ООО «Микротест»*
Москва, Россия
E-mail: yarais@mail.ru

Гамильтонов матроид – матроид, имеющий цикл с числом элементов на единицу большим ранга матроида. Рассматривается связность и другие свойства гамильтоновых матроидов.

Ключевые слова: матроид, гамильтонов цикл.

Введение

Матроиды как обобщение структур дискретной математики находят применение во многих разделах теоретической информатики: в теории графов при анализе алгоритмов решения задач, в криптографии при рассмотрении разделения секретов, в исследовании операций при построении моделей отдельных классов игр и задач теории расписаний. Ценность и значимость матроидного подхода заключается в удачном сочетании абстрактного аксиоматического подхода и прикладного характера конструкций. Поэтому исследование свойств различных классов матроидов представляет интерес.

Приведем определения из теории матроидов [1; 2], используемые в настоящей работе.

Матроид – это пара $\boldsymbol{M = (S, F)}$, где $\boldsymbol{S}$ – конечное множество элементов, а $\boldsymbol{F \subseteq 2^S}$ – семейство, для которого выполняются следующие условия (аксиомы независимости):

(i1) $\varnothing \in \boldsymbol{F}$;

(i2), если $\boldsymbol{A \subseteq B}$ и $\boldsymbol{B \in F}$, то $\boldsymbol{A \in F}$;

(i3), если $\boldsymbol{A, B \in F}$ и $\boldsymbol{|A| = |B| + 1}$, то найдется $\boldsymbol{a \in A \setminus B}$ такое, что $\boldsymbol{B \cup a \in F}$.

Подмножества из $\boldsymbol{F}$ называются независимыми, из $\boldsymbol{2^S \setminus F}$ – зависимыми. Ранг $\boldsymbol{\rho(A)}$ подмножества $\boldsymbol{A \in 2^S}$ в матроиде $\boldsymbol{M = (S, F)}$ определяется как мощность максимального независимого множества, содержащегося в $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{\rho(S)}$ есть ранг матроида. Максимальное по включению независимое множество называется базой, минимальное по включению зависимое множество – циклом матроида.

Эквивалентно, в терминах циклов, матроид определяется как пара $\boldsymbol{M = (S, \Sigma)}$, где $\boldsymbol{S}$ – конечное множество, а $\boldsymbol{\Sigma \subseteq 2^S}$ – семейство, для которого выполняются следующие условия (аксиомы циклов):

(c1), если $\boldsymbol{C_1, C_2 \in \Sigma}$, $\boldsymbol{C_1 \neq C_2}$, то $\boldsymbol{C_1 \not\subset C_2}$;

(c2), если $\boldsymbol{C_1, C_2 \in \Sigma}$, $\boldsymbol{C_1 \neq C_2}$ и $\boldsymbol{e \in C_1 \setminus C_2}$, то для любого $\boldsymbol{x \in C_1 \cap C_2}$ существует $\boldsymbol{C_3 \in \Sigma}$ такое, что $\boldsymbol{e \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus x}$.

Элементы $\boldsymbol{a, b \in S}$ в матроиде $\boldsymbol{M = (S, F)}$ назовем связными, если существует цикл $\boldsymbol{C}$ такой, что $\boldsymbol{a, b \in C}$.

(1) Матроид $\boldsymbol{M = (S, F)}$ называют связным, если любые два элемента множества $\boldsymbol{S}$ являются связными.

Примером связного матроида является однородный матроид $U_{k,n}$, $k < n$, матроид, определенный на множестве n элементов, базами которого являются все подмножества с $k < n$ элементами.

Можно дать эквивалентные (1) определения связности, основанные на разложении матроида в произведение матроидов на множествах с меньшим числом элементов и на понятии сепаратора [1; 2]. Произведением матроидов $M_i = (S_i, F_i)$, определенных на попарно непересекающихся множествах S_i, $i = 1, \ldots, t$, называют матроид $M = (S, F)$, где S есть объединение множеств S_i, а F состоит из множеств, каждое из которых есть объединение ровно t подмножеств, по одному из каждого семейства F_i.

(2) Матроид связен тогда и только тогда, когда он не разлагается в произведение меньших матроидов.

Ограничением матроида $M = (S, F)$ на множество $A \subset S$ называется матроид $M.A = (A, F(A))$, где $F(A) = \{ X \mid X \subseteq A, X \in F \}$. Сепаратор матроида $M = (S, F)$ – это подмножество $T \subseteq S$ такое, что $M = (S, F) = M.A \times M.(S \setminus T)$, то есть $M = (S, F)$, является произведением своих ограничений на множества T и $(S \setminus T)$.

(3) Матроид $M = (S, F)$ связен тогда и только тогда, когда он имеет только тривиальные сепараторы $\varnothing$ и S.

Пусть $M = (S, F)$ – матроид ранга $\rho(S) = k$, $k < |S|$. Цикл C матроида M назовем гамильтоновым, если $|C| = k + 1$. Соответственно базу B матроида назовем гамильтоновой, если существует содержащий ее гамильтонов цикл. Матроид, содержащий гамильтонов цикл, также будем называть гамильтоновым. Примером гамильтонова матроида является однородный матроид $U_{k,n}$. В $U_{k,n}$ любое подмножество с $k+1$ элементом является гамильтоновым циклом, и любая его база является гамильтоновой.

Понятие гамильтонова цикла, гамильтоновой базы и гамильтонова матроида введено в работах [3; 4]. В них же указан ряд свойств, касающихся сложности распознавания гамильтонова цикла матроида. В частности, показано, что относительно оракула H-периметр задача распознавания гамильтонова цикла является полиноминально разрешимой. Сведения о двадцати двух матроидных оракулах и их полиномиальной сводимости можно найти в работе [5].

Свойство связности гамильтоновых матроидов

Рассмотрим связность в гамильтоновом матроиде. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Для формулировки первого вспомогательного утверждения приведем следующий известный факт [2].

Утверждение. Если в матроиде $M = (S, F)$ к его базе B добавить элемент $e \in S \setminus B$, то множество $B \cup e$ содержит единственный цикл C такой, что $e \in C$.

Лемма 1. Пусть $M = (S, F)$ – матроид, B – его база, $e, q \in S \setminus B$, $e \neq q$. Пусть $C_1 \subseteq B \cup e$ единственный цикл такой, что $e \in C_1$, а $C_2 \subseteq B \cup q$ единственный цикл такой, что $q \in C_2$. Если $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, то существует цикл $C_3 \subset B \cup e \cup q$ такой, что e, $q \in C_3$.

Доказательство. Пусть $r \in C_1 \cap C_2$. В соответствии с аксиомой (C_2) существует цикл $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus r$, причем $e \in C_3$. Поскольку C_1 – единственный цикл, образующийся при присоединении e к B, то множество $(B \setminus r) \cup e \in F$. Следовательно, $q \in C_3$.

Второе вспомогательное утверждение связано с гамильтоновым циклом матроида.

Лемма 2. Пусть $M = (S, F)$ – гамильтонов матроид и C – его гамильтонов цикл. Тогда для любого элемента $e \in S \setminus C$ множество $C \cup e = C_1 \cup C_2$, где C_1, C_2 – циклы, причем $e \in C_1 \cap C_2$.

Доказательство. Пусть C – гамильтонов цикл матроида $M = (S, F)$. Пусть $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\rho(S, F) = k$, $k < n$. Не нарушая общности, положим $C = \{e_1, \ldots, e_{k+1}\}$. Возьмем элемент, принадлежащий $S \setminus C$, например e_{k+2}. $B_{k+1} = \{e_1, \ldots, e_k\}$ является базой матроида, и поэтому $B_{k+1} \cup e_{k+2}$ содержит единственный цикл C_1, причем $e_{k+2} \in C_1$. Пусть $C_1 = \{e_1, \ldots, e_p, e_{k+2}\}$, $p \leq k$. Для любой базы $B_j = \{e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_{k+1}\}$, $j = p + 1, \ldots, k$, цикл C_1 также является единственным циклом, возникающим при добавлении к базе B_j элемента e_{k+2}.

Рассмотрим теперь базу $B_1 = \{e_2, \ldots, e_{k+1}\}$. Множество $B_1 \cup e_{k+2}$ содержит единственный цикл C_2. Причем $C_2 \supseteq \{e_{p+1}, \ldots, e_{k+1}, e_{k+2}\}$. Иначе, если какое-либо $e_{p+i} \notin C_2$, $1 \leq i \leq k - p + 1$, множество $B_{p+i} \cup e_{k+2}$ содержит помимо цикла C_1 цикл $C_2 \neq C_1$, что является противоречием. Получим $C \cup e_{k+2} = C_1 \cup C_2$ и $e_{k+2} \in C_1 \cap C_2$.

Из определения связности элементов получим следствие.

Следствие. Пусть $M = (S, F)$ – гамильтонов матроид и C – его гамильтонов цикл. Тогда любой элемент $e \in S \setminus C$ связен с каждым элементом гамильтонова цикла C.

Лемма 3. Пусть $M = (S, F)$ – гамильтонов матроид и C – его гамильтонов цикл. Для любых элементов $e, q \in S \setminus C$, $c \neq q$ существует элемент $v \in C$ такой, что для единственного цикла $C_1 \subseteq (C \setminus v) \cup e$, $e \in C_1$ и единственного цикла $C_2 \subseteq (C \setminus v) \cup q$, $q \in C_2$ выполняется $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$.

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $x \in C$. Тогда $C \setminus x$ является базой. Следовательно, существует единственный цикл $C_3 \subseteq (C \setminus x) \cup e$, $e \in C_3$, и единственный цикл $C_2 \subseteq (C \setminus x) \cup q$, $q \in C_2$. Предположим, что $C_2 \cap C_3 = \varnothing$. В силу леммы 2 существует цикл C_1 такой, что $C \cup e = C_1 \cup C_3$ и $e \in C_1 \cap C_3$. Так как $C_3 \neq C$, то $C \setminus C_3 \subseteq C_1$. А поскольку $C_2 \cap C_3 = \varnothing$, то $C_2 \setminus q \subset C \setminus C_3 \subseteq C_1$. В силу аксиомы (c1) имеем $C_3 \not\subset C_1$. Следовательно, существует элемент $v \in C$, $v \notin C_1$, $v \notin C_2$. Множество $C \setminus v$ является базой и поэтому циклы C_1, C_2 являются единственными циклами, возникающими при добавлении к $C \setminus v$ соответственно элементов e и q. При этом $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$.

Теорема. Гамильтонов матроид является связным.

Доказательство. Пусть $M = (S, F)$ – гамильтонов матроид и C – его гамильтонов цикл. В силу следствия леммы 2 достаточно показать, что любые элементы $e, q \in S \setminus C$ являются связными. Возьмем элемент $v \in C$ и рассмотрим базу $B = C \setminus v$. В силу леммы 3 элемент v можно выбрать так, что единственный цикл $C_1 \subseteq B \cup e$, $e \in C_1$ и единственный цикл $C_2 \subseteq B \cup q$, $q \in C_2$ имеют непустое пересечение. Тогда, согласно лемме 1, существует цикл C_3 такой, что $e, q \in C_3$ и, следовательно, e и q связны.

Исходя из утверждений (2), (3) предыдущего раздела для связного матроида, из теоремы получим следствия.

Следствие 1. Гамильтонов матроид неразложим в произведение меньших мароидов.

Следствие 2. Гамильтонов матроид имеет только тривиальные сепараторы $\varnothing$ и S.

Гамильтоновы матроиды и гамильтоновы графы

По неориентированному конечному графу $G = (V, E)$ можно построить матроид $M(G)$, взяв в качестве S множество ребер E и отнеся к F все подмножества ребер, образующие лес. Очевидно, что если граф $G = (V, E)$ имеет гамильтонов цикл, то матроид $\boldsymbol{M(G)}$ является гамильтоновым. Однако, если граф имеет петли и изолированные вершины, он не является гамильтоновым, в то время как его матроид может иметь гамильтонов цикл.

В гамильтоновом графе при добавлении к гамильтонову циклу ребра образуется ровно два цикла. Аналог этого факта для гамильтоновых матроидов дает лемма 2. Но при добавлении элемента к гамильтонову циклу матроида число образующихся циклов может быть больше двух. Для подтверждения этого рассмотрим следующий простой пример. Пусть $\boldsymbol{S = \{ e_1, \ldots , e_7\}}$, а $\boldsymbol{\Sigma}$ состоит из подмножеств $\boldsymbol{\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}}$, $\boldsymbol{\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_7 \}}$, $\boldsymbol{\{ e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}}$, $\boldsymbol{\{ e_1, e_2, e_5, e_6, e_7\}}$. Легко убедиться, что для $\boldsymbol{\Sigma}$ выполняются аксиомы циклов (c1), (c2). То есть пара $\boldsymbol{M = (S, \Sigma)}$ является матроидом. Причем цикл $\boldsymbol{\{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}}$ гамильтонов. Добавление элемента $\boldsymbol{e_7}$ дает три цикла.

Хотя «почти все» графы являются гамильтоновыми, задача определения наличия гамильтонова цикла в графе является *NP*-полной [6]. Теорема Бонди – Хватала, утверждающая, что граф $\boldsymbol{G}$ с $\boldsymbol{n}$-вершинами является гамильтоновым тогда и только тогда, когда его замыкание – гамильтонов граф, где замыкание определяется добавлением в $\boldsymbol{G}$ ребра $\boldsymbol{(u, v)}$ для каждой пары несмежных вершин $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, сумма степеней которых не меньше $\boldsymbol{n}$, имеет в большей степени теоретическое значение. Имеются [7] только достаточные условия Дирака, Оре и Поша, которые полиноминально проверяемы. Перенос этих результатов на матроиды невозможен в силу того, что они формируются в терминах степеней вершин, т. е. отношения инцидентности вершин – ребер, которое отсутствует в матроиде.

Для матроидов проверка гамильтоновости может осуществляться только на основании учета формы задания матроида с использованием понятия оракула матроида [5].

Библиографические ссылки

1. *Welsh D. J. A.* Matroid theory. London : Acad. Press, 1976.
2. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. М. : Мир, 1982.
3. *Исаченко А. Н.* Приложения теории матроидов и гамильтоновы матроиды // Третья международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения»: тезисы докладов, Брест, 17–22 сент. 2012 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. Брест : БрГУ, 2012. С. 29–30.
4. *Исаченко А. Н., Исаченко Я. А.* Периметр матроида и задача коммивояжера на матроиде // XI Белорусская математическая конференция : тезисы докладов междунар. науч. конф. Минск, 5–10 нояб. 2012 г. Ч. 4. Минск : Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. С. 87–88.
5. *Исаченко А. Н., Исаченко Я. А., Ревякин А. М.* О периметрах и окружениях матроида // Вестн. МГАДА: серия экономика. 2013. № 1. С. 63–67.
6. *Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М. : Мир, 1980.
7. *Оре О.* Теория графов. М. : Наука, 1980.