АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА РЕЗОЛЮЦИЙ

О. В. Шут

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
olgashut@tut.by

Рассматриваются два варианта задачи распознавания образов в зависимости от конечности множества значений признаков. Описаны прецедентная и логическая модели представления информации об объектах и показана их эквивалентность. Для бесконечного множества значений признаков предложена кодировка объектов, позволяющая свести этот случай к случаю, когда признаки принимают конечное множество значений. Разработана модификация метода резолюций для прецедентной модели. Построен комбинированный алгоритм, объединяющий метод резолюций с семейством алгоритмов распознавания и работающий не хуже любого из алгоритмов, образующих комбинацию.

Ключевые слова: распознавание образов, многозначная логика, метод резолюций.

Задача распознавания

Приведем общую постановку задачи распознавания Z.

На множестве объектов X произвольной природы задано конечное число подмножеств (классов) $X_1,...,X_l$. Имеется начальная информация I_0 о принадлежности к классам множества объектов $X^0 \subset X$. Требуется указать алгоритм A, определенный на множестве X, который на основании информации I_0 для произвольного объекта $x \in X^q \subset X \setminus X^0$ вычисляет принадлежность x к классам $X_1,...,X_l$.

Пусть $S = \{s_1, s_2,..., s_n\}$ – множество признаков объектов; D_j – множество значений признака s_j, $k = \max_j \{|D_j|\}$. Предполагается, что порядок признаков зафиксирован. Под объектом будем понимать следующее отображение:

$$p: s_1 \times s_2 \times ... \times s_n \to D_1 \times D_2 \times ... \times D_n.$$

Выделим две подзадачи Z в зависимости от k: задачу Z_k, в которой $k < \infty$, и задачу Z_∞, в которой $k = \infty$. В задаче Z_k информация I_0 может быть представлена с помощью как прецедентной модели – путем перечисления объектов, так и логической – через предикаты, использующиеся для описания объектов и классов. В [1] рассматривался частный случай Z_2 задачи Z_k для $k = 2$ и было показано, что для Z_2 можно установить взаимно однозначное соответствие между обеими моделями представления I_0. При логическом подходе, как правило, для решения задач используется метод резолюций [2], который обозначим A_1. В качестве примера алгоритма, применяемого в случае прецедентной модели, приведем алгоритм распознавания A_2 [3]. В [1] предложен комбинированный алгоритм A_C, объединяющий A_1 и A_2.

В данной статье описывается обобщение результатов, полученных в [1] для задачи Z_2, на задачи Z_k и Z_∞. Для задачи Z_k рассматриваются следующие вопросы:

1) установление связи между логической и прецедентной моделями представления информации об объектах;

2) обобщение алгоритмов решения задачи Z_2 для их применения в задаче Z_k.

Задачу Z_∞ при $\left|X^q\right| < \infty$ предлагается свести к задаче Z_k.

Алгебра объектов

Для упрощения представления объектов будем считать, что $D_j = \{0,1,...,\left|D_j\right|-1\}$, $j = \overline{1,n}$. Пусть $D = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$, тогда $k = \left|D\right|$, $D = \{0,1,...,k-1\}$. Набором объектов назовем любое множество объектов из предметной области, рассматриваемой в задаче Z_k.

Пусть точное значение признака s_j объекта p неизвестно, а известно лишь то, что этот признак принимает значения из множества $D_j^p \subset D$. В данной работе объект p рассматривается как набор из $\left|D_j^p\right|$ объектов, у которых значение признака s_j пробегает множество D_j^p; значения же остальных признаков совпадают со значениями соответствующих признаков p. Если $D_j^p = \varnothing$, то будем считать, что объект p не обладает признаком s_j, поэтому p не рассматривается в рамках задачи Z_k.

Объект p называется нормализованным, если значения всех его признаков известны, т. е. $\forall j \left|D_j^p\right| = 1$. Набор называется нормализованным, если все его объекты нормализованы. Нормализованный набор P обозначим $Norm(P)$. В общем случае для произвольного признака существует $\left|\rho(D)\right| = 2^k$ комбинаций его допустимых значений, где $\rho(D)$ – множество всех подмножеств D. Поэтому будем считать, что $X = (\rho(D))^n = \underbrace{\rho(D) \times ... \times \rho(D)}_{n}$. Если же рассматриваются нормализованные объекты, то признаки принимают $\left|D\right| = k$ значений, поэтому $Norm(X) = D^n$.

Рассмотрим операции над объектами и наборами. Пусть заданы наборы P и Q. Введем операцию умножения объектов. Произведение объектов p и q есть объект, значения признаков которого определяются по следующей формуле: $D_j^{pq} = D_j^p \bigcap D_j^q$.

Введем следующие операции над наборами объектов.

1) Отрицание: $\overline{P} = Norm(X) \setminus Norm(P)$.

2) Умножение: $PQ = P \wedge Q = \bigcup_{p \in P, q \in Q} \{pq\}$.

При умножении наборов объекты с $D_j^{pq} = \varnothing$ исключаются из произведения.

3) Сложение: $P \vee Q = P \bigcup Q$.

Объектом-признаком называется объект, для которого точно известно значение ровно одного признака, а информация о значении других признаков отсутствует.

Теорема 1. Система операций $\{\neg, \wedge, \vee\}$ над наборами является полной: любой набор может быть построен из объектов-признаков с помощью этих операций.

Таким образом, построена алгебра объектов $G = <\rho(X), \{\neg, \wedge, \vee\}>$, где $\rho(X)$ – множество наборов объектов, а также алгебра нормализованных объектов $G^{norm} = <\rho(X^{norm}), \{\neg, \wedge, \vee\}>$, где $\rho(X^{norm})$ – множество нормализованных наборов.

Теорема 2. G^{norm} является подалгеброй G.

Кодировка объектов

Введем такую кодировку объектов, которая, во-первых, была бы применима при любом $k < \infty$; во-вторых, позволяла бы учитывать неопределенность значений признаков. Пусть $B_2 = \{0,1\}$. Рассмотрим отображение $c_k : \rho(D) \to B_2^k$, представляющее все комбинации значений признаков в виде k-мерных двоичных векторов:

$$c_k(D_j^p) = (d_{j0}^p \quad d_{j1}^p \quad \dots \quad d_{jk-1}^p), \text{ где } d_{ji}^p = \begin{cases} 0, & i \notin D_j^p \\ 1, & i \in D_j^p \end{cases}.$$

Иначе говоря, в $c_k(D_j^p)$ единицами обозначены допустимые значения признака s_j, а нулями – недопустимые. Если объект p нормализован, то $c_k(D_j^p)$ будет содержать ровно одну единицу в позиции, соответствующей значению признака s_j.

Теперь закодируем все объекты из X: применим кодировку c_k ко всем признакам всех объектов. Тогда все объекты записываются в виде nk-мерных двоичных векторов. Обозначим полученную кодировку объектов через $c : (\rho(D))^n \to B_2^{nk}$:

$$c(p) = (c_k(D_1^p) \ \dots \ c_k(D_n^p)).$$

Если все объекты из набора P закодированы с помощью c, обозначим этот набор $c(P)$. Пусть $C = <\rho(B_2^{nk}), \{\neg, \wedge, \vee\}>$ – алгебра объектов, записанных в кодировке c; C^{norm} – алгебра нормализованных объектов, записанных в кодировке c.

Теорема 3. $G \cong C$.

Следствие. $G^{norm} \cong C^{norm}$.

Из теоремы 3 следует, что $c(X) = B_2^{nk}$, поэтому $C = <\rho(c(X)), \{\neg, \wedge, \vee\}>$.

Покажем теперь, как при $\left|Norm(X^q)\right| < \infty$ свести задачу Z_∞ к задаче Z_k. Множество значений признака s_j определим как множество его значений в $Norm(X^q)$: $D_j = \bigcup_{p \in Norm(X^q)} D_j^p$, $j = \overline{1,n}$. Поскольку $\left|Norm(X^q)\right| < \infty$ и $\forall p \in Norm(X^q)$ $\left|D_j^p\right| = 1$, то $\left|D_j\right| < \infty$. Так как $\left|D\right| = \max_j \left|D_j\right| < \infty$, то $k < \infty$, что и требовалось. Поэтому к объектам из X^q можно применить кодировку c, которая использовалась в задаче Z_k.

Метод объективных резолюций

Рассмотрим логическую модель представления информации. Введем переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$, соответствующие значениям признаков $s_1, s_2, \dots, s_n$, где $x_i \in D$. Множество объектов класса X_i описывается логической формулой φ, состоящей из

$x_1, x_2, ..., x_n$ и операций алгебры k-значной логики [2]. Поскольку формула φ определяет, принадлежит ли p классу X_i, то она должна принимать два значения, соответствующие ситуациям $p \in X_i$ и $p \notin X_i$. Пусть φ принимает значения:

$$\varphi(p) = \begin{cases} k-1, \ p \in X_i \\ 0, \ p \notin X_i \end{cases}$$

Пусть $x_1, x_2 \in D$. Рассмотрим следующие операции k-значной логики [2]:

1) Отрицание Лукашевича: $\sim x = k - 1 - x$

2) Обобщение конъюнкции: $x_1 x_2 = x_1 \wedge x_2 = \min(x_1, x_2)$

3) Обобщение дизъюнкции: $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$

Обозначим через F_k множество функций k-значной логики, используемых для описания объектов, а через $H = < F_k, \{\sim, \wedge, \vee\} >$ – алгебру этих функций.

Теорема 4. $C^{norm} \cong H$.

Из теорем 3 и 4 следует эквивалентность прецедентного и логического способов представления информации I_0.

Модифицируем метод резолюций так, чтобы его можно было применять к объектам, описанным прецедентным способом. Этот метод назовем методом объектных резолюций. Объект r называется объектной резольвентой, построенной по объектам p и q, если значения признаков r удовлетворяют следующему условию:

$$D_j^r = \begin{cases} D_j^p \bigcup D_j^q, \ j = h \\ D_j^p \bigcap D_j^q, \ j \neq h \end{cases}, \text{ где } h \text{ – номер произвольного признака } s_h \in S.$$

Операцию построения объектной резольвенты обозначим $r = Or_h(p,q)$. Пусть $L(p)$ – формула, описывающая объект p. Покажем, что построение $Or_h(p,q)$ эквивалентно выводу $L(r)$ из $L(p)$ и $L(q)$ с помощью операций k-значной логики.

Теорема 5. Пусть заданы объекты p и q и признак $s_h \in S$. Пусть $r = Or_h(p,q)$. Тогда из $L(p) \vee L(q)$ следует $L(r)$.

Опишем алгоритм использования метода объектных резолюций в задаче Z_k. Зафиксируем номер i класса X_i и определим, принадлежит ли x этому классу.

Алгоритм объектных резолюций A_1:

Шаг 1. Введем множество $Y = X^0 \bigcap X_i$.

Шаг 2. Если $x \in Y$, то переходим к шагу 6, иначе – к шагу 3.

Шаг 3. Выбираем из Y нерассмотренную тройку (p,q,h), где p и q – объекты, h – номер признака. Если все такие тройки уже рассмотрены, то переходим к шагу 6.

Шаг 4. Вычисляем $r = Or_h(p,q)$.

Шаг 5. Добавляем к Y объект r: $Y := Y \bigcup \{r\}$. Возвращаемся на шаг 2.

Шаг 6. Алгоритм завершает работу.

Если алгоритм A_1 закончил работу из-за получения x, это значит, что набор $Norm(X^0 \bigcap X_i)$ содержит объект x, поэтому $x \in X_i$. Иначе с помощью данного алгоритма нельзя сделать никаких выводов о принадлежности x классу X_i.

Комбинированный алгоритм

Комбинированный алгоритм A_C, объединяющий A_1 и A_2, основан на следующей идее: вначале применим A_1 ко всему входному множеству объектов; далее применим A_2 к тем объектам, для которых не удалось получить результат с помощью A_1. Поскольку для A_2 требуется, чтобы значения признаков были заданы однозначно, то на вход алгоритма A_C подаются объекты, представленные в кодировке c.

Сравним алгоритмы A_1, A_2 и A_C. Введем систему предикатов $P_1,...,P_l$, характеризующих принадлежность объектов к классам $X_1,...,X_l$, как это сделано в [4]:

$$\forall x \in X \quad (P_i(x) \in \{0,1\} \wedge (P_i(x) = 1 \Leftrightarrow x \in X_i)).$$

Введем такой функционал качества, значения которого легко интерпретировались бы в терминах близости $P_i(x)$ и $P_i^A(x)$, где $P^A(x) = (P_1^A(x),...,P_l^A(x))$ – классификационный вектор, построенный алгоритмом $A \in \{A_1, A_2, A_C\}$. Рассмотрим следующий функционал для алгоритма A, решающего задачу Z_k на множестве $X' \subseteq X$:

$$\Phi_A(X') = 1 - \frac{1}{l}\frac{1}{|X'|}\sum_{i=1}^{l}\sum_{x \in X'}(|P_i(x) - P_i^{A_j}(x)|)$$

Φ_A является частным случаем функционала, рассматриваемого в [4]. Предпочтительным будем считать тот алгоритм, который имеет наибольшее значение Φ_A.

Теорема 6. $\Phi_{A_C}(X) \geq \max\{\Phi_{A_1}(X), \Phi_{A_2}(X)\}$.

Таким образом, задача Z_k полностью исследована: во-первых, показана эквивалентность прецедентной и логической моделей представления информации в Z_k; во-вторых, разработан комбинированный алгоритм, который объединяет метод объектных резолюций с семейством алгоритмов распознавания и работает не хуже любого из алгоритмов, образующих комбинацию. Кроме того, предложена кодировка объектов для сведения задачи Z_∞ к задаче Z_k в случае конечного множества X^q.

Библиографические ссылки

1. *Шут О. В*. Метод решения задач распознавания на основе логической и прецедентной моделей // Информатика. 2012. № 3. С. 35–50.
2. *Яблонский С. В*. Введение в дискретную математику // М. : Наука, 1986.
3. *Краснопрошин В. В., Образцов В. А.* Распознавание с обучением как задача выбора // Цифровая обработка изображений. Минск : ИТК, 1998. С. 80–94.
4. *Краснопрошин В. В., Образцов В. А.* Проблема принятия решений по прецедентности: разрешимость и выбор алгоритмов // Выбраныя навуковыя працы Беларускага дзярж. ун-та. 2001. Т. 6. С. 285–312.