АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ЭКРАНИРОВАНИЯ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИГНАЛОВ

В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко

НИИ прикладных проблем математики и информатики БГУ
Минск, Беларусь
E-mail: bsu_erofeenko@tut.by

Разработан метод математического моделирования процессов преобразования импульсных электромагнитных полей, распространяющихся под произвольным углом к экрану и несущих широкополосный сигнал, при проникновении через плоский биизотропный экран с произвольными комплексными материальными параметрами. Решена краевая задача проникновения для сигналов со спектром в виде атомарных функций. Разработана компьютерная программа для численного исследования сигналов за экраном.

Ключевые слова: импульсные поля, сигнал, уравнения Максвелла, спектральная функция, атомарные функции, биизотропные экраны.

Введение

Важно для приложений исследование электродинамических свойств композитных материалов [1]. Композитные материалы представляют собой однородные матрицы, заполненные большим числом случайно распределенных мелких неоднородностей с различной геометрией и материальным составом. Для электродинамического моделирования композитных материалов используются математические модели биизотропных материалов с эффективными параметрами среды.

Расчет электромагнитных экранов, выполненных из композитных материалов, в настоящее время актуальная задача. Экраны используются для решения проблемы электромагнитной совместимости сложных технических устройств радиотехники и электроники, для защиты чувствительных приборов от воздействия внешних помехонесущих электромагнитных излучений. В литературе большинство работ посвящено исследованию взаимодействия с экранами полей с гармонической зависимостью от времени.

Для приложений важна разработка и исследование математических моделей, описывающих распространение в среде импульсных сигналов с помощью электромагнитных полей и их проникновение через композитные экраны. Для моделирования процессов передачи информации используются сигналы с финитным спектром, представленные через атомарные функции, теория которых хорошо разработана [2].

Постановка задачи

В пространстве с электрической и магнитной постоянными ε_0, μ_0 расположен плоский экран $D(0 < z < \Delta)$, заполненный биизотропным материалом с физическими комплексными параметрами $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $G = G_r / c$, $Z = Z_r / c$. Из полупространства $D_1(z<0)$ на слой D воздействует плоское импульсное электромагнитное поле $\vec{E}_0(\vec{r},t), \vec{H}_0(\vec{r},t)$, которое в частотной области определяется формулами [3]

$$\hat{\vec{E}}_0(\vec{r},\omega)=\hat{A}_0(\omega)\vec{W}_0^{(-1)}(\vec{r},\omega)+\hat{B}_0(\omega)\vec{W}_0^{(-2)}(\vec{r},\omega),$$
$$\hat{\vec{H}}_0(\vec{r},\omega)=h_0\left(\hat{A}_0(\omega)\vec{W}_0^{(-2)}(\vec{r},\omega)+\hat{B}_0(\omega)\vec{W}_0^{(-1)}(\vec{r},\omega)\right), \quad (1)$$

где

$$\vec{W}_0^{(\mp1)}=i\vec{V}_1\exp\left(i\omega p_\pm(\vec{r},\theta_0,\varphi_0)\right), \qquad \vec{W}_0^{(\mp2)}=\pm\vec{V}_2\exp\left(i\omega p_\pm(\vec{r},\theta_0,\varphi_0)\right),$$
$$\vec{V}_1=\sin\varphi_0\,\vec{e}_x-\cos\varphi_0\,\vec{e}_y, \qquad \vec{V}_2=-\cos\theta_0\left(\cos\varphi_0\,\vec{e}_x+\sin\varphi_0\,\vec{e}_y\right)+\sin\theta_0\,\vec{e}_z,$$
$$p_\pm=\frac{1}{c}(\alpha_1x+\alpha_2y\pm z\cos\theta_0), \quad \alpha_1=\cos\varphi_0\sin\theta_0, \quad \alpha_2=\sin\varphi_0\sin\theta_0, \quad p=p_+,$$

$h_0=\dfrac{1}{iZ_0}$, $Z_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, $\hat{A}_0(\omega)$, $\hat{B}_0(\omega)-$заданные функции круговой частоты $\omega=2\pi f$; $\vec{r}=(x,y,z)$; θ_0,φ_0-углы, характеризующие направление распространения первичного поля; c – скорость света в вакууме.

Таким образом, первичное поле (1) представимо в виде

$$\hat{\vec{E}}_0(\vec{r},\omega)=\left(i\hat{A}_0\vec{V}_1+\hat{B}_0\vec{V}_2\right)e^{i\omega p}, \quad \hat{\vec{H}}_0(\vec{r},\omega)=h_0\left(\hat{A}_0\vec{V}_2+i\hat{B}_0\vec{V}_1\right)e^{i\omega p}. \quad (2)$$

Поля $\hat{\vec{E}}_0(\vec{r},\omega), \hat{\vec{H}}_0(\vec{r},\omega)$ являются спектральными плотностями полей $\vec{E}_0(\vec{r},t), \vec{H}_0(\vec{r},t)$ во временной области. Электромагнитное поле в частотной области (2) связано с полем во временной области с помощью преобразования Фурье

$$\vec{E}_0(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\vec{E}}_0(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t}d\omega=iA_0(t-p)\vec{V}_1+B_0(t-p)\vec{V}_2,$$
$$\vec{H}_0(\vec{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\vec{H}}_0(\vec{r},\omega)e^{-i\omega t}d\omega=h_0\left(A_0(t-p)\vec{V}_2+iB_0(t-p)\vec{V}_1\right), \quad (3)$$

где для временного сигнала $A_0(t)$ $(B_0(t))$ имеем соотношения

$$\hat{A}_0(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}A_0(t)e^{i\omega t}dt, \quad A_0(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{A}_0(\omega)e^{-i\omega t}d\omega. \quad (4)$$

В результате взаимодействия первичного поля (2) с экраном D образуются поля: $\hat{\vec{E}}_1', \hat{\vec{H}}_1'-$отраженное поле в D_1; $\hat{\vec{E}}_1=\hat{\vec{E}}_0+\hat{\vec{E}}_1'$, $\hat{\vec{H}}_1=\hat{\vec{H}}_0+\hat{\vec{H}}_1'-$суммарное поле в D_1; $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{H}}-$поле в слое D; $\hat{\vec{E}}_2, \hat{\vec{H}}_2-$ поле, проникшее в область $D_2(z>\Delta)$.

Сформулируем краевую задачу в частотной области для спектральных полей.

Краевая задача. Требуется для заданного поля (2) определить поля $\hat{\vec{E}}_1', \hat{\vec{H}}_1'$; $\hat{\vec{E}}, \hat{\vec{H}}$; $\hat{\vec{E}}_2, \hat{\vec{H}}_2$ соответственно в областях D_1, D, D_2, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла [3]

$$\operatorname{rot}\hat{\vec{E}}_1'=i\omega\mu_0\hat{\vec{H}}_1', \quad \operatorname{rot}\hat{\vec{H}}_1'=-i\omega\varepsilon_0\hat{\vec{E}}_1', \quad z<0,$$

$$\operatorname{rot}\hat{\vec{E}} = i\omega\left(\mu\hat{\vec{H}} + Z\hat{\vec{E}}\right)_1, \quad \operatorname{rot}\hat{\vec{H}} = -i\omega\left(\varepsilon\hat{\vec{E}} + G\hat{\vec{H}}\right), \quad 0 < z < \Delta, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\hat{\vec{E}}_2 = i\omega\mu_0\hat{\vec{H}}_2, \quad \operatorname{rot}\hat{\vec{H}}_2 = -i\omega\varepsilon_0\hat{\vec{E}}_2, \quad z > \Delta,$$

граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих полей на плоскостях $\Gamma_1(z=0)$, $\Gamma_2(z=\Delta)$ и условиям на бесконечности.

Аналитическое решение задачи

В задачах экранирования электромагнитных полей основным является определение отраженных полей и полей, прошедших через экран. Для аналитического решения задачи (5) результирующие поля выразим через базисные поля (1), в виде комбинаций

$$\hat{\vec{E}}_1' = \hat{x}_1(\omega)\vec{W}_0^{(+1)} + \hat{x}_2(\omega)\vec{W}_0^{(+2)}, \quad \hat{\vec{H}}_1' = h_0\left(\hat{x}_1(\omega)\vec{W}_0^{(+2)} + \hat{x}_2(\omega)\vec{W}_0^{(+1)}\right), \quad z < 0, \tag{6}$$

$$\hat{\vec{E}}_2 = \hat{y}_1(\omega)\vec{W}_0^{(-1)} + \hat{y}_2(\omega)\vec{W}_0^{(-2)}, \quad \hat{\vec{H}}_2 = h_0\left(\hat{y}_1(\omega)\vec{W}_0^{(-2)} + \hat{y}_2(\omega)\vec{W}_0^{(-1)}\right), \quad z > \Delta. \tag{7}$$

Поля (6), (7) удовлетворяют уравнениям (5) и решение задачи сводится к определению функций $\hat{x}_j(\omega), \hat{y}_j(\omega)$, $j = 1,2$. Для решения задачи (5) эффективно использование нелокальных граничных условий.

Для биизотропного экрана D амплитуды полей (7), зависящие от частоты ω, определяются формулами

$$\hat{y}_1(\omega) = \frac{G}{Q}\left(A_0Q_{22} + B_0Q_{12}\right), \quad \hat{y}_2(\omega) = -\frac{G}{Q}\left(A_0Q_{21} + B_0Q_{11}\right).$$

В дальнейшем рассмотрим случай полей (2), когда $\hat{A}_0 \neq 0, \hat{B} = 0.$ Тогда

$$\hat{y}_1(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{A}_0(\omega), \quad \hat{y}_2(\omega) = \hat{g}(\omega)\hat{A}_0(\omega).$$

В качестве сигнала $A_0(t)$ выберем широкополосный с частотной полосой пропускания $f_1 < f < f_2$. Обозначим: $\omega_j = 2\pi f_j$, $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = 2\pi f_0$, $\alpha = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$, $\tau_j = \omega_j/\omega_0$, $\tau = \tau_2 - \tau_1$.

Определим сигнал формулами $\hat{A}_0(\omega) = \hat{s}_0(\omega - \omega_0)$, $\hat{s}_0(\omega) = \dfrac{\pi a E_0}{\alpha(a-1)} h_a^{(\alpha)}(\omega)$,

$$A_0(t) = E_0 e^{-i\omega_0 t} H_a(\alpha(a-1)t), \; B_0(t) = 0,$$

где

$$h_a^{(\alpha)}(\omega) = \frac{2}{a} h_a\left(\frac{\omega}{\alpha(a-1)}\right), \quad H_a(y) = \prod_{k=1}^{\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{y}{a^k}\right), \quad \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x},$$

$h_a(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} H_a(y)e^{iyx}dy$ – атомарная функция с параметром $a \geq 2$ [2], $\operatorname{supp} h_a^{(\alpha)}(x) = (|x| < \alpha)$. Функция $\hat{s}_0(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq \alpha$, α соизмерима с частотой ω_0.

Импульсное электрическое поле, прошедшее через экран, определяется формулой $\vec{E}_2 = iy_1(t-p)\vec{V}_1 + y_2(t-p)\vec{V}_2$.

Используя теорему Котельникова–Шеннона [4], построим аналитические выражения для огибающих линий быстро осциллирующих импульсов

$$T_0(t) = |A_0(t)| = |E_0 H_a(\alpha(a-1)t)|, \quad T_1(t) = |y_1(t)| = |B_h(t)|, \quad T_2(t) = |y_2(t)| = |B_g(t)|, \tag{8}$$

где

$$B_h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m^{(h)} \exp(i\eta_m) \operatorname{sinc}(\alpha t - \pi m), \quad \eta_m = \frac{2\pi m}{\tau},$$

$$B_g(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m^{(g)} \exp(i\eta_m) \operatorname{sinc}(\alpha t - \pi m),$$

$$y_m^{(h)} = y_1(t_m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k J_{k-m}^{(h)} \exp(-i\eta_k), \quad \delta_k = E_0 H_a((a-1)\pi k),$$

$$y_m^{(g)} = y_2(t_m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k J_{k-m}^{(g)} \exp(-i\eta_k),$$

$$J_k^{(h)} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau_1}^{\tau_2} h(f_0 w) \exp(i\eta_k w) dw, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$J_k^{(g)} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(f_0 w) \exp(i\eta_k w) dw.$$

Разработана компьютерная программа для вычисления импульсов двух поляризаций $T_1(t), T_2(t)$ за экраном. Исследованы свойства экранирования широкополосных сигналов в зависимости от параметров биизотропного экрана.

Библиографические ссылки

1. *Виноградов А. П.* Электродинамика композитных материалов. М. : Эдиториал УРСС, 2001.
2. *Кравченко В. Ф.* Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. М. : Радиотехника, 2003.
3. *Ерофеенко В. Т., Козловская И. С.* Аналитическое моделирование в электродинамике. Минск : БГУ, 2010.
4. *Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П.* Аппроксимация финитными функциями и теорема Уиттекера – Котельникова – Шеннона в цифровой обработке сигналов // Успехи современной радиоэлектроники. 2003. № 9. С. 3–36.