Математика и информатика

УДК 512.543

В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, Я.А. ЖУКОВЕЦ

АЛЬТЕРНАТИВА ТИТСА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

We consider generalized tetraedron groups Γ of tipe (4,8,2,2,2). We find some sufficient conditions Γ to contain a non-abelian free subgroup.

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Обобщенной тетраэдральной группой называется группа с копредставлением вида

$$\Gamma = \left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \right\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении $\left\langle x_i \,\middle|\, x_i^{k_i} = 1 \right\rangle * \left\langle x_j \,\middle|\, x_j^{k_j} = 1 \right\rangle$, которое не является собственной степенью. Существует гипотеза [1], что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех групп, кроме групп следующих типов [1, 2]:

1. $\left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha} x_2^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^2 = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \right\rangle$, $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} + \dfrac{1}{n} \geq 1$;
2. $\left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha} x_2^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^3 = (x_1^{\eta} x_3^{\theta})^n = 1 \right\rangle, n = 3, 4, 5$, $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} + \dfrac{1}{n} \geq \dfrac{7}{6}$;
3. $\left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha} x_2^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^3 = (x_1^{\eta_1} x_3^{\theta_1} x_1^{\eta_2} x_3^{\theta_2})^2 = 1 \right\rangle$, $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} \geq \dfrac{2}{3}$.

В данной работе мы рассмотрим группы вида $\Gamma = \left\langle a, b, c \,\middle|\, a^4 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$. Доказывается следующая

Теорема. *Пусть* $\Gamma = \left\langle a, b, c \,\middle|\, a^4 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$ *– обобщенная тетраэдральная группа, где* $R(a,b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 3$, $1 \leq l_i \leq 7$, $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. *Если либо* $K \not\equiv 0 \pmod 2$, *либо* $L \not\equiv 4 \pmod 8$, *то* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Рассмотрим подгруппу Γ_1 группы Γ, порожденную элементами a, b. Тогда $\Gamma_1 \lhd \Gamma$ и она имеет копредставление: $\Gamma_1 = \left\langle a, b \,\middle|\, a^4 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \right\rangle$, где $R(a,b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 3$, $1 \leq l_i \leq 7$. Таким образом, если Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то и Γ содержит такую подгруппу.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A]$, $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$ равны нулю. Конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются: циклические группы, группы диэдра D_n, а также A_4, S_4, A_5. Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2\cos\frac{\pi u}{n}$, где $(u,n)=1$. Гомоморфизм $\rho : \Gamma' = \left\langle a,b \middle| a^k = b^l = R(a,b)^m = R(a^{-1},b^{-1})^m = 1 \right\rangle \to PSL_2(\mathbb{C})$ будем называть существенным, если образы элементов a, b, $R(a,b)$, $R(a^{-1},b^{-1})$ имеют порядки k, l, m, m соответственно. Группу Γ' будем называть псевдоконечной, если образ $\rho(\Gamma')$ конечен для любого существенного представления ρ.

Лемма 1. *Если существует сюръективный гомоморфизм групп $f : G \to H$, где H содержит свободную подгруппу ранга 2, то группа G также содержит свободную подгруппу ранга 2.*

Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы построить представление $\rho : G \to PSL_2(\mathbb{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа. Тогда $\rho(G)$, а, следовательно, по лемме 1 и G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Для произвольного элемента $w \in F_3$, где F_3 – свободная группа с базисом g_1, g_2, g_3, рассмотрим следующую функцию:

$$\tau_w : SL_2(\mathbb{C})^3 \to \mathbb{C}, \quad \tau_w(A,B,C) = \operatorname{tr} w(A,B,C).$$

Функцию τ_w обычно называют характером Фрике. Справедливы следующие соотношения между характерами Фрике:

$$\tau_{w^{-1}} = \tau_w, \quad \tau_{uv} = \tau_u \tau_v - \tau_{u^{-1}v}.$$

Обозначим $x_i = \tau_{g_i}$, $y_{ij} = \tau_{g_i g_j}$, $z_{ijk} = \tau_{g_i g_j g_k}$. В [4] доказано, что

$$\tau_w = A_w(x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23}) + B_w(x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23}) z_{123},$$

где $A_w(x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23})$, $B_w(x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23})$ – многочлены от переменных $x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23}$. Пусть

$$P = x_1 y_{23} + x_2 y_{13} + x_3 y_{12} - x_1 x_2 x_3, \tag{1}$$

$$Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2 + y_{23}^2 + y_{12} y_{13} y_{23} - x_1 x_2 y_{12} - x_1 x_3 y_{13} - x_2 x_3 y_{23} - 4. \tag{2}$$

Тогда z_{123} и z_{132} – корни квадратного уравнения

$$z^2 - Pz + Q = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим подробнее случай свободной группы $F_2 = \langle g,h \rangle$ с двумя образующими. В [5] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \cdots g^{u_s} h^{v_s}$ – циклически редуцированное слово в F_2 и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то $\tau_w = Q_w(x,y,z)$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами, который называют многочленом Фрике элемента w.

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \tag{4}$$

Лемма 2. *1) Для любой тройки значений $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ существует пара матриц $A_0, B_0 \in SL_2(\mathbb{C})$ таких, что $\operatorname{tr} A_0 = x_0, \operatorname{tr} B_0 = y_0, \operatorname{tr} A_0 B_0 = z_0$.*

2) Для произвольных чисел $x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23}$, $z \in \mathbb{C}$, таких, что $h = z^2 - Pz + Q = 0$, где P и Q удовлетворяют равенствам (1) – (2), существуют матрицы $A,B,C \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = x_1$, $\operatorname{tr} B = x_2$, $\operatorname{tr} C = x_3$, $\operatorname{tr} AB = y_{12}$, $\operatorname{tr} AC = y_{13}$, $\operatorname{tr} BC = y_{23}$, $\operatorname{tr} ABC = z$.

Рассмотрим группу $\Gamma_1 = \left\langle a, b \middle| a^4 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \right\rangle$. Пусть $Q_R(x, y, z)$ – полином Фрике элемента R. Положим

$$g(z) = Q_R(2\cos\frac{\pi}{4}, 2\cos\frac{\pi}{8}, z). \tag{5}$$

Если z_0 – корень $g(z)$, то по лемме 2 существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$. Тогда $[A]^4 = [B]^8 = R^2([A],[B]) = 1$ и, так как $\operatorname{tr} R(A^{-1}, B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B^{-1}, \operatorname{tr} A^{-1}B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB) = g(z_0) = 0,$ отображение $a \to [A]$, $b \to [B]$ задает представление группы Γ_1.

Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A]$, $[B]$. Так как $\operatorname{tr} A = 2\cos\frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{8}$, то $G(z_0)$ не является псевдоконечной [6].

Если z_0 не является корнем уравнения

$$z^2 - 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} z - 2 + 4\cos^2\frac{\pi}{8} = 0, \tag{6}$$

то из (4) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима. В этом случае $G(z_0)$ с точностью до сопряжения определена однозначно. Несложно убедиться, что $z_1 = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $z_2 = 2\cos\frac{3\pi}{8}$ являются корнями уравнения (6).

Если группа $\langle [A], [B] \rangle$ неприводима, то она содержит свободную неабелеву группу, так как не является псевдоконечной и группой диэдра. В этом случае по лемме 1 группа Γ_1 также содержит свободную неабелеву подгруппу.

Лемма 3. *Если для всех корней z_0 многочлена $g(z)$ группа $G(z_0)$ приводима, то $L = 2L_1$, $L_1 \in \mathbb{N}$ и $K + L_1 \equiv 2 \pmod 4$.*

Доказательство. При выполнении условий леммы многочлен $g(z)$ имеет корни $z_1 = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $z_2 = 2\cos\frac{3\pi}{8}$. Следовательно, $g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{\pi}{8}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\frac{3\pi}{8}\right)^{s_2}$, где $s_1 \neq 0$ или $s_2 \neq 0$. Пусть для определенности $s_2 \neq 0$. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon^8 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-8} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & 0 \\ t & \varepsilon^{-4} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{32} + i\sin\frac{\pi}{32}$. Тогда $\operatorname{tr} A = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} AB = t + 2\cos\frac{3\pi}{8}$. Имеем равенство $\operatorname{tr} R(A,B) = g(t + 2\cos\frac{3\pi}{8}) = A_0\left(t + 2\cos\frac{3\pi}{8} - 2\cos\frac{\pi}{8}\right)^{s_1} t^{s_2}$. В этом случае свободный член равен нулю.

С другой стороны, свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A,B)$ равен $2\cos\frac{8K+4L}{32}\pi = 2\cos\frac{2K+L}{8}\pi$, где $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. Таким образом, $2K + L \equiv 4 \pmod 8$. Значит, $L \equiv 0 \pmod 2$, т. е. $L = 2L_1$, и

$$K + L_1 \equiv 2 \pmod 4. \tag{7}$$

Следствие. Если L нечетно, либо $L = 2L_1$ и $K + L_1 \not\equiv 2 \pmod 4$, то теорема справедлива.

Учитывая следствие, в дальнейшем будем считать, что $L = 2L_1$ *и* $K + L_1 \equiv 2 \pmod 4$. Рассмотрим группу $H = \left\langle a_1, b_1 \middle| a_1^2 = b_1^8 = R_1(a_1, b_1)^2 = R_1(a_1^{-1}, b_1^{-1})^2 = 1 \right\rangle$, где $R_1(a_1, b_1) = a_1 b_1^{m_1} \ldots a_1 b_1^{m_r}$ – циклическая редукция слова $R(a_1, b_1)$ в свободном произведении $\langle a_1 \mid a_1^2 = 1 \rangle * \langle b_1 \mid b_1^8 = 1 \rangle$. Пусть $U = m_1 + \ldots + m_r$.

Тогда $U \equiv L \pmod 8$, в частности, $U = 2U_1$ – четно, и $r \equiv K \pmod 2$. В силу (7) $r + U_1 \equiv 0 \pmod 2$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\varphi : \Gamma_1 \to H : a \mapsto a_1, b \mapsto b_1$. По лемме 1, если H содержит свободную неабелеву подгруппу, то этим же свойством обладает и группа Γ_1. Отметим, что если $r = 0$, т. е. R_1 – пустое слово, то H является свободным произведением циклических групп порядка 2 и 8, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому будем считать в дальнейшем, что $r > 0$.

Пусть $\rho : H \to PSL_2(\mathbb{C})$: $a_1 \mapsto [A_1]$, $b_1 \mapsto [B_1]$ – существенный гомоморфизм. Тогда $\operatorname{tr} A_1 = 0$, $\operatorname{tr} B_1 = 2\cos\frac{\pi}{8}$ и, следовательно, группа $\langle [A_1], [B_1] \rangle$ – псевдоконечная тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A_1 B_1 = 0$ [6]. Из равенства (4) следует, что $\langle [A_1], [B_1] \rangle$ приводима тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A_1 B_1$ является корнем уравнения $z^2 + 4\cos^2\frac{\pi}{8} - 4 = 0.$

Таким образом, если $\operatorname{tr} A_1 B_1 \notin \left\{0, 2\cos\frac{3\pi}{8}, 2\cos\frac{5\pi}{8}\right\}$, то группа $\langle [A_1], [B_1] \rangle$, а вместе с ней и группы H и Γ_1 содержат неабелеву свободную подгруппу.

Пусть для любого существенного гомоморфизма $\rho : H \to PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\operatorname{tr} A_1 B_1 \in \left\{0, 2\cos\frac{3\pi}{8}, 2\cos\frac{5\pi}{8}\right\}$. Тогда

$$\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot (\operatorname{tr} A_1 B_1)^{s_1} \cdot \left(\operatorname{tr} A_1 B_1 - 2\cos\frac{3\pi}{8}\right)^{s_2} \cdot \left(\operatorname{tr} A_1 B_1 - 2\cos\frac{5\pi}{8}\right)^{s_3}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = r.$$

Лемма 4. *Если для любого существенного гомоморфизма* $\rho : H \to PSL_2(\mathbb{C})$ *справедливо* $\operatorname{tr} A_1 B_1 \in \left\{0, 2\cos\frac{3\pi}{8}, 2\cos\frac{5\pi}{8}\right\}$ *и либо* $U_1 \not\equiv 2 \pmod 4$, *либо* $2 \nmid r$, *то* $\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot (\operatorname{tr} A_1 B_1)^r$.

Доказательство. Положим $A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^8 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-8} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ t & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}$. Тогда $\operatorname{tr} A_1 = 0$, $\operatorname{tr} B_1 = 2\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} A_1 B_1 = t + 2\cos\frac{5\pi}{8}$ и

$$\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot \left(t + 2\cos\frac{5\pi}{8}\right)^{s_1} \cdot \left(t + 2\cos\frac{5\pi}{8} - 2\cos\frac{3\pi}{8}\right)^{s_2} \cdot (t)^{s_3}. \tag{8}$$

Свободный член полинома $\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1)$ равен $2\cos\frac{8r + 2U}{16}\pi = 2\cos\frac{2r + U_1}{4}\pi$. Рассмотрим два случая:

1) $2 \mid r$. Тогда $r = 2r_1$. Значит, свободный коэффициент в $\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1)$ равен $2\cos\frac{4r_1 + U_1}{4}\pi = \pm 2\cos\frac{U_1}{4}\pi \neq 0$. Пусть $U_1 \not\equiv 2 \pmod 4$. В силу (8) $s_3 = 0$. Если рассмотреть матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^8 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-8} \end{pmatrix}, B_1' = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2} & 0 \\ t & \varepsilon^{2} \end{pmatrix}$, то аналогично получим, что $s_2 = 0$ и лемма доказана.

2) $2 \nmid r$, т. е. $r = 2r_1 + 1$. Так как $r + U_1 \equiv 0 \pmod 2$, то $U_1 = 2U_2 + 1$ также нечетно. Таким образом, свободный коэффициент в $\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1)$ равен $2\cos\frac{4r_1 + 2 + 2U_2 + 1}{4}\pi = \pm\sqrt{2}$. В этом случае, рассматривая пары матриц (A_1, B_1) и (A_1, B_1'), как и в пункте 1), получим $s_2 = s_3 = 0$.

Лемма 5. *Если для любого существенного гомоморфизма* $\rho : H \to PSL_2(\mathbb{C})$ *справедливо* $\operatorname{tr} A_1 B_1 \in \left\{0, 2\cos\frac{3\pi}{8}, 2\cos\frac{5\pi}{8}\right\}$ *и либо* $U_1 \not\equiv 2 \pmod 4$, *либо* $2 \nmid r$, *то* $r \leq 4$.

Доказательство. Вновь положим $A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^8 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-8} \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ t & \varepsilon^{-2} \end{pmatrix}$ с прежними обозначениями. По лемме 4 $\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot \left(t + 2\cos\frac{5\pi}{8} \right)^r$, где $A_0 = \left(2\sin\frac{\pi}{8} \right)^{-r} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(2\sin\frac{l_i \pi}{8} \right)$ [6]. Тогда свободный член полинома $\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1)$ будет иметь вид

$$\left(2\cos\frac{5\pi}{8} \right)^r \left(2\sin\frac{\pi}{8} \right)^{-r} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(2\sin\frac{l_i \pi}{8} \right) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} \left(2\sin\frac{l_i \pi}{8} \right).$$

Из доказательства леммы 4 следует, что свободный член $\operatorname{tr} R_1(A_1, B_1)$ равен $\pm\sqrt{2}$ или ± 2.

1) Пусть $(-1)^r \prod_{i=1}^{r} \left(2\sin\frac{l_i \pi}{8} \right) = \pm 2.$ Обозначим через q_1 количество l_i, равное 1 или 7; через q_2 – количество l_i, равное 2 или 6; через q_3 – количество l_i, равное 3 или 5, и, наконец, через q_4 – количество l_i, равное 4. Тогда получим

$$(-1)^r \prod_{i=1}^{r} \left(2\sin\frac{l_i \pi}{8} \right) = (-1)^r \left(2\sin\frac{\pi}{8} \right)^{q_1} \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{4} \right)^{q_2} \cdot \left(2\sin\frac{3\pi}{8} \right)^{q_3} \cdot 2^{q_4} = \pm 2.$$

Учитывая, что $2\sin\frac{3\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{8},$ после преобразований имеем $\left(2\sin\frac{\pi}{4} \right)^{q_1} \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{4} \right)^{q_2} \times$ $\times \left(2\cos\frac{\pi}{8} \right)^{q_3 - q_1} \cdot 2^{q_4} = 2,$ что равносильно следующему равенству:

$$\left(\sqrt{2} \right)^{q_1 + q_2} \cdot \left(2\cos\frac{\pi}{8} \right)^{q_3 - q_1} \cdot 2^{q_4} = 2. \tag{9}$$

Если $q_3 - q_1 = 0,$ то (9) примет вид $\left(\sqrt{2} \right)^{q_1 + q_2} (2)^{q_4} = 2.$ Это возможно в следующих случаях: 1) $q_4 = 1$, $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, т. е. $r = 1$; 2) $q_4 = 0$, $q_1 = q_3 = 0$, $q_2 = 2$, т. е. $r = 2$; 3) $q_4 = 0$, $q_1 = q_3 = 1$, $q_2 = 1$, $r = 3$; 4) $q_4 = 0$, $q_1 = q_3 = 2$, $q_2 = 0$, $r = 4$.

Если $q_3 - q_1 > 0,$ то при $q_3 - q_1 > 1$ $\left(2\cos\frac{\pi}{8} \right)^{q_3 - q_1} > 2,$ т. е. равенство (7) не выполняется. Если $q_3 - q_1 = 1,$ то $1{,}5 < \left(2\cos\frac{\pi}{8} \right)^{q_3 - q_1} < 2,$ и равенство (4) неверно ни при каких q_4, q_1, q_2, q_3.

Наконец, пусть $q_3 - q_1 < 0.$ Обозначим $q_1 = q_3 + p,$ $p \in \mathbb{N}.$ Подействуем на уравнение $\left(2\sin\frac{\pi}{8} \right)^{q_1} \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{4} \right)^{q_2} \cdot \left(2\sin\frac{3\pi}{8} \right)^{q_3} \cdot 2^{q_4} = \pm 2$ автоморфизмом Фробениуса $\varphi: \varepsilon \to \varepsilon^3$ поля $\mathbb{Q}(\varepsilon),$ где ε – примитивный корень из единицы степени 32. В результате получим

$$\left(2\sin\frac{3\pi}{8} \right)^{q_3 + p} \cdot \left(2\sin\frac{3\pi}{4} \right)^{q_2} \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{8} \right)^{q_3} \cdot 2^{q_4} = 2 \Leftrightarrow \left(2\sin\frac{\pi}{4} \right)^{q_2 + q_3} \cdot \left(2\sin\frac{3\pi}{8} \right)^{p} \cdot 2^{q_4} = 2.$$

Так как $2\sin\frac{3\pi}{8} = 2\cos\frac{\pi}{8},$ то, как и в предыдущем случае, уравнение не имеет решений.

2) Пусть $(-1)^r \prod_{i=1}^{r} \left(2\sin\frac{l_i \pi}{8} \right) = \pm\sqrt{2}.$ После преобразований получим

$$\left(\sqrt{2} \right)^{q_1 + q_2} \cdot \left(2\cos\frac{\pi}{8} \right)^{q_3 - q_1} \cdot 2^{q_4} = \sqrt{2}. \tag{10}$$

Если $q_3 - q_1 = 0,$ то (10) примет вид $\left(\sqrt{2} \right)^{q_1 + q_2} 2^{q_4} = \sqrt{2}.$ Это возможно в следующих случаях:

1) $q_1 = q_3 = q_4 = 0$, $q_2 = 1$, т. е. $r = 1$; 2) $q_2 = q_4 = 0$, $q_1 = q_3 = 1$, т. е. $r = 2$.

Если $q_3 - q_1 > 0,$ то $\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)^{q_3-q_1} > \sqrt{2},$ т. е. равенство (10) не выполняется.

Наконец, пусть $q_3 - q_1 < 0.$ Обозначим $q_1 = q_3 + p,\ p \in \mathbb{N}.$ Как и выше, подействуем на уравнение $\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)^{q_1} \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)^{q_2} \cdot \left(2\sin\frac{3\pi}{8}\right)^{q_3} \cdot 2^{q_4} = \pm\sqrt{2}$ автоморфизмом Фробениуса φ. Получим

$$\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)^{q_2+q_3} \cdot \left(2\sin\frac{3\pi}{8}\right)^{p} \cdot (2)^{q_4} = \sqrt{2}.$$

Как и в предыдущем случае, последнее уравнение не имеет решений.

Лемма 6. *Если* $U_1 \not\equiv 2 \pmod 4$ *или* $2 \nmid r,$ *то с точностью до изоморфизма существует 5 псевдоконечных групп* $H_i = \left\langle a_1, b_1 \,\middle|\, a_1^{\,2} = b_1^{\,8} = R_{1,i}(a_1,b_1)^2 = R_{1,i}(a_1^{-1},b_1^{-1})^2 = 1\right\rangle.$ *Соответствующие слова* $R_{1,i}(a_1,b_1)$ *перечислены в таблице*:

$s=1$	$R_{1,1} = a_1b_1^2$
$s=2$	$R_{1,2} = a_1b_1a_1b_1^5,\quad R_{1,3} = a_1b_1^2a_1b_1^6$
$s=3$	$R_{1,4} = a_1b_1a_1b_1^5a_1b_1^6$
$s=4$	$R_{1,5} = a_1b_1a_1b_1^3a_1b_1^5a_1b_1^7$

Псевдоконечные группы из леммы 6 найдены с использованием леммы 5 и с помощью компьютерных вычислений с программой Maple.

Таким образом, если H^i содержит свободную неабелеву подгруппу, то и соответствующая ей группа Γ_1 содержит такую подгруппу.

Лемма 7. *Если группа* $H = \left\langle a_1, b_1 \,\middle|\, a_1^{\,2} = b_1^{\,8} = R_1(a_1,b_1)^2 = R_1(a_1^{-1},b_1^{-1})^2 = 1\right\rangle$ *не является псевдоконечной, то она содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Доказательство. Рассмотрим существенное представление $\rho: H \to PSL_2(\mathbb{C}),$ при котором образ $\rho(H)$ бесконечный. Группа $\rho(H)$ не является группой диэдра и $\rho(H)$ неприводима в силу леммы 4. Таким образом, $\rho(H)$ – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C}).$

Следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 8. *Группы* $H_i,\quad i = \overline{1,5},$ *содержат неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Рассмотрим группу $H_1 = \left\langle a_1, b_1 \,\middle|\, a_1^{\,2} = b_1^{\,8} = (a_1b_1^{\,2})^2 = (a_1b_1^{\,6})^2 = 1\right\rangle$ и сюръективный гомоморфизм $\varphi: H_1 \to C_2 : a_1 \mapsto 1, b_1 \mapsto c,$ где $C_2 = \left\langle c \,\middle|\, c^2 = 1\right\rangle$ – циклическая группа порядка 2. Пусть $T = \operatorname{Ker}\varphi.$ Найдем копредставление группы $T,$ используя переписывающий процесс Рейдемейстера – Шрейера: $T = \left\langle x, y, z \,\middle|\, x^4 = z^2 = y^2 = (yx)^2 = (zx)^2 = (yx^3)^2 = (zx^3)^2 = 1\right\rangle.$ Наша цель – построить гомоморфизм $\rho: T \to PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом.

Пусть $\tau_x = x_1,\ \tau_y = x_2,\ \tau_z = x_3,\ \tau_{xy} = y_{12},\ \tau_{yz} = y_{23},\ \tau_{xz} = y_{13},\ \tau_{xyz} = z_1,\ \tau_{xzy} = z_2.$ Положим $\tau_x = \sqrt{2},$ $\tau_y = \tau_z = 0.$ Рассмотрим полиномы Фрике элементов yx, zx, yx^3, zx^3 и приравняем их к нулю. Получим систему

$$y_{12} = y_{13} = y_{13}(x_1^{\,2} - 1) - x_1x_3 = y_{12}(x_1^{\,2} - 1) - x_1x_2 = 0.$$

Ее решением является набор $(\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, y_{23}, z_1, z_2).$

Рассмотрим следующие матрицы: $X = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 1 & \varepsilon_1^{-1} \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} i(1+\sqrt{2}) & \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(1+\sqrt{2}) & -i(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix},\quad Z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ \sqrt{2} & -i \end{pmatrix},$ где $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}.$ Тогда $\operatorname{tr} X = \sqrt{2},\ \operatorname{tr} Y = \operatorname{tr} Z = \operatorname{tr} XY = \operatorname{tr} XZ = 0,\quad \det X = \det Y = \det Z = 1.$ Тогда существует гомоморфизм $\rho: T \to <[X],[Y],[Z]>: x \mapsto X, y \mapsto Y, z \mapsto Z.$

Рассмотрим группу $<[X],[YZ]>$. Тогда $\operatorname{tr} X=\sqrt{2}, \operatorname{tr} YZ=-2\sqrt{2}, \operatorname{tr} XYZ=-2.$ Таким образом, группа $<[X],[YZ]>$ не является конечной [7]. Так как $(\operatorname{tr} X)^2+(\operatorname{tr} YZ)^2+(\operatorname{tr} XYZ)^2-$ $-\operatorname{tr} X \operatorname{tr} YZ \operatorname{tr} XYZ-4=2\neq 0,$ то группа $<[X],[YZ]>$ неприводима. Очевидно, что $<[X],[YZ]>$ не является группой диэдра. Следовательно, группа $<[X],[YZ]>$, а значит и $<[X],[Y],[Z]>$, содержит неабелеву свободную подгруппу. В таком случае $T=\left\langle x,y,z \,\middle|\, x^4=z^2=y^2=(yx)^2=(zx)^2=\right.$ $\left.=(yx^3)^2=(zx^3)^2=1\right\rangle$ также содержит неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим группу $H_2=\left\langle a_1,b_1 \,\middle|\, a_1{}^2=b_1{}^8=(a_1b_1a_1b_1{}^5)^2=(a_1b_1{}^7a_1b_1{}^3)^2=1\right\rangle$ и сюръективный гомоморфизм $\varphi: H_2\to C_2: a_1\mapsto 1, b_1\mapsto c.$ Пусть $T=\operatorname{Ker}\varphi.$ Тогда T имеет копредставление

$$T=\left\langle x,y,z \,\middle|\, x^4=y^2=z^2=(yzx^3)^2=(zxyx^2)^2=(yx^3zx^2)^2=(zyx)^2=1\right\rangle.$$

Положим $\tau_x=2\cos\dfrac{\pi}{4}, \tau_y=\tau_z=0.$ Рассмотрим полиномы Фрике элементов $yzx^3, zxyx^2, yx^3zx^2, zyx$ и приравняем их к нулю. Получим систему

$$z_2=z_1-\sqrt{2}y_{23}=\sqrt{2}y_{12}y_{13}=0.$$

Одним из ее решений является набор $(x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23},z_1,z_2)=(\sqrt{2},0,0,y_{12},0,y_{23},\sqrt{2}y_{23},0),$ где $y^0{}_{12}, y^0{}_{23}$ – произвольные комплексные числа. Таким образом, можно взять некоторое трансцендентное значение $y^0{}_{12}$ и $y^0{}_{23}=\sqrt{2-y^2{}_{12}}$. В этом случае по лемме 2.2 существуют матрицы X,Y,Z такие, что $\operatorname{tr} X=\sqrt{2},$ $\operatorname{tr} Y=0,$ $\operatorname{tr} Z=0,$ $\operatorname{tr} XY=y^0_{12},$ $\operatorname{tr} XZ=0,$ $\operatorname{tr} YZ=\sqrt{2-y^2{}_{12}},$ $\operatorname{tr} XYZ=\sqrt{2}\sqrt{2-y^2{}_{12}},$ $\operatorname{tr} XZY=0.$ Пусть $G=<[X],[Y],[Z]>$. По построению отображение $\rho: T\to H: x\mapsto[X],$ $y\mapsto[Y], z\mapsto[Z]$ задает гомоморфизм группы T. Рассмотрим теперь подгруппу $G_1=\langle[X],[Y]\rangle$ в G. Группа G_1 неприводима в силу (4), бесконечна и не является группой диэдра [7, табл. 3]. Таким образом, G_1 – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и, следовательно, содержит неабелеву свободную подгруппу. Тогда это верно и для групп T и H_2.

Рассмотрим группу $H_3=\left\langle a_1,b_1 \,\middle|\, a_1{}^2=b_1{}^8=(a_1b_1{}^2a_1b_1{}^6)^2=(a_1b_1{}^6a_1b_1{}^2)^2=1\right\rangle$ и сюръективный гомоморфизм $\varphi: H_3\to C_4: a_1\mapsto c^2, b_1\mapsto c.$ Пусть $T=\operatorname{Ker}\varphi.$ Тогда T имеет копредставление

$$T=\left\langle x,y,z \,\middle|\, z^2=(xzx)^2=(yzy)^2=(x^{-2}z)^2=(y^{-2}z)^2=1\right\rangle.$$

Положим $\tau_z=0.$ Рассмотрим полиномы Фрике элементов $(xzx)^2$, $(yzy)^2$, $(x^{-2}z)^2$, $(y^{-2}z)^2$ и приравняем их к нулю. Получим систему

$$x_1y_{13}=x_2y_{23}=0. \tag{11}$$

Одним из ее решений является набор $(x_1,x_2,x_3,y_{12},y_{13},y_{23},z_1,z_2)=(x_1,x_2,0,y_{12},0,0,z_1,z_2),$ где x_1,x_2,y_{12},z_1,z_2 – произвольные комплексные числа.

Таким образом, можно взять такие трансцендентные $x_1{}^0, x_2{}^0, y_{12}{}^0,$ которые не удовлетворяют условию (4), и $z_1,z_2,$ удовлетворяющие условию леммы 2.2. В этом случае существуют матрицы X,Y,Z такие, что $\operatorname{tr} X=x_1{}^0, \operatorname{tr} Y=x_2{}^0, \operatorname{tr} Z=0,$ $\operatorname{tr} XY=y^0_{12},$ $\operatorname{tr} XZ=0,$ $\operatorname{tr} YZ=0,$ $\operatorname{tr} XYZ=z^0_1,$ $\operatorname{tr} XYZ=z^0_2.$ Пусть $G=<[X],[Y],[Z]>$. По построению отображение $\rho: T\to H: x\mapsto[X], y\mapsto[Y], z\mapsto[Z]$ задает сюръективный гомоморфизм группы T. Рассмотрим теперь подгруппу $G_1=\langle[X],[Y]\rangle$ в G. Группа G_1 неприводима и бесконечна, поскольку y^0_{12} – трансцендентное число. Очевидно, что G_1 – не группа диэдра. Таким образом, G_1 – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и, следовательно, содержит неабелеву свободную подгруппу. Тогда это верно и для групп T и H_3.

Рассмотрим группу $H_4=\left\langle a_1,b_1 \,\middle|\, a_1^2=b_1^8=(a_1b_1a_1b_1^5a_1b_1^6)^2=(a_1b_1^7a_1b_1^3a_1b_1^2)^2=1\right\rangle$ и сюръективный гомоморфизм $\varphi: H_4\to C_2: a\mapsto 1, b\mapsto c.$ Пусть $T=\operatorname{Ker}\varphi.$ Тогда T имеет копредставление

$$T = \left\langle x, y, z \,\middle|\, x^4 = y^2 = z^2 = (yzx^3yx^3)^2 = (zxyx^2zx^3)^2 = (yx^3zx^2yx)^2 = (zx^4yxzx)^2 = 1 \right\rangle.$$

Положим $\tau_x = \sqrt{2}, \tau_y = \tau_z = 0.$ Рассмотрим полиномы Фрике элементов $(yzx^3yx^3)^2$, $(zxyx^2zx^3)^2$, $(yx^3zx^2yx)^2$, $(zx^4yxzx)^2$ и приравняем их к нулю. Получим систему

$$y_{12}(z_1 - y_{23}\sqrt{2}) = y_{13}(\sqrt{2}y_{12}y_{13} + \sqrt{2}y_{23} - z_1) = y_{12}(\sqrt{2}y_{12}y_{13} + z_2) = y_{13}z_2 = 0.$$

Одним из ее решений является набор $(x_1, x_2, x_3, y_{12}, y_{13}, y_{23}, z_1, z_2) = (\sqrt{2}, 0, 0, y_{12}, 0, \sqrt{2 - y^2_{12}}, \sqrt{2}\sqrt{2 - y^2_{12}}, 0)$, где y^0_{12} – произвольное комплексное число. Таким образом, можно взять некоторое трансцендентное значение y^0_{12}. В этом случае, по лемме 2.2, существуют матрицы X, Y, Z такие, что $\operatorname{tr} X = \sqrt{2}$, $\operatorname{tr} Y = 0$, $\operatorname{tr} Z = 0$, $\operatorname{tr} XY = y^0_{12}$, $\operatorname{tr} XZ = 0$, $\operatorname{tr} YZ = \sqrt{2 - y^2_{12}}$, $\operatorname{tr} XYZ = \sqrt{2}\sqrt{2 - y^2_{12}}$, $\operatorname{tr} XZY = 0.$ Пусть $G = <[X], [Y], [Z]>$. По построению отображение $\rho : T \to H : x \mapsto [X], y \mapsto [Y], z \mapsto [Z]$ задает гомоморфизм группы T. Рассмотрим теперь подгруппу $G_1 = \langle [X], [Y] \rangle$ в G. Группа G_1 неприводима в силу (4), бесконечна и не является группой диэдра. Таким образом, G_1 – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и, следовательно, содержит неабелеву свободную подгруппу. Тогда это верно и для групп T и H_4.

Рассмотрим группу $H_5 = \left\langle a_1, b_1 \,\middle|\, a_1^2 = b_1^8 = (a_1b_1a_1b_1^3a_1b_1^5a_1b_1^7)^2 = (a_1b_1^7a_1b_1^5a_1b_1^3a_1b_1)^2 = 1 \right\rangle$. Пусть $H' = \left\langle a_2, b_2 \,\middle|\, a_2^2 = b_2^4 = (a_2b_2a_2b_2^3)^4 = 1 \right\rangle$ и $\varphi : H_5 \to H' : a_1 \mapsto a_2, b_1 \mapsto b_2$ – сюръективный гомоморфизм. Положим $\tau_{a_2} = 0$, $\tau_{b_2} = \sqrt{2}$, $\tau_{a_2b_2} = z$. Тогда полином Фрике элемента $a_2b_2a_2b_2^3$ равен z^2. Из уравнения $z^2 = \sqrt{2}$ находим $z_0 = \sqrt[4]{2}$. Существуют такие матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 0$, $\operatorname{tr} B = \sqrt{2}$, $\operatorname{tr} AB = \sqrt[4]{2}$. Таким образом, группа $\langle [A], [B] \rangle$ является бесконечной, неприводимой и не является группой диэдра. Следовательно, она содержит неабелеву свободную подгруппу. Так как группа $\langle [A], [B] \rangle$ является эпиморфным образом H_5, то H_5 также содержит неабелеву свободную подгруппу.

1. Fine B., Rosenberger G. // Algebraic generalizations of discrete groups. New York, 1999. P. 274.
2. Howie J., Kopteva N. // J. Group Theory. 2006. Vol. 9. P. 173.
3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.
4. Magnus W. // Result. der Math. 1981. Vol. 4. P. 171.
5. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.
6. Beniash-Kryvets V.V. // Proceedings of the International Conference on Mathematics and its Application (ICMA 2004). Kuwait University. 2004. P. 59.
7. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. LMS Lecture Note Series 311. P. 564.

Поступила в редакцию 01.10.10.

Валерий Вацлавович Беняш-Кривец – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей алгебры.

Янина Александровна Жуковец – аспирант кафедры алгебры и геометрии БГПУ им. Максима Танка. Научный руководитель – В.В. Беняш-Кривец.