УДК 539.3

М.Д МАРТЫНЕНКО, С.М. БОСЯКОВ

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ПОЛУМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

The equation of characteristics for system of the equations of movement half-momentary elastic isotropic media is obtained. The comparative analysis of the obtained equation with the association of a dispersion describing propagation of plane waves in half-momentary to media is carried out.

Метод характеристик широко применяется при исследовании волновых движений в сплошных средах, описываемых уравнениями движения, содержащими только главную часть, т. е. члены одного порядка [1, 2]. При этом точность и строгость соответствующих решений обусловлена тем, что форма волны является произвольной непрерывной функцией линейной фазы. Если же дифференциальные уравнения содержат постоянные коэффициенты и младшие члены, то бегущие волны могут описываться только показательной функцией. Тем не менее в предельных случаях, например, когда коэффициенты при производных младшего порядка стремятся к нулю в зависимости от некоторого параметра, результаты реализации подходов теории характеристик и использования показательных функций применительно к системам уравнений движения могут совпадать (соответствующее замечание сделано в [3]). Ниже обсуждается применение метода характеристик к системе дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка по пространственным координатам и описывающей динамические процессы в полумоментной упругой изотропной среде, а также возможная взаимосвязь между характеристическим и дисперсионным уравнениями.

Система уравнений движения полумоментного изотропного тела при отсутствии массовых сил и пренебрежении инерцией микрополярного вращения имеет следующий вид [4, 5]:

$$(\lambda+\mu+\eta\Delta)\operatorname{grad}\operatorname{div}u_k+(\mu-\eta\Delta)\Delta u_k=\rho\ddot{u}_k, \tag{1}$$

где u_1, u_2, u_3 - компоненты вектора перемещений; р - плотность среды; λ, μ - константы Ламе; η - микрополярная константа упругости; $\Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$ - оператор Лапласа; точкой обозначено дифференцирование по времени; $\partial_k=\partial/\partial x_k$; $k=\overline{1,3}$

От независимых переменных x_1, x_2, x_3 и t перейдем к новым переменным w_1, w_2, w_3 и w по следующим формулам:

$$w=z\ (t,\ x_1,\ x_2,\ x_3),\ w_k=z_k\ (t,\ x_1,\ x_2,\ x_3).$$

Начальные данные для системы (1) зададим на поверхности $z(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$=0. Тогда

$$u_k\Big|_{z=0}=f_k^{(1)}(w_1,w_2,w_3),\ \frac{\partial u_i}{\partial z}\Big|_{z=0}=f_k^{(2)}(w_1,w_2,w_3). \tag{2}$$

Производные по использовавшимся ранее переменным выразим через производные по новым переменным:

$$\partial_m u_k=\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial w_i}\partial_m z_i,\ x_0\equiv x,\ w_0\equiv w,\ z_0\equiv z,$$

$$\partial_m\partial_l u_k=\sum_{i,j=0}^{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial w_i\partial w_j}\partial_m z_i\partial_l z_j+\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial w_i}\partial_m\partial_l z_i,$$

$$\dots$$

$$\partial_m\partial_l\partial_n\partial_q u_k=\sum_{i,j,p,s=0}^{3}\frac{\partial^4 u_k}{\partial w_i\partial w_j\partial w_p\partial w_s}\partial_m z_i\partial_l z_j\partial_n z_p\partial_q z_s+\ldots+$$
$$+\sum_{i,j=0}^{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial w_i\partial w_j}\left(\partial_m\partial_n\partial_q z_i\partial_l z_j+\partial_m\partial_n z_i\partial_l\partial_q z_j+\partial_l\partial_n\partial_q z_j\partial_m z_i+\partial_l\partial_n z_j\partial_m\partial_q z_i\right)+ \tag{3}$$
$$+\sum_{i,p=0}^{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial w_i\partial w_p}\left(\partial_m\partial_l\partial_q z_i\partial_n z_p+\partial_m\partial_l z_i\partial_n\partial_q z_p\right)+\sum_{i,s=0}^{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial w_i\partial w_s}\partial_m\partial_l\partial_n z_i\partial_q z_s+\dots.$$

Подставим (3) в исходную систему уравнений и выпишем выражения, содержащие частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}$:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u_k}{\partial z^2}\Bigg(\Bigg(\mu\sum_{i=1}^{3}(\partial_i z)^2-\rho(\dot z)^2\Bigg)-\eta\sum_{i,j=1}^{3}\Big(2\partial_i^2\partial_j z\partial_j z+2\big(\partial_i\partial_j z\big)^2+\\
+2\partial_i\partial_j^2 z\partial_i z+\partial_i^2 z\partial_j^2 z\Big)+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial z^2}\big((\lambda+\mu)\partial_k z\partial_l z+\\
+\eta\sum_{j=1}^{3}\Big(\partial_k\partial_j^2 z\partial_i z+2\partial_k\partial_j z\partial_i\partial_j z+\partial_i\partial_j^2 z\partial_k z+\\
+2\partial_k\partial_i\partial_j z\partial_j z+\partial_k\partial_i z\partial_j^2 z\Big)\Big)\Bigg)+\ldots=0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Плоскость z (x_1, x_2, x_3, t)=0 является характеристической в случае, если система (4) вместе с начальными данными (2) не дает определенных значений для производных $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}$, т. е. если определитель, составленный из коэффициентов при этих производных, равен нулю. Введем для краткости обозначения:

$$
\begin{gathered}
a_{ii}=\mu\sum_{n=1}^{3}\partial_n^2 z+(\lambda+\mu)\partial_i^2 z-\eta\Big(\big(\partial_j^2 z+\partial_m^2 z\big)\big(\partial_i^2 z+3\big)+2\Big(\big(\partial_i\partial_j z\big)^2+\\
+\big(\partial_i\partial_m z\big)^2+\partial_j^2 z\partial_m^2 z+2\big(\partial_j\partial_m z\big)^2+\partial_i z\big(\partial_j^2\partial_i z+\partial_m^2\partial_i z\big)+\partial_j z\partial_j\partial_i^2 z+\\
+\partial_m z\partial_m\partial_i^2 z+2\Big(\partial_j z\big(\partial_j^3 z+\partial_j\partial_m^2 z\big)+\partial_m z\big(\partial_m^3 z+\partial_m\partial_j^2 z\big)\Big)\Big)\Big),\\
a_{ij}=(\lambda+\mu)\partial_i z\partial_j z+\eta\Big(\partial_i\partial_j z\big(3\partial_i^2 z+3\partial_j^2 z+\partial_m^2 z\big)+2\Big(\partial_m\partial_i z\partial_m\partial_j z+\\
+\partial_m z\partial_i\partial_j\partial_m z\Big)+\partial_i z\big(3\partial_i^2 z\partial_j z+\partial_m^2\partial_j z+\partial_j^2 z\big)+\partial_j z\big(3\partial_j^2 z\partial_i z+\partial_m^2\partial_i z+\partial_i^2 z\big)\Big).
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Здесь принимаем $i\neq j\neq m=\overline{1,3}$

С учетом (5) дифференциальное уравнение третьего порядка, которому должна удовлетворять характеристическая поверхность системы (1), можно представить в следующем виде:

$$
\det\left\|a_{ki}\right\|_{3\times3}=0. \tag{6}
$$

Из полученного уравнения характеристик (6) вытекает существование трех упругих волн, на распространение которых оказывают влияние моментные напряжения. Более детальный анализ (6) затруднителен в силу того, что в теории характеристик не определен физико-механический смысл частных производных вида $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_k^2}$ и $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x_k^3}$

Покажем, что дисперсионное уравнение не является частным случаем уравнения характеристик (6) распространения волн произвольной формы. Будем считать, что форма волны описывается экспоненциальной функцией, т. е.

$$
z\ (x_1, x_2, x_3, t)=\exp(I(\mathbf{kr}-(\omega t))), \tag{7}
$$

где $I=\sqrt{-1}$; $\mathbf{k}=(k_1,\ k_2,\ k_3)$ - волновой вектор; $\mathbf{r}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ - радиус-вектор; ω - круговая частота.

Внесем (7) в выражения (5) для коэффициентов a_{ii} и a_{ij}. В результате будем иметь

$$
\begin{gathered}
\hat a_{ii}=\big(\mu+7\eta\big(k^2-k_i^2\big)\big)k^2+(\lambda+\mu)k_i^2-\rho\omega^2,\\
\hat a_{ij}=\big(\lambda+\mu+7k^2\eta\big)k_ik_j,\ i\neq j=\overline{1,3}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Подставляя (8) в определитель (6), получим дисперсионное уравнение

$$((\lambda + 2\mu)k^2 - \rho\omega^2)(k^2(\mu + 7\eta k^2) - \rho\omega^2)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что в полумоментной упругой среде существует продольная упругая волна, распространяющаяся со скоростью $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, а также две поперечные микрополярные волны, каждая из которых описывается уравнени-ем $k^2(\mu+7\eta k^2)=\rho\omega^2$. Этот результат уточняет соответствующий закон дисперсии $k^2(\mu+\eta k^2)=\rho\omega^2$, установленный в [4] на основании теории плоских волн.

Таким образом, применение теории характеристик при исследовании волновых движений в средах, описываемых дифференциальными уравнениями четвертого порядка по пространственным координатам с младшими членами, не всегда приводит к корректным результатам. Это согласуется с выводами [3] о целесообразности использования метода характеристик в случаях, когда соответствующая система уравнений движения содержит только главную часть.

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики: в 4 т. М., 1981. Т. 4. Ч. 2.
2. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л., 1980.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964.
4. Миндлин Р.Д., Тирстен Г. Ф. // Механика. 1964. Т. 86. №4. С. 81.
5. Эринген А. К. // Разрушение: в 6 т. / Под ред. Г. Либовица. М., 1975. Т. 2. С. 647.

Поступила в редакцию 22.02.05.

Михаил Дмитриевич Мартыненко - доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики.

Сергей Михайлович Босяков - кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.