УДК 517.925.42

О.Б. КОРСАНТИЯ

О СИЛЬНОЙ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ОБРАТИМОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Problem of presents of strong isochronous of center, its order and origin angle for systems $\dot{x} = -y - Dxy - Px^2y$, $\dot{y} = x - Ax^2 - Cy^2 - Kx^3 - Mxy^2$ is solved.

Рассмотрим обратимую кубическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - Dxy - Px^2y, \\ \dot{y} = x - Ax^2 - Cy^2 - Kx^3 - Mxy^2, \end{cases} \qquad (1)$$

где A, C, D, K, M, P - вещественные постоянные.

В работе [1] доказана

Теорема 1. Особая точка $O(0;\ 0)$ вещественной системы (1) является изохронным центром тогда и только тогда, когда выполняется одна из следующих серий условий:

$$A = 0,\quad C = 0,\quad 2D^2 - 9P = 0,\quad D^2 + 9M = 0,\quad K = 0; \qquad (I_1)$$

$$A = 0,\quad C - D = 0,\quad M - P = 0,\quad K = 0; \qquad (I_2)$$

$$A = 0,\quad 4C - D = 0,\quad P = 0,\quad K = 0,\quad M = 0; \qquad (I_3)$$

$$A + C = 0,\quad 2A + D = 0,\quad M - P = 0,\quad K = 0; \qquad (I_4)$$

$$A + C = 0,\quad A + 2D = 0,\quad A^2 + 4K = 0,\quad P = 0,\quad M = 0; \qquad (I_5)$$

$$A + 2C = 0,\ 3A + 2D = 0,\ A^2 + 2K = 0,\ A^2 - 2P = 0,\ M = 0; \qquad (I_6)$$

$$3A + 4C = 0,\quad A + D = 0,\quad A_2 + 3K = 0,\quad P = 0,\quad M=0; \qquad (I_7)$$

$$2A + C - D = 0,\ A(4A + C) + P = 0,\ 2A(4A + C) + M=0, K = 0; \qquad (I_8)$$

$$\begin{cases} 2A + C - D = 0, \quad A^2(4A + C) + K(15A + 4C) = 0, \\ 3A(4A + C) + 9K + 2M = 0, \quad A(4A + C) + 3K + 2P = 0. \end{cases} \qquad (I_9)$$

Найдем условия, при выполнении которых для системы (1) в начале координат имеет место сильная изохронность, а также определим порядок этой изохронности и начальный угол. Очевидно, что в силу симметричности векторного поля относительно оси абсцисс система (1) во всех случаях изохронности будет иметь изохронность второго порядка с начальным углом $\varphi_0=0$. Выясним, обладает ли система (1) в точке $O(0;\ 0)$ изохронностью более высокого порядка.

Сделаем замену переменных $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot r = -(A+D)r^2\cos^2\varphi\sin\varphi - Cr^2\sin^3\varphi - (P+K)r^3\cos^3\varphi\sin\varphi - Mr^3\cos\varphi\sin^3\varphi, \\ \dot\varphi = 1 - Ar\cos^3\varphi + (D-C)r\sin^2\varphi\cos\varphi + (P-M)r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi - Kr^2\cos^4\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

Следуя [2, с. 79], рассмотрим алгебраическую сумму $t+\varphi_0-\varphi$ в виде ряда по степеням r с коэффициентами, являющимися функциями от переменной φ, т. е. в виде:

$$t+\varphi_0-\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k(\varphi)r^k, \tag{3}$$

$$\text{где}\quad \varphi(0)=\varphi_0,\quad \omega_k(0)=0.$$

Дифференцируя левую и правую части равенства (3) по переменной t и используя дифференциальную систему (2), получаем, что

$$Ar\cos^3\varphi - (D-C)r\cos\varphi\sin^2\varphi - (P-M)r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi + Kr^2\cos^4\varphi =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\begin{array}{l} \omega_k' r^k \left(\begin{array}{l} 1 - Ar\cos^3\varphi + (D-C)r\cos\varphi\sin^2\varphi + \\ +(P-M)r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi - Kr^2\cos^4\varphi \end{array}\right) - \\ -k\omega_k r^{k-1}\left(\begin{array}{l} (A+D)r^2\cos^2\varphi\sin\varphi + Cr^2\sin^3\varphi + \\ +(P+K)r^3\cos^3\varphi\sin\varphi + Mr^3\cos\varphi\sin^3\varphi \end{array}\right) \end{array}\right). \tag{4}$$

Приравнивая теперь в соотношении (4) коэффициенты при одинаковых степенях r, получаем рекуррентные соотношения для определения функций $\omega_k(\varphi)$:

$$\omega_1' = A\cos^3\varphi - (D-C)\cos\varphi\sin^2\varphi, \tag{5}$$
$$\omega_2' = \omega_1'\left(A\cos^3\varphi - (D-C)\cos\varphi\sin^2\varphi\right) + \omega_1\left((A+D)\cos^2\varphi\sin\varphi + C\sin^3\varphi\right) -$$
$$-(P-M)\cos^2\varphi\sin^2\varphi + K\cos^4\varphi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega_n' = \omega_{n-1}'\left(A\cos^3\varphi - (D-C)\cos\varphi\sin^2\varphi\right) - \omega_{n-2}'\left((P-M)\cos^2\varphi\sin^2\varphi - K\cos^4\varphi\right) +$$
$$+(n-1)\omega_{n-1}\left((A+D)\cos^2\varphi\sin\varphi + C\sin^3\varphi\right) +$$
$$+(n-2)\omega_{n-2}\left((P+K)\cos^3\varphi\sin\varphi + M\cos\varphi\sin^3\varphi\right),\ n\geq 3.$$

Из соотношения (5) находим, что

$$\omega_1(\varphi) = \frac{1}{12}\left(\begin{array}{l} (A+D-C)(\sin 3\varphi - \sin 3\varphi_0) + \\ +(9A-3D+3C)(\sin\varphi - \sin\varphi_0) \end{array}\right). \tag{6}$$

Предположим теперь, что для системы (1) в начале координат $O(0;\ 0)$ имеет место сильная изохронность центра некоторого порядка n. Это означает, что существуют по крайней мере один угол φ_0 и натуральное число n такие, что справедливы равенства

$$\omega_s\left(\varphi_0 + \frac{2\pi l}{n}\right) = 0,\ \forall s\in\mathbb{N},\ \text{где}\ l=\overline{0,n-1}.$$

Для $s=1$ с учетом (6) имеем

$$(A+D-C)\left(\sin 3\left(\varphi_0+\frac{2\pi l}{n}\right) - \sin 3\varphi_0\right) + (9A-3D+3C)\left(\sin\left(\varphi_0+\frac{2\pi l}{n}\right) - \sin\varphi_0\right) = 0$$

или

$$\left(A+D-C\right)\cos 3\left(\varphi_0+\frac{\pi l}{n}\right)\sin\frac{3\pi l}{n}+\left(9A-3D+3C\right)\cos\left(\varphi_0+\frac{\pi l}{n}\right)\sin\frac{\pi l}{n}=0\,, \quad (7)$$

где $l=\overline{0,n-1}$. Отметим, что при n=1 и любом $l=\overline{0,n-1}$, а также при любом $n\geq2$ и l=0 соотношение (7) оказывается верным равенством.

Рассмотрим систему (1) с условиями (I_1). Соотношение (7) перепишется в виде

$$D\left(\cos 3\left(\varphi_0+\frac{\pi l}{n}\right)\sin\frac{3\pi l}{n}-3\cos\left(\varphi_0+\frac{\pi l}{n}\right)\sin\frac{\pi l}{n}\right)=0\,. \quad (8)$$

Если n=2 и l=1, то соотношение (8) примет вид D(sin $3\varphi_0$-3sin φ_0), или $D\sin^3\varphi_0=0$, откуда $\varphi_0=\pi k$. Расстояние между соседними нулями равно π, а потому возможна сильная изохронность второго порядка с начальным углом φ_0=0.

Если n=3 и l=1, то соотношение (8) перепишется в виде $D\cos\left(\varphi_0+\frac{\pi}{3}\right)=0$, откуда $\varphi_0=\frac{\pi}{6}+\pi k$. Расстояние между соседними нулями снова равно π, а потому сильная изохронность третьего порядка невозможна.

Если n=4 и l=1, то соотношение (8) перепишется в виде $D\cos\left(\varphi_0+\frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos^2\left(\varphi_0+\frac{\pi}{4}\right)-3\right)=0$, откуда $\varphi_0=\frac{\pi}{4}+\pi k$. Расстояние между соседними нулями равно n, а потому сильная изохронность четвертого порядка также невозможна.

Рассуждая аналогично, получаем, что для $n\geq5$ сильная изохронность n-го порядка невозможна.

Таким образом, для системы (1) с условиями (I_1) возможна лишь изохронность второго порядка с начальным углом φ_0=0.

Рассуждая аналогично для систем с условиями (I_3) - (I_7), получаем, что для системы (1) с этими условиями может существовать лишь сильная изохронность центра второго порядка с начальным углом φ_0=0.

Рассмотрим систему (1) с условиями (I_2). В этом случае система (2) примет вид

$$\begin{cases}\dot{r}=-Dr^2\sin\varphi-Pr^3\cos\varphi\sin\varphi,\\ \dot{\varphi}=1.\end{cases}$$

Следовательно, $\omega_n(\varphi)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Таким образом, для системы (1) с условиями (I_2) в начале координат O(0; 0) имеет место сильная изохронность центра любого порядка с любым начальным углом φ_0.

Рассмотрим систему (1) с условиями (I_8). Соотношение (7) перепишется в виде

$$A\left(\cos 3\left(\varphi_0+\frac{\pi l}{n}\right)\sin\frac{3\pi l}{n}+\cos\left(\varphi_0+\frac{\pi l}{n}\right)\sin\frac{\pi l}{n}\right)=0\,. \quad (9)$$

Если n=2 и l=1, то соотношение (9) эквивалентно $A\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0=0$, откуда $\varphi_0=\pi k$ или $\varphi_0=\frac{\pi}{2}+\pi m$. Расстояние между соседними нулями равно π, а потому возможна сильная изохронность второго порядка с начальными углами φ_0=0 или $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$.

Если n=3 и l=1, то соотношение (9) перепишется в виде $A\cos\left(\varphi_0+\frac{\pi}{3}\right)=0$ откуда $\varphi_0=\frac{\pi}{6}+\pi k$. Расстояние между соседними нулями снова равно n, а потому сильная изохронность третьего порядка невозможна.

Если n=4 и l=1, то соотношение (9) перепишется в виде $A\sin\left(\varphi_0-\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\varphi_0=0$, откуда $\varphi_0=\frac{\pi}{4}+\pi k$ или $\varphi_0=\frac{\pi m}{2}$.

Если $n=4$ и $l=2$, то из (9) получим $A\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0=0$, следовательно, $\varphi_0=nk$ или $\varphi_0=\frac{\pi}{2}+\pi m$.

Если $n=4$ и $l=3$, то соотношение (9) примет вид $A\sin\left(\varphi_0+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2\varphi_0=0$,, откуда $\varphi_0=\frac{3\pi}{4}+\pi k$ или $\varphi_0=\frac{\pi m}{2}$.

Таким образом, если $n=4$, то $\varphi_0=\frac{\pi k}{2}$ - общее решение (9), следовательно, возможна сильная изохронность четвертого порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

Если $n\geq 5$, то снова не выполняется требование на расстояние между соседними нулями и, следовательно, изохронности выше четвертого порядка быть не может. Итак, для системы (1) с условиями (I_8) возможна лишь изохронность четвертого порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

Рассуждая аналогично, получаем, что для системы (1) с условиями (I_9) также возможна лишь изохронность четвертого порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

Итак, мы получили, что для системы (1) с условиями (I_1), (I_3) - (I_7) может существовать лишь сильная изохронность центра второго порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

Для системы (1) с условиями (I_2) имеет место сильная изохронность центра любого порядка с любым начальным углом φ_0.

Для системы (1) с условиями (I_8), (I_9) может существовать лишь сильная изохронность центра четвертого порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

Так как сильная изохронность центра второго порядка с начальным углом $\varphi_0=0$ имеет место для всех рассматриваемых систем, то покажем лишь, что сильная изохронность центра четвертого порядка для системы (1) с условиями (I_8), (I_9) действительно имеет место.

Решение системы (1) с условиями (I_8) имеет вид:

$$\omega_{2n-1}(\varphi)=\frac{A^{2n-1}}{2n-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}4^{k-1}C_{n+k-2}^{2k-2}\cos^{4n+2k-4}\varphi\sin\varphi,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

$$\omega_{2n}(\varphi)=\frac{A^{2n}}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}4^{k-1}C_{n+k-1}^{2k-1}\cos^{4n+2k-1}\varphi\sin\varphi,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Очевидно, что $\omega_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\omega_{2n-1}(\pi)=0$, $\omega_{2n-1}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$, $\omega_{2n-1}(2\pi)=0$, $\omega_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\omega_{2n}(\pi)=0$, $\omega_{2n}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$, $\omega_{2n}(2\pi)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Следовательно, для системы (1) с условиями (I_8) действительно имеет место сильная изохронность центра четвертого порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

Решение системы (1) с условиями (I_9) будет иметь следующий вид:

$$\omega_n(\varphi) = A^n \cos^n \varphi \left(\begin{array}{l} \dfrac{\cos^n \varphi \sin n\varphi}{n} + \\ + \displaystyle\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{k} \left(\frac{4A+C}{15A+4C} \right)^k C_{n-k-1}^{k-1} \cos^{n-k} \varphi \sin(n-k)\varphi \end{array} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что $\omega_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\omega_n(\pi) = 0$, $\omega_n\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\omega_n(2\pi)=0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для системы (1) с условиями (I_9) действительно имеет место сильная изохронность центра четвертого порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

Итак, верна

Теорема 2. Для системы (1) с условиями (I_1), (I_3) - (I_7) в начале координат $O(0;\ 0)$ имеет место лишь сильная изохронность центра второго порядка с начальным углом $\varphi_0 = 0$.

Для системы (1) с условиями (I_2) в начале координат $O(0;\ 0)$ имеет место сильная изохронность центра любого порядка с любым начальным углом φ_0.

Для системы (1) с условиями (I_8), (I_9) в начале координат $O(0;\ 0)$ имеет место лишь сильная изохронность центра четвертого порядка с начальным углом $\varphi_0=0$.

1. Бондарь Ю.Л. Решение проблемы изохронности центра для одной кубической системы // Вестн. Белорус, гос. ун-та. Сер. 1. 2005. № 2. С. 73.

2. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Мн., 1982.

Поступила в редакцию 23.12.04.

Ольга Борисовна Корсантия - аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор В.В. Амелькин.