$$= c_* \sup_{v \in H_0^3(\Omega)} |(Lu, J_k^* v)_{L_2(\Omega)}| \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le c_* \sup_{v \in H_0^3(\Omega)} |K(u,v,k)| \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le c_1 \frac{1}{k} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

где постоянная $c_1 > 0$. Отсюда после перехода к пределу при $k \to \infty$ следует, что $\| J_k^* v \|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{c_1}{k} \| v \|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$. Следовательно, $v = 0$ в $H_0^1(\Omega)$. Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ■

1. Hadamard J. // The Tohoku Math Journal. 1933. Vol. 37. P. 133.
2. Hadamard J. // L'enseignement mathematique. 1936. Vol. 35. P. 5.
3. Barozzi G. C. // Su alcuni problemmi relative a une equazione lineaire a dirivate parzialli di tipo composito, Atti Semin. mat. e. fis. Univ. Modena, 1960–1961. № 10. P. 11.
4. Каверина И. А. // Труды Второй Всероссийской научной конференции (1–3 июня 2005 г.): в 3 ч. Ч. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: Мат. моделирование и краевые задачи. Самара, 2005. С. 114.
5. Керефов А. А., Плотникова Е. В. // Владикавказ. мат. журн. 2005. Т. 7. № 1. С. 51.
6. Шхануков М. Х. Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 14. С. 689.
7. Конопелько О. А. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 1.
8. Балкизов Ж. А. // Труды Пятой Всероссийской научной конференции (29–31 мая 2008 г.): в 3 ч. Ч. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: Мат. моделирование и краевые задачи. Самара, 2008. С. 23.
9. Дайняк В. В., Корзюк В. И. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 6. С. 1056.

Поступила в редакцию 16.04.12.

Виктор Иванович Корзюк – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики.

Виктор Владимирович Дайняк – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики.

Артур Александрович Протько – студент 5-го курса факультета прикладной математики и информатики.

УДК 517.5

В. Н. РУСАК, И. В. РЫБАЧЕНКО

О ДИАГОНАЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Upper estimates for uniform best approximations in unit disk of trigonometric and hyperbolic functions by rational functions of order *n* are received.

Пусть $C_A = \{f(z)\}$ – пространство функций $f(z)$, аналитических в круге $|z| < 1$ и непрерывных в его замыкании $|z| \le 1$, с нормой

$$\|f\| = \sup\{|f(z)| : |z| \le 1\}.$$

Через $R_{n,m}(f)$ обозначаем наилучшее рациональное приближение функции $f(z)$ рациональными функциями $r_{n,m}(z)$, у которых числитель $p_n(z)$ есть многочлен степени не выше n и знаменатель имеет степень не выше m, т. е.

$$R_{n,m}(f) = \inf\left\{\|f(z) - r_{n,m}(z)\| : r_{n,m}(z)\right\}.$$

Таблицу, составленную из наилучших рациональных приближений

$$\begin{bmatrix} R_{0,0}(f) & R_{1,0}(f) & \dots & R_{n,0}(f) & \dots \\ R_{0,1}(f) & R_{1,1}(f) & \dots & R_{n,1}(f) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{0,n}(f) & R_{1,n}(f) & \dots & R_{n,n}(f) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad (1)$$

будем называть рациональной таблицей Чебышева. Наиболее полно таблица (1) исследована для экспоненты $f(z) = e^z$. Заключительный результат получен в 1984 г. [1] и выглядит следующим образом:

$$R_{n,m}(e^z)=\frac{n!m!}{(n+m)!(n+m+1)!}(1+o(1)),\ n+m\to\infty. \tag{2}$$

Ввиду нелинейности задачи о нахождении наилучшего рационального приближения наличие асимптотики (2) не дает сколько-нибудь удовлетворительной информации о скорости убывания наилучших рациональных приближений тригонометрических и гиперболических функций. В. К. Дзядыком в [2] была оценена скорость убывания диагональных последовательностей $R_{2n,2n}(f)$ и $R_{2n+1,2n}(g)$ соответственно для функций

$$f(z)=\cos z,\ ch\, z;\quad g(z)=\sin z,\ sh\, z$$

через отношение двух определителей, поведение которых при больших n не поддается изучению. Для строк и параболических последовательностей рациональных таблиц ситуация оказалась более благоприятной, в работах [3, 4] удалось в простых терминах найти асимптотику для соответствующих последовательностей наилучших рациональных приближений функций с правильно убывающими тейлоровскими коэффициентами.

Основной результат данной статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Если* $f(z)$ *– одна из функций*

$$\cos z,\ ch\, z, \frac{\sin z}{z}, \frac{sh\, z}{z},$$

то для наилучших рациональных приближений выполнены соотношения

$$R_{2n,2n}(f)=O\left(\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{2n+3}\right). \tag{3}$$

Предварительно установим две леммы.

Лемма 1. *Если* $f(z)\in C_A$ *и* $f(z)\neq 0,$ *то при* $n\to\infty$

$$R_{2n,2n}(f)\asymp R_{2n,2n}\left(\frac{1}{f}\right). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $r_{2n,2n}(z)=p_{2n}(z)/q_{2n}(z)$ – рациональная функция наилучшего приближения для $f(z)\in C_A$, и если $|f(z)|\ge\mu>0$ в $|z|\le 1,$ то при больших n

$$|r_{2n,2n}(z)|\ge\mu/2,\ |z|\le 1.$$

Соответственно в единичном круге имеем неравенство

$$\left|\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{r_{2n,2n}(z)}\right|=\frac{|r_{2n,2n}(z)-f(z)|}{|f(z)|\cdot|r_{2n,2n}(z)|}\le$$

$$\le\frac{\left\|f(z)-r_{2n,2n}(z)\right\|}{\mu^2/2}=\frac{2}{\mu^2}R_{2n,2n}(f),$$

откуда по определению наилучшего приближения вытекает

$$R_{2n,2n}\left(\frac{1}{f}\right)\le\frac{2}{\mu^2}R_{2n,2n}(f). \tag{5}$$

Поменяв ролями функции $f(z)$ и $\dfrac{1}{f(z)}$, найдем двойственное неравенство, которое вместе с (5) приводит к соотношению (4).

Лемма 2. *При* $n\to\infty$ *выполняется соотношение*

$$\Pi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{k^2}=O\left(2^{2n}\right).$$

Доказательство. Действительно, используя асимптотику для гамма-функции, имеем

$$\Pi=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\left(2n-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(n!)^2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=$$

$$= \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)}{(\Gamma(n+1))^2} \asymp \sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{2\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{2n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} =$$

$$= \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e}}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{2n+1} = O\left(2^{2n}\right).$$

Доказательство теоремы 1. Для определенности проведем доказательство для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Опираясь на лемму 1, будем оценивать наилучшее рациональное приближение $R_{2n,2n}\left(\frac{z}{\sin z}\right)$ четной аналитической в круге $|z| < \pi$ функции $z/\sin z$. Введем вспомогательную функцию

$$g(z) = \frac{z}{\sin z}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right), \tag{6}$$

очевидно, что $g(z)$ является четной аналитической в круге $|z| \le \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ функцией. Будем ее приближать в круге $|z| \le 1$ интерполяционным полиномом Тейлора

$$p_{2n}(z,g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1} g(\xi)\frac{\xi^{2n+2}-z^{2n+2}}{(\xi-z)\xi^{2n+2}}\,d\xi, \tag{7}$$

степень его действительно равна $2n$, поскольку в силу четности $g(\xi)$ коэффициент при z^{2n+1} в правой части (7) равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{g(\xi)}{\xi^{2n+2}}\,d\xi = \frac{1}{(2n+1)!}g^{(2n+1)}(0) = 0.$$

Для уклонения полинома $p_{2n}(z,g)$ от функции $g(z)$ в круге $|z| \le 1$ найдем с учетом интегральной формулы Коши

$$|g(z)-p_{2n}(z,g)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} g(\xi)\frac{z^{2n+2}d\xi}{(\xi-z)\cdot\xi^{2n+2}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} |g(\xi)|\frac{|d\xi|}{|\xi-z|\cdot|\xi|^{2n+2}} \le \frac{C_1}{\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^{2n+3}}\int_{|\xi|=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} |g(\xi)||d\xi|. \tag{8}$$

Применяя явное выражение (6) вспомогательной функции и разложение $\sin z$ в бесконечное произведение, получим

$$\int_{|\xi|=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} |g(\xi)||d\xi| = \int_{|\xi|=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{|\xi|}{|\sin\xi|}\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{\xi^2}{\pi^2k^2}\right|\cdot|d\xi| = \int_{|\xi|=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left|\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi^2}{\pi^2k^2}\right)^{-1}\right|\cdot|d\xi| =$$

$$= \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4}{k^4}-\frac{2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\cos 2\varphi}{k^2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\varphi. \tag{9}$$

Подынтегральную функцию в правой части (9) обозначим через $\gamma(\varphi)$, очевидно, что $\gamma(\varphi)$ имеет максимум при $\varphi=0$, и этот максимум с учетом леммы 2

$$\max\gamma(\varphi)=\gamma(0)=\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{k^2}\right)^{-1}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{k^2}\right)^{-1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{k^2}\right)=$$

$$=\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{k^2}=\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-k^2}{k^2}=O\left(2^{2n}\right).$$

Тогда найдем для интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\gamma(\varphi)d\varphi=\gamma(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{4k^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\varphi}{\left(k^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}d\varphi<$$

$$<\gamma(0)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+\frac{16}{9}(2n+1)^2(n+2)^2\sin^2\varphi(4n+5)^{-2}}=O\left(\frac{2^{2n}}{n}\right). \qquad (10)$$

Здесь все сомножители при $k=\overline{n+3,\infty}$ ограничены единицей, а сомножитель при $k=n+1$ ограничен сомножителем при $k=n+2$.

Подставляя (9) и (10) в (8), будем иметь

$$\|g(z)-p_{2n}(z,g\|)\le\frac{C_2}{\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^{2n+2}}\frac{2^{2n}}{n}=O\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{2n+3}. \qquad (11)$$

В силу определения наилучшего приближения и соотношений (6) и (11) теперь получим

$$R_{2n,2n}\left(\frac{z}{\sin z}\right)\le\left\|\frac{z}{\sin z}-\frac{p_{2n}(z,g)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\right)}\right\|=$$

$$=\left\|\frac{g(z)-p_{2n}(z,g)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2k^2}\right)}\right\|\le C_3\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{2n+3}\Big/\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\pi^2k^2}\right)\le C_4\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{2n+3},$$

и доказательство теоремы 1 завершено.

Замечание 1. Для функции $f(z)=\cos z$ доказательство проводится аналогично, используется вспомогательная функция $h(z)=\frac{1}{\cos z}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}\right)$ и разложение $\cos z$ в бесконечное произведение.

Отметим, что из теоремы 1 вытекает

Следствие. Для наилучших рациональных приближений функции $\sin z$ выполнено соотношение

$$R_{2n+1,2n}(\sin z) = O\left(\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{2n+3}\right). \qquad (12)$$

Действительно, если верно (3), то существует рациональная функция $r_{2n,2n}(z)$ такая, что

$$\left\|\frac{\sin z}{z} - r_{2n,2n}(z)\right\| \le C_5\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{2n+3}.$$

Умножая последнее неравенство на $\|z\|$, найдем, что

$$\left\|\sin z - z\cdot r_{2n,2n}(z)\right\| = O\left(\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{2n+3}\right),$$

и, следовательно, тем более справедливо равенство (12).

Замечание 2. В полученных здесь оценках (3) и (12) для наилучших рациональных диагональных приближений правые части убывают в n раз быстрее по сравнению с правыми частями в ранее полученных оценках [5], где применялась рациональная интерполяция, однако вопрос об их точности в смысле порядка остается по-прежнему открытым.

Замечание 3. В отличие от $\cos z$ и $\sin z$ тригонометрические функции $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$ аппроксимируются рациональными функциями в смысле порядка так же хорошо, как и экспонента e^z. Действительно, например, в случае $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$ существуют рациональные функции $r_{n,n}(z)$ такие, что при больших n

$$\left\|\operatorname{tg}\frac{z}{2} - r_{n,n}(z)\right\| \le 5\left(\frac{e}{1+e}\right)^2 \frac{(n!)^2}{(2n)!(2n+1)!}.$$

1. Trefethen J. N. // Journal of approximation theory. 1984. Vol. 40. № 4. P. 380.
2. Дзядык В. К. // Мат. сб. 1979. Т. 108(150). № 2. С. 247.
3. Березкина Л. Л., Русак В. Н. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1990. № 4. С. 27.
4. Русак В. Н., Та Хонг Куанг // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 10. С. 869.
5. Русак В. Н. Труды Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Ф. Д. Гахова, Минск, 16–20 февр. 1996 г. Минск, 1996. С. 326.

Поступила в редакцию 16.04.12.

Валентин Николаевич Русак – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики.

Игорь Васильевич Рыбаченко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики.

УДК 517.938.5

В. Ю. ТЫЩЕНКО

О КЛАССИФИКАЦИЯХ СЛОЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ КОМПЛЕКСНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

The algorithm for carrying out of topological, smooth and holomorphic classifications of complex linear and linear-fractional discrete dynamic systems of general situation is received.

1. Постановка задачи. В [1, с. 169] была найдена размерность инвариантных регулярных слоений голоморфных дискретных динамических систем. В данной работе проводятся топологическая, гладкая, **R**-голоморфная [2] (вещественно голоморфная) и голоморфная (комплексно голоморфная) классификации слоений вполне разрешимых [3, с. 232] комплексных линейных и дробно-линейных дискретных динамических систем.

2. Линейные дискретные динамические системы. Рассмотрим комплексные вполне разрешимые (при $m > 1$) невырожденные [1, с. 168] линейные дискретные динамические системы $\left(L^1\right)$