Вестник БГУ. Сер. 1. 2005. № 2

*УДК 517.922.51*

*А.А. ЛЕВАКОВ*

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ В СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ВОЗМУЩЕННОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

The conditions, that for each solution $x(t)$ of the perturbed stochastic system exists the solution of the ordinary differential equation $y(t)$ satisfying $E(\|x(t)-y(t)\|_2)\to 0$, $t\to+\infty$, are obtained.

Исследование асимптотических характеристик стохастических уравнений является более сложной задачей, чем изучение аналогичных свойств обыкновенных дифференциальных систем. В работе найдены условия, при которых для каждого решения возмущенной стохастической системы существует решение невозмущенного обыкновенного дифференциального уравнения со случайным начальным условием такое, что среднеквадратическое отклонение этих решений стремится к нулю при $t \to +\infty$. Обыкновенные дифференциальные уравнения с аналогичным свойством называют асимптотически эквивалентными, и они исследованы в [1].

Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t)=A(t)x(t)dt+g(t, x(t))\, dW(t), \tag{1}$$

где $A : R_+ \to R^{d\times d}$, $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ - измеримые по Борелю ограниченные функции, $g$ непрерывна по $x$ при каждом $t$, $g=(gg^T)^{1/2}$. По теореме 1 [2] для любого $x_0 \in R^d$ уравнение (1) имеет γ-слабое решение с начальным условием $x_0$.

Пусть $(\Omega, F, P)$ - вероятностное пространство, $\eta : \Omega \to R^d$ - случайная величина. Непрерывный процесс $y : \Omega \to C(R_+, R^d)$ называем сильным решением системы

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \tag{2}$$

с начальным условием η, если с вероятностью 1 $y(t)=\eta=\int_0^t A(s)y(s)\,ds$ для всех $t \geq 0$.

Пусть $L$ - подпространство $R^d$ такое, что решения системы (2) с начальными условиями $y(0) \in L$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$, а $P_0$ - матрица оператора проектирования $R$ на $L$ в каноническом базисе пространства $R^d$, $Y(t)$ - базисная матрица системы (2), $Y(0) = I$ - единичная матрица.

**Теорема.** Если

а) существуют постоянные $K, q$, $1 \leq q \leq +\infty$, такие, что $\forall t \geq 0$

$$\int_0^t \| Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\|^{2q}\, d\tau + \int_t^{+\infty} \| Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\|^{2q}\, d\tau \leq K, \text{ когда } 1 \leq q < \infty,$$

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} \|Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\| + \sup_{\tau\geq t}\|Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\| \leq K, \text{ когда } q=\infty;$$

б) $\|g(t, x)\| \leq n(t)\ \forall (t, x) \in R_+ \times R^d$, $n(\cdot) \in \mathcal{L}_{2p}(R_+, R)$, где $1/p+1/q = 1$, причем при $p=\infty$ $\lim_{t\to\infty} \operatorname{ess\,sup}_{\tau\geq t} n(\tau)=0$, то для любого γ-слабого решения $(x(t), W(t), \Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ уравнения (1) найдется сильное решение $y : \Omega \to C(R_+, R^d)$ уравнения (2) такое, что

$$\lim_{t\to\infty} E(\|x(t)-y(t)\|^2)=0.$$

Доказательство. Пусть $1<q<\infty$ (если $q=1$ или $q = \infty$, то доказательство аналогично случаю $1<q<\infty$ с очевидными изменениями). Для любого γ-слабого решения $x(t)$ системы (1) при выполнении условий а), б) с помощью неравенства Гёльдера для любых $t, s$, $0 \leq t \leq s$, имеем

$$E\left(\left\|\int_0^s (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))\, dW(\tau)\right\|^2\right) \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty \|(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\|^{2q} d\tau\right)^{1/q} \left(\int_0^\infty n^{2p}(\tau)\, d\tau\right)^{1/p} \leq k_1,$$

$$E\left(\left\|\int_t^s Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))\, dW(\tau)\right\|^2\right) \leq k_2,$$

$k_1$, $k_2$ = const, следовательно, с вероятностью 1 существуют конечные пределы [3, с. 38]

$$\lim_{s\to+\infty}\int_0^s (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))\, dW(\tau) = \int_0^\infty (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau))\, dW(\tau),$$

$$\lim_{s\to\infty}\int_t^s Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau)=$$

$$=\int_t^\infty Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau)$$

и

$$E\left(\left\|\int_t^\infty Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau)\right\|^2\right)=$$

$$=E\left(\int_t^\infty \| Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\|^2\quad d\tau\right).$$

Представим γ-слабое решение $x(t)$ уравнения (1) в виде [4]

$$x(t)=Y(t)x(0)+\int_0^t Y(t)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau)=$$

$$=Y(t)\left(x(0)+\int_0^\infty (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau)\right)+$$

$$+\int_0^t Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau)-\int_t^\infty Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau).\qquad (3)$$

Возьмем сильное решение $y(t)$ системы (2) с начальным условием

$$y(0)=x(0)+\int_0^\infty (I-P_0)Y^{-1}(\tau)g(\tau,x(\tau))\quad dW(\tau).$$

$$E(\| y(t)-x(t)\|^2)\le 2\left[\left(\int_0^a \| Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\|^{2q}\quad d\tau\right)^{1/q}\left(\int_0^a n^{2p}(\tau)\quad d\tau\right)^{1/p}+\right.$$

$$+\left(\int_a^t \| Y(t)P_0Y^{-1}(\tau)\|^{2q}\quad d\tau\right)^{1/q}\left(\int_a^t n^{2p}(\tau)\quad d\tau\right)^{1/p}+$$

$$\left.+\left(\int_t^\infty \| Y(t)(I-P_0)Y^{-1}(\tau)\|^{2q}\quad d\tau\right)^{1/q}\left(\int_t^\infty n^{2p}(\tau)\quad d\tau\right)^{1/p}\right],\ 0\le a\le t.\qquad (4)$$

Так как $n(\cdot)\in\mathcal{L}_{2p}(R_+, R)$, то для произвольного ε>0 существует $a$ такое, что для всех $t\ge a$ второе слагаемое в (4) меньше ε. Зафиксируем одно из таких $a$. Так как $\|Y(t)P_0\|\to 0$ при $t\to\infty$, то первое слагаемое в (4) меньше е для всех достаточно больших $t$. Третье слагаемое меньше ε для всех достаточно больших $t$ в силу того, что $n(\cdot)\in\mathcal{L}_{2p}(R_+, R)$. Теперь требуемое утверждение вытекает из (4).

*Замечание.* Условие а) теоремы называют дихотомичностью линейной системы (2), и оно является хорошо изученным [5].


1.Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.
2.Леваков А. А. // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1041.
3. Ватанабэ С, Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М, 1986.
4. Леваков А.А. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 213.
5.Изобов Н.А., Прохорова Р. А // Тр. Института математики. 2000. Т. 4. № 5. С. 54.


Поступила в редакцию 17.06.03.

***Анатолий Афанасьевич Леваков*** - доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.