УДК 519.68: [519.1 +519.6]

И.А. КОРОЛЬ

МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ И ПРОГНОЗА ПОКАЗАТЕЛЕЙ СИСТЕМ ПЕНСИОННОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

There have been proposed the models of the changes dynamics and forecast of the demographic and economic rates for the pension coverage system. An algorithm of the population size forecasting has been developed. A regressive model of the best forecast constructing for the economic rates has been proposed.

Главная цель реформирования пенсионной системы - обеспечение ее финансовой стабильности, адаптация к изменяющимся экономическим условиям и повышение эффективности [1].

В связи с этим важное значение имеют финансово-экономическое обоснование реформы, а также предполагаемый социальный и экономический эффект, полезной представляется и актуарная экспертиза состояния и динамики социальных фондов. Актуарный анализ [2] основывается на следующих экономических и демографических показателях: структуре и численности населения, которое получает пенсии в настоящее время; уровне будущих пенсионных выплат; численности и характеристике занятого населения, выплачивающего социальные взносы; уровне заработной платы в будущем.

1. Модели прогноза населения, Численность населения на определенную дату определяется количеством лиц в возрастном интервале. Поскольку в финансовой системе временной единицей измерения чаще всего является год, то прогнозы численности населения будем делать на 1 января каждого года. Однако, поскольку пенсионный возраст для мужчин и женщин различен (60 и 55 лет соответственно), разбиения структуры населения по годовым интервалам недостаточно. Динамику изменения численности мужского и женского населения приходится рассматривать раздельно. Также будем считать, что на численность населения не влияют такие внешние факторы, как политические изменения и глобальные катастрофы.

Для того чтобы определить состав населения в будущем, необходимо располагать рядом данных: доля умерших для каждого возраста; показатели фер-тильности (способности к воспроизводству), которые зависят от численности женщин каждого возраста в интервале 15-49 лет. Но так как жизнь непредсказуема, то реальная численность населения будет складываться из двух компонент: систематической и случайной, причем каждая компонента вычисляется по-своему.

Рассмотрим группу населения в возрасте i в текущем году х. Тогда систематическая компонента ее численности в следующем году (x+1) будет определяться как произведение численности этой группы на вероятность выживания; а случайная компонента - как сумма произведения случайной компоненты этой группы в году x на некоторую константу и случайного неконтролируемого изменения этого года.

Описание модели. Пусть $P_i(x)$ - численность населения возраста i в текущем году x. Для краткости символ пола в обозначениях будем опускать. Заметим, что формулы для каждого пола идентичны, за некоторыми исключениями, о которых будет сказано ниже. Возрастной диапазон - от 0 до 99 лет, поскольку имеются статистические данные о численности населения и таблицы жизни только для этого диапазона.

$P_i(x)$ является случайной величиной, зависящей от множества факторов, поэтому и задачи динамики изменения численности населения, и алгоритмы прогноза будущих значений $P_{i+1}(x+1)$, $P_{i+2}(x+2)$, ... должны основываться на методах статистического анализа данных, а именно на методах статистического анализа временных рядов.

Поскольку значение $P_i(x)$ зависит от предыдущих - $P_{i-1}(x-1)$, $P_{i\_2}(x-2)$, ..., то естественной моделью для $P_i(x)$ является авторегрессия 1-го порядка в виде:

$$P_i(x+1)=\alpha\, P_{i-1}(x)+W_i(x),$$

где α — некоторое неслучайное число, называемое коэффициентом авторегрессии, а $W_i(x)$ - некоторая случайная до эавка.

Под а подразумевается доля людей возраста (i-1) в x-м году, доживших до следующего года. В терминах актуарной математики

$$\alpha=\beta+{}_1\mathrm{P}_i,$$

где ${}_1P_i$ — вероятность того, что человек возраста i доживет до возраста (i+1). Величина ${}_1P_i$ может быть найдена по таблицам жизни, которые ежегодно составляются Министерством статистики и анализа Республики Беларусь; коэффициент β отражает изменение доли людей соответствующего возраста, обусловленное не естественными процессами жизни и смерти, а некими внешними воздействиями, определяющими из которых являются процессы миграции. Изначально коэффициент β не известен и подлежит оцениванию.

На случайную добавку $W_i(x)$ оказывают влияние многие факторы, и поэтому согласно центральной предельной теореме всегда считается, что случайная величина $W_i(x)$ распределена по гауссовскому закону с математическим ожиданием $M(W_i(x))=0$ и дисперсией $D(W_i(x))=\sigma^2$. Величина σ^2 также подлежит оцениванию.

Найдем оценки $\hat{\beta}$ и σ^2. Согласно методу наименьших квадратов оценка параметра а будет найдена как решение задачи

$$\sum_{x=n}^{m-1}\left(P_i(x+1)-\alpha P_{i-1}(x)\right)^2 \to \min_{\alpha}, \tag{1}$$

где суммирование в левой части (1) проводится по годам x: от n-го по m-й год, для которых имеются данные статистики. Решение задачи (1) записывается как:

$$\hat{\alpha}=\frac{\sum\limits_{x=1}^{m-1}P_i(x+1)P_{i-1}(x)}{\sum\limits_{x=n}^{m-1}P_{i-1}^2(x)}.$$

Тогда оценка интересующего нас параметра β имеет вид:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{x=n}^{m-1}P_i(x+1)P_{i-1}(x)}{\sum\limits_{x=n}^{m-1}P_{i-1}^2(x)}-{}_1P_i\ .$$

Согласно методу максимального правдоподобия дисперсия σ^2 оценивается как:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m-1-n}\sum_{x=n}^{m-1}\left(P_i(x+1)-\left({}_1P_i+\hat{\beta}\right)P_{i-1}(x)\right)^2.$$

В качестве прогнозного значения $\hat{P}_i(x+1)$ по имеющимся значениям $P_{i-1}(x)$, $P_{i-2}(x-1)$, ... возьмем условное математическое ожидание случайной величины $P_i(x+1)$:

$\hat{P}_i(x+1)=M(P_i(x+1)P_{i-1}(x)P_{i-2}(x-1), ...)$. Средний квадрат

ошибки такого прогноза выражается соотношением

$M(P_i(x+1)-P_{i-1}(x))^2=M(W_i(x))^2=D(W_i(x))=\sigma^2$. Отметим, что этот *прогноз является наилучшим из всех возможных,* так как минимизирует средний квадрат ошибки реальных данных от теоретических потрясений.

Действительно, среднеквадратичная ошибка любого другого прогноза $f(P_{i-1}(x), P_{i\_2}(x-1), ...)$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}&Mf(P_{i-1}(x),\ \ P_{i-2}(x-1),\ \ ...)-P_i(x+1))^2=\\&=M(f(P_{i-1}(x),\ P_{i-2}(x-1),\ ...)-\alpha P_{i-1}(x)-(\ W_i(x))^2=\\&=M(W_i(x))^2+M(f(P_{i-1}(x),\ P_{i-2}(x-1),\ ...)-\alpha P_{i-1}(x))^2-\\&-2MW_i(x)(f(P_{i-1}(x), P_{i-2}(x-1), ...)-\alpha P_{i-1}(x))).\end{aligned}$$

Но,

$$\begin{aligned}&M(W_i(x))^2=D(W_i(x))=\sigma^2,\\&M(f(P_{i-1}(x), M(f(P_{i-1}(x), P_{i\_2}(x-1), ...)-\alpha P_{i-1}(x))^2\ge 0,\\&M(W_i(x)(f(P_{i-1}(x), P_{i\_2}(x-1), ...)-\alpha P_{i-1}(x)))=0.\end{aligned}$$

Следовательно, прогноз является наилучшим, что и требовалось доказать.

2. Модели динамики изменения и прогноза экономических показателей. Экономические показатели, определяющие состояние пенсионной системы (например, ВВП, производительность труда, заработная плата, цены, процентная ставка), могут нести различную нагрузку при использовании в расчетах. Основные экономические показатели пенсионной системы рассчитываются на основе статистического анализа динамики их развития в течение доступного для наблюдений временного интервала.

Поскольку на экономические показатели влияет множество факторов (случайных и неслучайных), то, например, для ВВП в году x можно представить следующую регрессионную модель:

$$\text{ВВП}(x)=f(x)+U_x, \tag{2}$$

где $f(x)$ - некоторая трендовая составляющая, а U_x - случайная составляющая.

Изменение тренда $f(x)$ в модели (2) определяет тенденцию для ВВП в течение определенного периода времени. Величина $f(x)$ даст возможность спрогнозировать значение ВВП на будущее.

Предположим, что функция $f(x)$ задана в некотором базисе известных ортогональных функций $\varphi_{in}(x)$, т. е. представлена в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_{in}(x), \tag{3}$$

где n - порядок тренда, а ортогональные функции $\varphi_{in}(x)$ удовлетворяют условию

$\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_{in}(x)\varphi_{kn}(x)=0$ при $i\neq k,\ i,\ k=1,\ 2,\ ...,\ N;\ N$ - число лет, по которым имеется информация о ВВП.

Задача оценивания $f(x)$ превратилась в задачу оценивания коэффициентов α_i, $1\leq i\leq n$, которую решим методом наименьших квадратов.

Согласно данному методу неизвестные коэффициенты получаются как решение

$$\sum_{x=1}^{N}\left(\text{ВВП}(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_{in}(x)\right)^2\to\min_{\{\alpha_i\}}.$$

Отсюда $\sum\limits_{x=1}^{N}\left(\text{ВВП}(x)-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_{in}(x)\right)\varphi_{jn}(x)=0$, $1\leq j\leq n$, и с учетом ортогональности базиса $\varphi_{in}(x)$ имеем

$$\hat{\alpha}_i=\frac{\sum\limits_{x=1}^{n}\text{ВВП}(x)\varphi_{in}(x)}{\sum\limits_{x=1}^{n}\varphi_{in}^2(x)},\ 1\leq i\leq n. \tag{4}$$

задачи

Оценка (4) коэффициента a является состоятельной, несмещенной и эффективной.

Несмещенной оценкой для дисперсии $\sigma^2=D\{u_x\}$ служит величина

$$s^2=\frac{\sum\limits_{x=1}^{n}\left(\text{ВВП}(x)-\sum\limits_{i=1}^{n}\hat{\alpha}_i\varphi_{in}(x)\right)^2}{N-n-1}.$$

Поскольку случайная составляющая U_x, как правило, распределена по гаус-совскому закону, то и оценки $\hat{\alpha}_i$ из (4) также распределены по гауссовскому закону. Этот факт гарантирует, что отношение $\frac{(N-n-1)s^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2- рас–пределение с (N-n-1) степенями свободы. Тогда можно проверять статистическую гипотезу H_0:α_n=0 при альтернативе H_1:$\alpha_n\neq0$, что позволяет оценить параметр n как степень полинома.

Следовательно, оценив все параметры представления (3), можно построить наилучший прогноз значения ВВП (x + 1) в смысле минимума средней ошибки:

$$\text{ВВП}\,(x+1) = \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{\alpha}_i \varphi_{in}(x+1).$$

Примечание. Базис ортогональных функций $\{\varphi_{in}(x)\}$, вообще говоря, выбирается произвольно, главным является условие ортогональности. Последовательность $\{\varphi_{in}(x)\}$ составляют представления рядом Фурье, полиномами Чебышева, Латерра и т. д.

Разработанные модели динамики изменения и прогноза демографических и экономических показателей используются Фондом социальной защиты населения Республики Беларусь, в частности, для прогнозирования объемов финансовых ресурсов на выплату пенсий (расходная часть бюджета) и их поступлений (доходная часть бюджета).

1. Гринберг А.С, Король И.А. Информационный менеджмент: Учеб. пособие для вузов. М., 2003.
2. Баскаков В.Н., Карташов Г. Д. Введение в актуарную математику: Учеб. пособие. М., 1998.

Поступила в редакцию 09.11.04.

Иван Андреевич Король **-** кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, первый заместитель управляющего Фондом социальной защиты населения Министерства труда и социальной защиты Республики Беларусь.