УДК 519.214

А.Г. ФЕДОСЕНКО

О СХОДИМОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СУММ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К ПОЛУУСТОЙЧИВОМУ ЗАКОНУ

There a question on limit sum distributions of dependent random variables to semistable law is investigated. There are considers of saving of semistablement in limit distributions.

Предварительные сведения

Распределение называется полуустойчивым, если оно является либо гаус-совским, либо безгранично делимым без гауссовского компонента со спектральной функцией Леви вида:

$$L(x)=\begin{cases} \dfrac{\quad}{|x|^{\alpha}}, & x<0; \\ -\dfrac{\theta_2(\ln|x|)}{x^{\alpha}}, & x>0, \end{cases}$$

где $0<\alpha<2$, $\theta_i(x)$ - периодические функции с общим периодом такие, что для всех y и всех $z\geq 0$ $e^{\alpha z}\theta_i(y-z)\geq e^{-\alpha z}\theta_i(y+z)$, $0\leq c_i\leq\theta_i(y)\leq d_i<\infty$, $c_1+c_2>0$, $i=1,\ 2$. Пусть $k(n)$ - последовательность натуральных чисел такая, что

$$k(n)\to\infty,\quad k(n)\leq k(n+1),\quad \frac{\quad}{k(n)}\to r\in[1;\ \infty). \tag{1}$$

Считают (см., например, [1]), что функция распределения (ф. р.) $F(x)$ принадлежит области притяжения полуустойчивого распределения, если существуют последовательность $\{X_s\}_{s=1}^{n}$ независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.) с ф. р. $F(x)$ и последовательности $\{A_n\}$ и $\{C_n\}$ соответственно нормирующих и центрирующих констант таких, что суммы

$$S_n = \frac{1}{A_n}\sum_{s=1}^{k(n)} X_s + C_n \tag{2}$$

имеют предельное полуустойчивое распределение. При этом константы A_n удовлетворяют соотношению (см. [1, 2]):

$$A_n \to \infty, \quad A_n \le A_{n+1}, \quad \frac{A_{n+1}}{A_n} \to A \in [1; \infty).$$

Доказано (см. [1]), что если ф. р. принадлежит области притяжения полуустойчивого распределения с характеристическим показателем $0<\alpha<2$, то она необходимо имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta_1(\ln|q(x)|) + v_1(x)}{|x|^{\alpha}} h(x) & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - \dfrac{\theta_2(\ln q(x)) + v_2(x)}{x^{\alpha}} h(x) & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $v_i(x) \to 0$ и $h(x)$ - медленно меняющаяся функция при $x \to \infty$ (см., например, [3, 4]), $i=1, 2$, $1 \le q(x) \le A$. Причем согласно [1] для сходимости сумм (2) к полуустойчивому распределению константы A_n необходимо удовлетворяют соотношению $A_n^{-\alpha} h(A_n) k(n) \to 1$.

Нарушение полуустойчивости в случае зависимости слагаемых

Как показано в [5, 6], в предельном распределении сумм зависимых с. в. может возникнуть «нормальный шум», т. е. в предельной характеристической

$\exp\left(-\dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$. В этом случае $\sigma^2 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \limsup\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \liminf\limits_{n \to \infty} \sigma_n$,

$$\sigma_n = \sum_{s=1}^{n} M(\eta_{ns}^2; |\eta_{ns}^2| \le \varepsilon) + \sum_{p \ne r} M(\eta_{np}\eta_{nr}; |\eta_{np}| \le \varepsilon \wedge |\eta_{nr}| \le \varepsilon).$$

Таким образом, в качестве предельного распределения сумм нормированных зависимых с. в. может выступать безгранично делимое распределение, логарифм х. ф. которого имеет вид

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\Psi(x) + ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}, \tag{4}$$

функции (х. ф.) распределения сумм может появиться множитель

где из области интегрирования исключен ноль, а $\Psi(x)$ - спектральная функция Леви - Хинчина (см. [5, 6]).

Как показано в [5, 6], если выполнены условия теорем о сходимости распределений сумм зависимых с.в., первые два слагаемых в (4) можно найти в предположении независимости с. в. Поэтому, если ф. р. зависимых с. в. принадлежат области притяжения полуустойчивого распределения, то первые два слагаемых в (4) представляют собой логарифм х. ф. полуустойчивого распределения. Однако в случае с $\sigma^2 \ne 0$ предельное распределение, очевидно, не является полуустойчивым.

Сохранение полуустойчивости в случае перемешивания

Пусть $\left\{X_{ns}\right\}_{s=1}^{n}$, $n=\overline{1,\infty}$,- система серий действительных с.в., определенных при каждом n на одном и том же вероятностном пространстве. Существование математических ожиданий (м. о.) величин X_{ns} не предполагается.

Положим

$$\overline{X}_{ns}=\begin{cases}X_{ns}, & |X_{ns}|\le H,\\ 0, & |X_{ns}|>H,\end{cases}\quad \overline{\overline{X}}_{ns}=\begin{cases}0, & |X_{ns}|\le H,\\ X_{ns}, & |X_{ns}|>H,\end{cases}$$

урезанные м. о. $a_{ns}=M(X_{ns};\ |X_{ns}|\le H_0)$, $\overline{\xi}_{ns}=\overline{X}_{ns}-a_{ns}$, $\overline{\overline{\xi}}_{ns}=\overline{\overline{X}}_{ns}$, $\underline{\xi_{ns}}=\overline{\xi}_{ns}+\overline{\overline{\xi}}_{ns}$, где H - постоянная, $H\ge H_0>0$, H_0 - фиксированная постоянная, $s=\overline{1,n}$, $\tilde{\xi}_{ns}=\overline{\xi}_{ns}$ при $H=H_0$, $h(n)$ - медленно меняющаяся функция при $n\to\infty$.

В [5] доказана

Теорема 1. Пусть $\left\{X_{ns}\right\}_{s=1}^{n}$ - система серий с. в., удовлетворяющих условию р. с. п. с коэффициентом $\beta(\tau)$ таким, что $\sum\limits_{\tau=1}^{n}\beta^{1/2}(\tau)<\infty$, и найдутся постоянные числа H_1, H_2 и n_0 такие, что при $n>n_0$ $\max\limits_{s} M\tilde{\xi}_{ns}^{2}\le\dfrac{H_1}{n}$, $\max\limits_{s,q} M\left|\tilde{\xi}_{ns}^{2}\tilde{\xi}_{nq}\right|\le\dfrac{H_2h(n)}{n^{3/2}}$, где $0<|s-q|\le n^{1/4-\rho/2}$, $0<\rho\le 1/4$. Тогда, если при каждом n величины $\left\{X_{ns}\right\}_{s=1}^{n}$ одинаково распределены и при $\varepsilon>0$ $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\limsup\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{s=1}^{n}M(\xi_{ns}^{2};\left|\xi_{ns}^{2}\right|\le\varepsilon)=0$, то $a_2=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{r\ne p}M\tilde{\xi}_{nr}\tilde{\xi}_{np}=0$

Пусть величины ξ_{ns} одинаково распределены и имеют ф. р. (4). Введем обозначения:

$$\eta_{ns}=\frac{\xi_{ns}}{A_n},\quad \overline{\eta}_{ns}=\frac{\overline{\xi}_{ns}}{A_n},\quad \overline{\overline{\eta}}_{ns}=\frac{\overline{\overline{\xi}}_{ns}}{A_n},\quad \tilde{\eta}_{ns}=\overline{\eta}_{ns}\ \text{при}\ H=H_0,$$

при этом положим константы $A_n=\left(\dfrac{h(A_n)}{k(n)}\right)^{1/\alpha}$. Тогда ф. р. величин η_{ns} имеют вид:

$$F_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta_1(\ln|q(A_nx)|)+v_1(A_nx)}{k(n)|x|^{\alpha}} & \text{при}\quad x<0,\\[2ex] 1-\dfrac{\theta_2(\ln q(A_nx))+v_2(A_nx)}{k(n)x^{\alpha}} & \text{при}\quad x>0.\end{cases}\qquad(5)$$

Для такой системы серий с.в. $\left\{\eta_{ns}\right\}_{s=1}^{k(n)}$ верна

Теорема 2. Пусть $\left\{X_{ns}\right\}_{s=1}^{k(n)}$ - система серий одинаково распределенных с. в., удовлетворяющих условию р. с п. с коэффициентом $\beta(\tau)=o(\tau^{-3-\varepsilon})$, $k(n)$ удовлетворяют условиям (1), ф. р. величин η_{ns} имеют вид (5) и найдутся числа H_1, которые могут зависеть от H и n_0 такие, что при $n>n_0$

$$M\left|\overline{\eta}_{ns}\overline{\eta}_{nq}\overline{\eta}_{np}\right|\le\frac{H_1h(n)}{k^{3/2}(n)},\qquad(6)$$

где $0<|s-q|\le n^{1/4-\rho/2}$, $0\le|p-q|\le n^{1/4-\rho/2}$, $0<\rho\le\dfrac{\varepsilon}{2(7+2\varepsilon)}$.

Тогда, если существует $a = \lim_{H\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n} M\frac{\bar{\eta}_{ns}}{1+\bar{\eta}_{ns}^2}$, то распределения сумм (2) будут сходиться к полуустойчивому распределению.

Доказательство. В условиях теоремы 2 выполняется:

1) $\max_s M\tilde{\eta}_{ns}^2 \le \frac{H_2}{k(n)}$.

В самом деле, при достаточно большом K

$$M\tilde{\eta}_{ns}^2 \le \int_{|x|\le K} x^2 dF_n(x) \le \frac{K^2}{k(n)}\int_{|x|\le KA_n} dF(x) \le \frac{K^2}{k(n)}.$$

Поэтому всегда найдется постоянное H_2 такое, что $\max_s M\tilde{\eta}_{ns}^2 \le \frac{H_2}{k(n)}$;

2) $\max_s P(|\bar{\bar{\eta}}_{ns}|>0) \le \frac{g(H)}{k(n)}$, где $\lim_{H\to\infty} g(H) = 0$.

Действительно, $P(|\bar{\bar{\eta}}_{ns}|>0) = \int_{|x|>H} dF_n(x) \le \frac{\Theta}{k(n)}\left(\frac{1}{H}\right)^{\alpha}$, где $0<\Theta<\infty$;

3) $\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{k(n)} M(\eta_{ns}^2; |\eta_{ns}^2|\le\varepsilon) = 0$.

Действительно,

$$\sum_{s=1}^{k(n)} M(\eta_{ns}^2; |\eta_{ns}^2|\le\varepsilon) = k(n)\int_{|x|\le\varepsilon} x^2 dF_n(x) \le k(n)\frac{\varepsilon^2}{k(n)}\int_{|x|\le\varepsilon A_n} dF(x) \le \varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0;$$

4) следовательно, поскольку условия $\beta(\tau)=o(\tau^{-3-\varepsilon})$ и (6) являются более сильными, чем соответствующие условия теоремы 1, то $a_2=0$, и, значит, $\sigma^2=0$.

Таким образом, выполняются все условия теорем о сходимости распределений сумм перемешивающихся с. в. (ом. [5, 6]), а функции (5) принадлежат области притяжения полуустойчивого закона, поэтому, как уже отмечалось, первые два слагаемых в (1) в данном случае представляют собой логарифм полуустойчивой х. ф. с характеристическим показателем α. А поскольку $\sigma^2=0$, то в предельном распределении сумм (2) отсутствует нормальный компонент, что доказывает теорему.

Нарушение полуустойчвости в случае m_n-зависимости

Отметим, что если величины X_{ns} m_n-зависимы и выполнены все условия теоремы 2, кроме условия р. с. п., то полуустойчивость, вообще говоря, не обязательно сохраняется. Проиллюстрируем это на примере.

Пример. Пусть величины $Y_{n1}, Y_{n2}, \ldots, Y_{n(n+m-1)}, Z1, Z_2, \ldots, Z_s, \ldots$ независимы (в совокупности) при каждом n, причем

$$Y_{nq} = \begin{cases} \frac{\sigma A_n^{(2-\alpha)/2}}{m} h^{1/2}(A_n), & p_1 = 1/2, \\ -\frac{\sigma A_n^{(2-\alpha)/2}}{m} h^{1/2}(A_n), & p_2 = 1/2, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} \frac{c}{|x|^{\alpha}} h(x), & x<-K, \\ 1/2, & -K\le x\le K, \\ 1-\frac{c}{x^{\alpha}} h(x), & x>K, \end{cases}$$

где $q=\overline{1, n+m-1}$, $s=\overline{1,\infty}$, $m_n = m_0 n^{1/8-\rho}$, m_0 - любое постоянное число, $0<\rho\le 1/8$, $F(x)$ - ф. р. величин Z_s, $0<\alpha<2$, постоянные $\sigma>0$, $K>0$, $c=\frac{K^{\alpha}}{2}$, $|Y_{nq}|<K$,

$A_n = \left(\frac{h(A_n)}{k(n)}\right)^{1/\alpha}$. Пусть $X_{ns} = \sum_{k=s}^{s+m-1} Y_{nk} + Z_{ns}$, $s=\overline{1,n}$, $n=\overline{1,\infty}$.

Положим $\overline{X}_{ns}=\sum_{k=s}^{s+m-1}Y_{nk}+\overline{Z}_{ns}$, $\quad\overline{\overline{X}}_{ns}=\overline{\overline{Z}}_{ns}$, $\quad\overline{Z}_{ns}=\begin{cases}Z_s,\ |Z_s|\le HA_n,\\ 0,\ |Z_s|>HA_n,\end{cases}$

$\overline{\overline{Z}}_{ns}=\begin{cases}0,\ |Z_s|\le HA_n,\\ Z_s,\ |Z_s|>HA_n,\end{cases}$ где H - постоянная, $H\geq H_0>0$, H_0 - фиксированная постоянная, $s=\overline{1,n}$. Легко подсчитать, что $a_{ns}=M(X_{ns};\ |X_{ns}|\leq H_0A_n)=0$.

Пусть теперь $\eta_{ns}=\dfrac{X_{ns}}{A_n}$. В результате получим систему серий m_n-зависимых нормированных случайных величин; ф. р. величин η_{ns} будут иметь вид:

$$F_n(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{k(n)|x|^{\alpha}},\ x<-\varepsilon_n,\\ 1/2,\ -\varepsilon_n\le x\le\varepsilon_n,\\ 1-\dfrac{c}{k(n)x^{\alpha}},\ x>\varepsilon_n,\end{cases}$$

где $\varepsilon_n=K/A_n$. Такая ф. р. удовлетворяет (8). С учетом $MY_{nq}=0$, $q=\overline{1,n+m-1}$, $MZ_s=0$, $s=\overline{1,\infty}$, легко подсчитать, что

1) $M\left|\overline{\eta}_{ns}\overline{\eta}_{nq}\overline{\eta}_{np}\right|\le\dfrac{(m-1)^3\sigma^3}{m^3k^{3/2}(n)}$,

2) $M\dfrac{\overline{\eta}_{ns}}{1+\overline{\eta}_{ns}^2}=0$. Следовательно, a=0.

Кроме того:

3) $\sum_{s=1}^{k(n)}M(\eta_{ns}^2;|\eta_{ns}^2|\le\varepsilon)=\dfrac{\sigma^2}{m}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$,

4) $\sum_{r\neq p}M\tilde{\eta}_{nr}\tilde{\eta}_{np}=m(m-1)k(n)\dfrac{\sigma^2A_n^{2-\alpha}}{m^2}\dfrac{h(A_n)}{A_n^2}=\dfrac{(m-1)\sigma^2}{m}\xrightarrow[m\to\infty]{}\sigma^2$.

Таким образом, в данном примере выполнены все условия теоремы 2, кроме условия р. с. п., а также все условия теоремы о сходимости распределений сумм m-зависимых с. в. (см. [6]), которые, в частности, допускают неограниченный рост m при $n\to\infty$. Но, несмотря на то, что предел дисперсий в окрестности нуля равен нулю, предел ковариаций a_2 отличен от нуля, что обусловливает наличие «нормального шума» в предельном распределении сумм.

1. Грйневйч И.В., Хохлов Ю. С. // Теория вероятностей и ее приложения. 1995. Т. 40. Вып. 2. С. 417.
2. Круглое В.М. // Там же. 1972. Т. 17. Вып. 3. С. 723.
3. Билингсли П. Сходимость вероятностных мер. М., 1977.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1984.
5. Юдин М. Д. Сходимость распределений сумм случайных величин. Мн., 1990.
6. Он же // Изв. вузов. Математика. 1989. № 10. С. 87.

Поступила в редакцию 24.12.03.

Андрей Григорьевич Федосенко - аспирант кафедры теории вероятностей и математической статистики. Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Г.А. Медведев.