УДК 535.42:621.372

В.М. СЕРДЮК

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

The simple method of the solution of a diffraction problem of an arbitrary electromagnetic beam on ideal conducting infinitely thin half plane with the help of the generalized functions is proposed. The given solution is received as spectral integrals over propagation parameters of various plane wave components of a falling field and more convenient for computation, than usual recording of the similar solution through angular variables.

Задача дифракции электромагнитного поля на бесконечно тонкой идеально проводящей полуплоскости относится к числу эталонных задач теории дифракции, поскольку в ней рассматривается один из простейших составных модельных элементов дифракционных систем, и эта задача допускает строгое решение, представимое в достаточно компактном аналитическом виде. Впервые такое решение для плоской падающей волны было найдено Зоммерфельдом более сотни лет назад [1], а для падающего поля более общего вида решение дифракционной задачи обычно строится путем суммирования отдельных решений для всех его плосковолновых компонент [2]. С тех пор решение Зоммерфельда постоянно используется в качестве наглядного примера строгой модели теории дифракции и служит критерием правильности новых математических моделей, из которых оно выводится как частный случай (см., например, [3]). Однако известные способы получения такого решения (см., например, [4-8]) представляются слишком сложными и громоздкими для неспециалистов и студентов. Это препятствует включению его в программу даже тех специальных университетских курсов, где оно могло бы оказаться полезным и в фактическом, и в методологическом плане. В данной работе предлагается упрощенный метод построения решения указанной задачи с привлечением обобщенных функций. Такие функции давно и успешно используются в квантовой теории поля [9], но в теории дифракции их применению уделяется незаслуженно мало внимания.

В качестве примера обобщенной функции обычно приводят дельта-функцию Дирака $\delta(x)$ [10]. Ее можно представить в виде суммы двух обобщенных функций: $\delta(x)=\delta_+(x)+\delta_-(x)$ [9], которые определяются следующим образом:

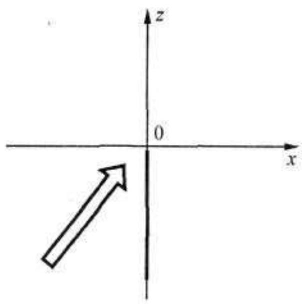
$$\delta_+(x)=-\frac{1}{2\pi i(x+i0)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}e^{ixt}dt;\quad \delta_-(x)=\frac{1}{2\pi i(x-i0)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{ixt}dt, \tag{1}$$

где символом 0 обозначается бесконечно малая положительная величина, причем $\delta_-(x)=\delta_+(-x)$. На комплексной плоскости x каждая из этих функций имеет только одну особую точку (простой полюс), расположенную на бесконечно малом смещении вниз (вверх) от начала координат. Применение данных функций позволяет формализовать многие приемы решения граничных задач и упрощает различные операции с фурье-преобразованиями. Например, пусть $F(\beta)$ - фурье-образ некоторой функции $f(x)$, заданной для вещественного аргумента x, причем $F(\beta)$ интегрируема на всей вещественной оси β. Тогда интегралы

$$\{F(\beta)\}^-=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\delta_+(\eta-\beta)d\eta;\quad \{F(\beta)\}^+=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(\eta)\delta_-(\eta-\beta)d\eta \tag{2}$$

есть два слагаемых, на которые разлагается функция $F(\beta)$, причем каждое из них - это функция, аналитичная в нижней (верхней) полуплоскости комплексного переменного β, и при $|\beta|\to\infty$ она стремится к нулю, как $|\beta|^{-1}$. Интегралы (2) представляют собой фурье-образы функций, получаемых из функции $f(x)$ обнулением той ее части, которая определена на положительной (отрицательной) полуоси аргумента x. Эти утверждения аналогичны теоремам, приведенным в [8, 11], и легко проверяются прямой подстановкой (1) в (2), а также вычислением фурье-прообразов получающихся выражений.

Перейдем к рассмотрению дифракционной задачи. Пусть на идеально проводящую полуплоскость $x=0$, $z\leq 0$ падает поле в виде пучка электромагнитных волн, частным случаем которого может быть единичная плоская волна (рисунок). Требуется определить суммарное стационарное поле, которое устанавливается в результате дифракции заданного пучка на полуплоскости. Поэтому предполагается, что поле монохроматическое и его зависимость от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$, который будет опускаться. Заметим, что плоскость $x=0$, содержащая проводник, разделяет все пространство распространения поля на две области: $x\le 0$ и $x\ge 0$. При решении поставленной задачи будем строить дифракционные поля в этих областях независимо друг от друга, а затем сшивать их на данной плоскости с помощью граничных условий. Последние включают условие равенства нулю тангенциальных компонент вектора электрического поля на поверхности проводника, а также условия непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного векторов в точках, где его нет:



Дифракция плоской волны на полуплоскости

$$E_{y,z}(0,z)=0 \quad (z\le 0),$$

$$\left.\begin{aligned} E_{y,z}(+0,z)&=E_{y,z}(-0,z)\\ H_{y,z}(+0,z)&=H_{y,z}(-0,z)\end{aligned}\right\}\ (z>0). \tag{3}$$

Помимо этого, следует потребовать, чтобы дифракционное поле оставалось ограниченным по величине на бесконечно большом удалении от края полуплоскости.

Произвольно поляризованное падающее поле можно разложить на две линейные поляризации (H и E), для первой из которых электрический вектор направлен перпендикулярно плоскости распространения xOz (т. е. в направлении оси y), а для второй - параллельно данной плоскости. Это дает возможность описать поле каждой поляризации всего одной скалярной функцией координат $U(x, z)$ [4-8]. Пространственные компоненты электрического и магнитного векторов H-поляризации можно выразить через эту функцию следующим образом:

$$E_y=U;\ H_x=(i/k)(\partial U/\partial z);\ H_z=-(i/k)(\partial U/\partial x), \tag{4 а}$$

($k=\omega/c$ - волновое число), а для E-поляризации

$$E_x=-(i/k)(\partial U/\partial z);\ E_z=(i/k)(\partial U/\partial x);\ H_y=U, \tag{4 б}$$

причем все остальные компоненты равны нулю. Разумеется, функции U у разных поляризаций различны; одинаковое обозначение для них используется ради единообразия последующих записей. Представления (4) будут удовлетворять уравнениям Максвелла, если данные функции удовлетворяют скалярному уравнению Гельмгольца [4-8]. Граничные условия для полевых функций U получаются после подстановки представлений (4) в граничные условия (3). Отсюда в случае H-поляризации получаем:

$$(U)_{x=\pm 0}=0 \qquad (z\le 0), \tag{5 а}$$

$$(U)_{x=+0}=(U)_{x=-0} \qquad (z>0), \tag{6 а}$$

$$(\partial U/\partial x)_{x=+0}=(\partial U/\partial x)_{x=-0} \quad (z>0), \tag{7 а}$$

а в случае E-поляризации будем иметь:

$$(\partial U/\partial x)_{x=\pm 0}=0 \qquad (z\le 0), \tag{5 б}$$

$$(\partial U/\partial x)_{x=+0}=(\partial U/\partial x)_{x=-0} \quad (z>0), \tag{6 б}$$

$$(U)_{x=+0}=(U)_{x=-0} \qquad (z>0). \tag{7 б}$$

Полевую функцию в каждой из двух выделенных областей пространства одновременно для обеих поляризаций представим следующим образом:

$$U=\pm k^m\left(\int_{-\infty}^{+\infty}P(\beta)\alpha^{-m}e^{i(\alpha x+\beta z)}d\beta\mp\int_{-\infty}^{+\infty}P(\beta)\alpha^{-m}e^{i(-\alpha x+\beta z)}d\beta\pm\right.$$
$$\left.\pm\int_{-\infty}^{+\infty}Q(\beta)\alpha^{-m}e^{i(-\alpha x+\beta z)}d\beta\right)\ (x\le 0), \tag{8}$$

$$U = \pm k^m \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(\beta)\alpha^{-m} e^{i(\alpha x+\beta z)} d\beta \; (x \geq 0), \tag{9}$$

где

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \beta^2}, \tag{10}$$

$m=(1 \mp 1)/2$. Здесь верхние знаки берутся для H-поляризации, а нижние - для E-поляризации, $P(\beta)$ и $Q(\beta)$ - фурье-образы падающего и дифракционного полей в плоскости $x=0$, так что первые два слагаемых в правой части (8) описывают падающее и отраженное от металла поле, а третье слагаемое - поле дифракции. Чтобы это поле оставалось ограниченным на бесконечности x, необходимо выбирать ветвь корня (10) с неотрицательной мнимой частью: $\mathrm{Im}\alpha \geq 0$. Введение подобного ограничения соответствует появлению на комплексной плоскости β двух разрезов [8]. Для вещественных k они описываются уравнением $\beta = \pm(k-0-t)^{1/2}$, где t меняется от 0 до $+\infty$, а для комплексных k эти разрезы представляют собой части гипербол $\mathrm{Re}\beta\mathrm{Im}\beta = \mathrm{Re}k\mathrm{Im}k$, лежащие внутри интервала $-\mathrm{Re}k \leq \mathrm{Re}\beta \leq \mathrm{Re}k$. Если функцию α (10) представить в виде произведения $\alpha=\alpha_+\alpha_-$, где $\alpha_+=(k+i0+\beta)^{1/2}$ и $\alpha_-=(k+i0-\beta)^{1/2}$, то каждая из функций α_+ или α_- будет отвечать только одному такому разрезу, проведенному в нижней (верхней) полуплоскости β, а на вещественной оси и в верхней (нижней) полуплоскости она оказывается аналитической и не имеет там нулей [6, 8].

Нетрудно заметить, что условие неотрицательности мнимой части α может приводить к неограниченному возрастанию поля падающего пучка (8) при $x \to -\infty$. Однако это обстоятельство не противоречит физическому смыслу задачи, поскольку данное поле будет возрастать в сторону его источников.

Выбранные представления (8) и (9) для полевой функции U слева и справа от плоскости $x=0$ обеспечивают автоматическое выполнение граничных условий (6). Остается удовлетворить граничным условиям (5) и (7), которые после подстановки в них представлений (8), (9) дают систему дуальных интегральных уравнений [4-8]:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{\pm 1}[Q(\beta) - P(\beta)] e^{i\beta z} d\beta = 0 \;\; (z > 0); \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(\beta) e^{i\beta z} d\beta = 0 \;\; (z \leq 0).$$

Умножим эти уравнения на $\exp(-i\bar{\beta}z)$ с некоторым $\bar{\beta}$ и проинтегрируем по всем z, при которых справедливо каждое уравнение. Согласно определению (1) получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{\pm 1}[Q(\beta) - P(\beta)]\delta_+(\beta - \bar{\beta}) d\beta = 0; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(\beta)\delta_-(\beta - \bar{\beta}) d\beta = 0. \tag{11}$$

Из второго уравнения (11) немедленно следует, что $Q(\beta)=Q^-(\beta)$, т. е. функция Q аналитична в нижней полуплоскости, а из первого уравнения имеем:

$$\alpha^{\pm 1}[Q(\beta) - P(\beta)] = F^+(\beta),$$

где $F^+(\beta)$ - некоторая функция, аналитичная в верхней полуплоскости, которая ведет себя на бесконечности как $|\beta|^{-1}$. Разделим (умножим) последнее соотношение на α_+ и применим к обеим его частям операцию (2) выделения компоненты, аналитичной в нижней полуплоскости:

$$\left\{ \alpha_-^{\pm 1}[Q(\beta) - P(\beta)] \right\}^- = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha_+^{\mp 1} F^+(\beta)\delta_+(\beta - \bar{\beta}) d\beta. \tag{12}$$

Очевидно, что интеграл в правой части (12) равен нулю, в чем легко убедиться, замыкая его контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса через верхнюю полуплоскость. Тогда $\alpha_-^{\pm 1}Q^-(\beta)=\{\alpha_-^{\pm 1}P(\beta)\}^-$, откуда

$$Q(\beta)=\alpha_-^{\mp 1}\left\{\alpha_-^{\pm 1}P(\beta)\right\}^- = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{k-\bar\beta}{k-\beta}\right)^{\pm 1/2} P(\bar\beta)\delta_-(\beta-\bar\beta)d\bar\beta. \qquad (13)$$

Тем самым найдено решение поставленной задачи для фурье-образа дифракционного поля. Чтобы получить решение для полей в явном виде, надо (13) подставить в (8) и (9):

$$U=\pm k^m\int_{-\infty}^{+\infty}P(\bar\beta)\bar\alpha^{-m}[\exp(i\bar\alpha x+i\bar\beta z)\mp\exp(-i\bar\alpha x+i\bar\beta z)\pm I(\bar\beta,x,z)]d\bar\beta \ \ (x\le 0),$$

$$U=\pm k^m\int_{-\infty}^{+\infty}P(\bar\beta)\bar\alpha^{-m}I(\bar\beta,x,z)d\bar\beta \ \ (x\ge 0), \qquad (14)$$

где $\bar\alpha=\alpha(\bar\beta)=(k^2-\bar\beta^2)^{1/2}$;

$$I^{\pm}(\bar\beta,x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{(k\mp\bar\beta)/(k\mp\beta)}\,\delta_-(\beta-\bar\beta)\exp(i\alpha|x|+i\beta z))d\beta. \qquad (15)$$

Для вычисления этого интегрального выражения рассмотрим сначала вспомогательный интеграл

$$J^{\pm}(a,b,x,z)=\int_a^b(k\mp\beta)^{-1/2}\exp\,(i\alpha|x|+i\beta z)d\beta. \qquad (16)$$

Возьмем две новые переменные интегрирования

$$u(\beta)=2^{-1/2}[\sqrt{(k+\beta)(\rho+z)}+\sqrt{(k-\beta)(\rho-z)}];$$
$$v(\beta)=2^{-1/2}[\sqrt{(k-\beta)(\rho+z)}-\sqrt{(k+\beta)(\rho-z)}], \qquad (17)$$

где $\rho=(x^2+z^2)^{1/2}$. Поскольку $\alpha|x|+\beta z=u^2-k\rho=k\rho-v^2$, то с их помощью интеграл (16) преобразуется к виду:

$$J^{\pm}(a,b,x,z)=\sqrt{2}\rho^{-1}\Big\{\mp\sqrt{\rho\mp z}\;e^{-ik\rho}[\Phi_+(u(b))-\Phi_+(u(a))]-$$
$$-\sqrt{\rho\pm z}\;e^{ik\rho}[\Phi_-(v(b))-\Phi_-(v(a))]\Big\}, \qquad (18)$$

где $\Phi_{\pm}(z)=\int_0^z\exp\,(\pm it^2)dt$ - комплексные интегралы Френеля. В пределе при $a\to-\infty$ и $b\to+\infty$ для вспомогательного интеграла (18) получим:

$$J^{\pm}(-\infty,+\infty,x,z)=\rho^{-1}(1-i)\sqrt{\pi(\rho\pm z)}\;e^{ik\rho}.$$

Теперь преобразуем искомый интеграл (15), записывая его в виде

$$I^{\pm}(\bar\beta,x,z)=\frac{\sqrt{k\mp\bar\beta}}{2\pi i}e^{i\bar\beta z}S^{\pm};\ \ S^{\pm}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\,(i\alpha x+i(\beta-\bar\beta-i0)\,z)}{(\beta-\bar\beta-i0)\ \sqrt{k\mp\beta}}d\beta \qquad (19)$$

и используя метод дифференцирования по параметру z:

$$\partial S^{\pm}/\partial z=i\,\exp(-i\bar\beta z)\,J(-\infty,+\infty,x,z)=i(1-i)\rho^{-1}\sqrt{\pi(\rho\pm z)}\,\exp\,(ik\rho-i\bar\beta z).$$

Тогда $$I^{\pm}(\bar\beta,x,z)=2^{-1}\pi^{-1/2}(1-i)e^{i\bar\beta z}\int_{-\infty}^{z}\rho^{-1}\sqrt{(k\mp\bar\beta)(\rho\pm z)}\,\exp(ik\rho-i\bar\beta z)dz. \qquad (20)$$

Нижний предел интегрирования здесь берется равным $-\infty$, поскольку для этого значения z выражение (19) обращается в нуль благодаря вещественной части показателя подынтегральной экспоненты с малым положительным коэффициентом 0.

Для вычисления интеграла (20) используем переменные интегрирования $u(\overline{\beta})$ и $v(\overline{\beta})$ (17), но теперь в качестве функций z. Для них $\rho^{-1}[(k\mp\overline{\beta})(\rho\pm z)]^{1/2}dz = \;=2^{1/2}(\pm du+dv)$, так что

$$I^{\pm}(\overline{\beta},x,z)=F(-v)\exp(i\overline{\alpha}\,|x|+i\overline{\beta}z)\mp F(u)\exp(-i\overline{\alpha}\,|x|+i\overline{\beta}z), \tag{21}$$

где $F(z)=(2\pi)^{-1/2}(1-i)\int\limits_{z}^{+\infty}\exp(it^2)dt$ - дополнительный интеграл Френеля. После подстановки результата (21) в (14) получаем единую форму записи решения для всех x:

$$U=\pm k^{m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(\overline{\beta})\overline{\alpha}^{-m}D^{\pm}(\overline{\beta},x,z)d\overline{\beta}, \tag{22}$$

где

$$D^{\pm}(\overline{\beta},x,z)=F(q)\exp(i\overline{\alpha}x+i\overline{\beta}z)\mp F(p)\exp(-i\overline{\alpha}x+i\overline{\beta}z);$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{\frac{k+\overline{\beta}}{\rho+z}}+\sqrt{(k-\overline{\beta})(\rho+z)}\right);\quad q=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x\sqrt{\frac{k+\overline{\beta}}{\rho+z}}-\sqrt{(k-\overline{\beta})(\rho+z)}\right).$$

Тем самым определено выражение для y-компоненты электрического (H-поляризация) или магнитного (E-поляризация) полного поля дифракции. Вычисляя производные от него по координатам x и z, согласно (4) найдем другие пространственные компоненты электрического и магнитного полей:

$$\begin{Bmatrix}H_x\\E_x\end{Bmatrix}=-k^{-n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(\overline{\beta})\left\{\overline{\beta}\overline{\alpha}^{-m}D^{\pm}(\overline{\beta},x,z)+\frac{1+i}{2\rho\sqrt{\pi}}[(k-\overline{\beta})(\rho+z)]^{\pm 1/2}x^{m}\right\}d\overline{\beta}; \tag{23}$$

$$\begin{Bmatrix}H_z\\E_z\end{Bmatrix}=k^{-n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P(\overline{\beta})\left\{\overline{\alpha}^{n}D^{\pm}(\overline{\beta},x,z)+\frac{1+i}{2\rho\sqrt{\pi}}[(k-\overline{\beta})/(\rho+z)]^{\pm 1/2}x^{n}\right\}d\overline{\beta},$$

где $n=(1\pm1)/2=1-m$. Для непосредственного вычисления всех этих компонент остается конкретизировать вид спектральной функции падающего пучка $P(\overline{\beta})$ и вычислить интегралы (22), (23).

Если ограничить спектр данного пучка единственной плоской волной, т. е. положить $P(\overline{\beta})=\delta(\overline{\beta}-\beta_0)$, где β_0 - параметр распространения волны по оси z, то все интегралы (22), (23) сведутся к своим подынтегральным выражениям при $\overline{\beta}=\beta_0$. Тем самым наше решение перейдет в известное решение Зоммерфельда [1, 4-8]. Последнее обычно выражают через угловые переменные θ и φ которые связаны со спектральными и координатными переменными посредством соотношений: $\alpha_0=\alpha(\beta_0)=(k^2-\beta_0^2)^{1/2}=k\sin\theta$; $\beta_0=k\cos\theta$; $x=\rho\sin\varphi$; $z=\rho\cos\varphi$. Эти переменные используются с самого начала стандартной процедуры вывода зоммерфельдовского решения, что при вычислении интегралов типа (16), (20) требует выхода на комплексную плоскость угловых аргументов и нетривиальных преобразований контуров интегрирования [4-8]. Однако представленная здесь процедура использует интегрирование только по вещественной оси параметров распространения волн. Запись дифракционного решения в форме (22), (23) непосредственно применима к случаям комплексных значений волнового числа k и параметров распространения волн падающего поля, что соответствует присутствию поглощения или усиления в среде, т. е. дифракции затухающих волновых пучков. Кроме того, такая запись оказывается более удобной при численных расчетах спектральных интегралов (22), (23) в случаях, когда падающий пучок обладает сложной пространственной структурой.

1. Sommerfeld A. //Math. Ann. 1896. B. 47. S. 317.
2. Хестанов Р.Х. // Радиотехника и электроника. 1970. Т. 15. № 2. С. 289.
3. Весник М.В. // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 1. С. 66.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М, 1973.
5. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М, 1964.
6. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации. М, 1966. С. 393.
7. Литвиненко Л.Н., Просвирнин С.Л. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах. Киев, 1984.
8. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.
9. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1973.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М, 1976.
11. Свешников А.Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М, 1974.

Поступила в редакцию 25.10.2004.

Владимир Михайлович Сердюк - кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории радиоголографии НИИПФП им. А.Н. Севченко БГУ.