Математика и информатика

УДК 517.946

В.И. КОРЗЮК, Е.С. ЧЕБ

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ*

The correct mixed problems with homogeneous conditions are considered for a biwave linear differential equation. The existence and uniqueness of the strong solution for the considered problems are proved by the methods of energy inequalities and mollifying operators with variable steps.

В [1] для биволнового уравнения в цилиндрической области рассмотрена смешанная задача с однородными на боковой поверхности граничными условиями

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где $\partial/\partial\nu$ - производная по нормали ν в точках Г.

В настоящей работе для названного дифференциального уравнения рассматриваются также в цилиндрической области другие смешанные задачи, корректные по Адамару [2]. Доказывается существование и единственность сильных решений смешанных задач. Доказательство основано на выводе энергетических неравенств и плотности множества значений для операторов в подходящих функциональных пространствах.

1. Постановка задачи. Рассмотрим относительно функции $u(t, x)$ в цилиндрической области $Q=(0, T)\times\Omega$ переменных $(t, x)=(t, x_1, \ldots, x_n)$ линейное гиперболическое уравнение с биволновым оператором в главной части

$$\Im u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)u + A_3 u = f(t,x), \tag{2}$$

где постоянные $a^2 \neq b^2$, $t\in(0, T)$, $x\in\Omega\subset\Re^n$, Δ - оператор Лапласа,

$$A_3 = \sum_{|\alpha|\leq 3} a_\alpha(t,x)D^\alpha, \tag{3}$$

$\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс, $\alpha_i (i=0, 1, \ldots, n)$ - целые неотрицательные числа $|\alpha|=\alpha_0+\alpha_1+ \ldots +\alpha_n$, $D^\alpha u=\partial^{|\alpha|}u/\partial t^{\alpha_0}\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}$, $f(t, x)$ - заданная в Q функция.

Граница ∂Q области Q состоит из нижнего основания $\Omega_0=\{(t, x)\in \partial Q: t=0\}$, верхнего основания $\Omega_T=\{(t, x)\in\partial Q: t=T\}$ и боковой поверхности $\Gamma=\{(t, x)\in \partial Q: 0<t<T, x\in\partial\Omega\}$, которая является кусочно-гладкой. Область Q представляет собой достаточно простую геометрическую структуру, для которой справедли-

* Авторы статьи - сотрудники кафедры математической физики.

ва формула Остроградского. На нижнем основаниив Ω_0 задаются четыре начальных условия

$$l_k u = \left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{4}$$

В [1] рассмотрена задача и доказана корректность ее постановки отыскания решения уравнения (2) при начальных (4) и граничных условиях (1). Вместо (1) на боковой поверхности Г можно задать другие условия, при которых рассматриваемые задачи являются корректно поставленными по Адамару. Такими условиями могут быть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau^k}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u\right)\right|_\Gamma = 0, \tag{7}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) u\right|_\Gamma = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\Delta u\right|_\Gamma = 0, \tag{8}$$

$$\left.\left((c^2 - a^2 - b^2)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\Delta u\right|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u\right)\right|_\Gamma = 0, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau^k}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u\right)\right|_\Gamma = 0,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{11}$$

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u\right) - \frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right|_\Gamma = 0, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \tau^k}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u\right) - \frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right|_\Gamma = 0,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \tag{13}$$

$$\Delta u|_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_\Gamma = 0, \tag{14}$$

где $\nu=(\nu_0,\ \nu_1,\ \dots,\ \nu_n)$ - единичный вектор внешней нормали к гиперповерхности Г, $\tau^k=(\tau_0^k,\ \tau_1^k,\ \dots,\ \tau_n^k)$, $(k=1,\ \dots,\ n)$ - линейно независимые касательные векторы к гиперповерхности Г, $b^2<a^2<c^2$.

2. Энергетические неравенства. С учетом граничных условий (5) - (14) мы для изучения фактически имеем десять смешанных задач, которые запишем в операторном виде

$$L_{(k)} u = F,\ k = 5,\ \dots\ 14. \tag{15}$$

Здесь операторы $L_{(k)}$ определяются по правилу $Lu=\{\Im u,\ lu\}$, где $\Im$ - оператор уравнения (2), l - оператор начальных условий, $l=(l_0,\ l_1,\ l_2,\ l_3)$, $F=(f,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$ Область определения $D(L_{(k)})$ оператора $L_{(k)}$ своя для каждой рассматриваемой задачи.

Так, множество $D(L_{(5)})$ в случае задачи (2), (4), (5) будем определять как подмножество $C^4(\overline{Q})$, функции которого удовлетворяют условиям (5), где

$C^4(\overline{Q})$ - множество непрерывно дифференцируемых до четвертого порядка включительно функций, заданных $\overline{Q}$, $\overline{Q}$ - замыкание области Q. Аналогично задаются области определения $D(L_{(k)})$ операторов $L_{(k)}$ задач (2), (4), (6) - (2), (4), (14), где функции $C_4(\overline{Q})$ удовлетворяют граничным условиям (6) - (14).

Обозначим через $B_{(k)}$, $k=5$, ..., 14, банаховы пространства, получаемые замыканием множества $D(L_{(k)})$ по норме

$$\|u\|_B = \sup_{0\le\tau\le T}\left(\sum_{s=0}^{3}\left\|\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right\|_{L_2(\Omega_\tau)} + \left(\sum_{s=0}^{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega_\tau)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\right\|_{L_2(\Omega_\tau)} + \|\Delta u\|_{L_2(\Omega_\tau)}\right)(\tau), \quad (16)$$

где Ω_τ - сечение Q плоскостью $\{(t,\ x): t=\tau,\ x\in\Re^n\}$. Гильбертовы пространства правых частей уравнений (15) обозначим через $H_{(k)}$ и

$$H^{(k)} = L_2(\Omega)\times H_0^{(k)}(\Omega_0)\times H_1^{(k)}(\Omega_0)\times H_2^{(k)}(\Omega_0)\times H_3^{(k)}(\Omega_0),$$

где $H_s^{(k)}(\Omega_0)$ (s=0, 1, 2, 3; k=5, …, 14) определяются следующим образом. Обозначим через $C_{\text{гр}}^{3(k)}(\Omega_0)$ множество непрерывно дифференцируемых до третьего порядка функций, заданных на Ω_0 и удовлетворяющих соответствующим условиям *(k)*, k=5, …, 14, на границе $\partial\Omega_0$ области Ω_0. Гильбертово пространство $H_0^{(k)}(\Omega_0)$ — замыкание множества $C_{\text{гр}}^{3(k)}(\Omega_0)$ по норме

$$\|\cdot\|_{H_0(\Omega_0)} = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_0)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\right\|_{L_2(\Omega_0)} + \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta\cdot\right\|_{L_2(\Omega_0)} + \|\Delta\cdot\|_{L_2(\Omega_0)}.$$

Аналогично $H_1^{(k)}(\Omega_0)$ - замыкание $C_{\text{гр}}^{3(k)}(\Omega_0)$ по норме $\|\cdot\|_{H_1(\Omega_0)} = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_0)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\right\|_{L_2(\Omega_0)} + \|\Delta\cdot\|_{L_2(\Omega_0)}$, а $H_2^{(k)}(\Omega_0)$ - замыкание $C_{\text{гр}}^{3(k)}(\Omega_0)$ по норме $\|\cdot\|_{H_2(\Omega_0)} = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_0)} + \sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\right\|_{L_2(\Omega_0)}$, где $H_3^{(k)}(\Omega_0)=L_2(\Omega_0)$.

Сначала рассмотрим задачи (2), (4), (5) - (2), (4), (14) в случае, когда оператор A_3 в уравнении (2) имеет следующий вид:

$$A_3u = \sum_{s=0}^{3}a_{s0}(t,x)\frac{\partial^s u}{\partial t^s} + \sum_{s=0}^{3}\sum_{i=1}^{n}a_{si}(t,x)\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n}a_{0i2}(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u + a_{002}(t,x)\Delta u. \quad (17)$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты оператора A_3 суммируемы и ограничены и A_3 - дифференциальное выражение* (17). *Тогда существует константа $c>0$, не зависящая от u, для которой справедливо энергетическое неравенство*

$$\|u\|_{B(k)} \le c\left\|L^{(k)}u\right\|_{H^{(k)}}, \quad k=5,\ \ldots,\ 14, \quad (18)$$

для любого $u\in D(L^{(k)})$

Доказательство. В качестве разделяющего оператора берем $M = 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\Delta\right)$, где $b_2<c_2<a_2$. Произведение $\Im u\, Mu$ преобразуем следующим образом:

$$\Im u\ Mu = \frac{\partial}{\partial t}\big(Fu(t,\ x)\big) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(G_i(t,\ x)\big), \quad (19)$$

где

$$Fu(t,x) = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2 + (a^2+b^2-c^2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x_i}\right)^2 + \left(c^2(a^2+b^2) - a^2b^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right)^2 +$$

$$+a^2b^2c^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\right)^2-2c^2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right)-2a^2b^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x_i}\right),$$

$$G_i u(t,\ x)=2(c^2-a^2-b^2)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x_i}+2a^2b^2\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+$$

$$+2a^2b^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x_i}\frac{\partial}{\partial t}\Delta u-2a^2b^2c^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u.$$

Проинтегрируем (19) по области $Q^\tau=\{(t,\ x)\in Q{:}0\le t\le\tau\le T\}$ с учетом граничных условий (k), соответствующих рассматриваемому оператору $L_{(k)}$, k=5, …, 14. В силу этих условий

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma}G_i(t,\ x)\nu_i ds=0. \tag{20}$$

Так как вектор внешней нормали ν на Г перпендикулярен оси t, а на $\Omega_\tau\cup\Omega_0$ - координатным осям x_i(i=1, …, n) и в силу (20), в результате интегрирования (19) по области Q^τ имеем равенство

$$\int_{\Omega_\tau\cup\Omega_0}Fu(t,\ x)dx=\int_{Q^\tau}\Im u\ Mu\ dt\ dx-\int_{Q^\tau}A_3 u\ Mu\ dt\ dx. \tag{21}$$

Оцениваем $\int_{\Omega_\tau}Fu(\tau,x)\ dx$ снизу, а $\int_{\Omega_0}Fu(\tau,\ x)\ dx$ сверху, рассматривая $Fu(\tau,\ x)$ как квадратичную форму относительно $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3},\ \frac{\partial}{\partial t}\Delta u,\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u.$ Матрицу $[F]$ квадратичной формы можно записать в виде

$$[F]=\begin{pmatrix}A & 0 & \vdots & 0\\ 0 & B_1 & \vdots & 0\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ 0 & 0 & \vdots & B_n\end{pmatrix}, \tag{22}$$

где $A=\begin{pmatrix}1 & -c^2\\ -c^2 & c^2(a^2+b^2)-a^2b^2\end{pmatrix},\quad B_i=\begin{pmatrix}a^2+b^2-c^2 & -a^2b^2\\ -a^2b^2 & a^2b^2c^2\end{pmatrix}$, i=1, …, n. Если $b_2<c_2<a_2$, то можно говорить, что все главные миноры матрицы (22) положительны. Поэтому

$$\int_{\Omega_\tau}Fu(\tau,\ x)dx\ge c_1\left(\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x_i}\right\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\right\|^2_{L_2(\Omega_\tau)}\right)(\tau),\ c_1>0. \tag{23}$$

Оценивая сверху, получим

$$\int_{\Omega_\tau}Fu(0,\ x)\quad dx\le c_2\sum_{k=0}^{3}\|l_k u\|^2_{H_k(\Omega_0)},\ c_2>0. \tag{24}$$

Аналогично

$$\left|(\Im u,\ Mu)_{L_2(Q^\tau)}\right|+\left|(A_3 u,\ Mu)_{L_2(Q^\tau)}\right|\le c_3\left(\|\Im u\|^2_{L_2(Q^\tau)}+\sum_{s=0}^{3}\left\|\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right\|^2_{L_2(Q^\tau)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial x_i}\right\|^2_{L_2(Q^\tau)}+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\right\|^2_{L_2(Q^\tau)}+\|\Delta u\|^2_{L_2(Q^\tau)}\right). \tag{25}$$

Из равенства (21) в силу оценок (23) - (25) следует неравенство для константы $c4>0$

$$\left(\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}+\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}\right)(\tau)\leq$$

$$\leq c_4\left\|L^{(k)}u\right\|_{H^{(k)}}+c_4\int_0^\tau\left(\sum_{s=0}^{3}\left\|\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}+\sum_{s=0}^{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial x_i}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta u\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}+\left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right)dt. \qquad (26)$$

Чтобы применить неравенство Гронуолла по отношению к неравенству (26) и слева получить выражение нормы пространства $B_{(k)}$ в (26), введем слагаемые $\sum_{s=0}^{2}\left\|\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}$, $\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}$, $\left\|\Delta u\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}$. Для этого равенства $\sum_{s=0}^{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^s u}{\partial t^s}\right)^2=$ $=2\sum_{s=0}^{2}\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^{s+1}}\cdot\frac{\partial^s u}{\partial t^s}$, $\quad\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u)^2=2\frac{\partial}{\partial t}\Delta u\cdot\Delta u$, $\quad\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial x_i}\right)^2=$ $=2\sum_{s=0}^{1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{s+2}u}{\partial t^{s+1}\partial x_i}\cdot\frac{\partial^{s+1}u}{\partial t^s\partial x_i}$ достаточно проинтегрировать по области Q^τ и к правым частям применить неравенство Коши - Буняковского; результаты сложить друг с другом и неравенством (26). После применения неравенства Гронуолла к результату получим соотношение, из которого легко следует доказываемое неравенство (18) для каждого $k=5, \dots, 14$.

3. Сильные решения. Изучаемую задачу (2), (4), *(k)* ($k=5, \dots, 14$) рассматриваем как операторные уравнения (15) из банахова пространства $B_{(k)}$ в гильбертово пространство $H_{(k)}$ с областями определения $D(L_{(k)})$ операторов $L_{(k)}$.

Решения операторных уравнений

$$\overline{L^{(k)}u}=F$$

называются *сильными решениями* задач (2), (4), *(k)*, где $\overline{L^{(k)}u}$ - замыкания операторов $L_{(k)}$ из пространств $B_{(k)}$ в пространства $H_{(k)}$.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *для любых* $F\in H_{(k)}$ *существуют и единственны сильные решения задач* (2), (4), (*k*) *для каждого* $k=5, \dots, 14$ *и справедливы неравенства*

$$\|u\|_{B^{(k)}}\leq c\|F\|_{H^{(k)}}, \qquad (27)$$

где $c>0$ из неравенства (18).

Доказательство, как известно, сводится к доказательству плотности множества значений $R(L_{(k)})$ оператора $L_{(k)}$ в пространствах $H_{(k)}$, $k=5,\dots, 14$ [4, 5].

Сопряженные условия на Г по отношению к граничным условиям *(к)* для всех $k=5, \dots, 14$ содержат условия вида $v|_\Gamma=0$, $\left.\frac{\partial^2 v}{\partial \nu^2}\right|_\Gamma=0$ или $\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma=\left.\frac{\partial^3 v}{\partial \nu^3}\right|_\Gamma=0$.

Поэтому операторы $L_{(k)}$ можно рассматривать как композицию двух операторов (см. [5]), для которых отдельно доказывается плотность множества значений [1].

4. Другие сильные решения задач (2), (4), (5) и (2), (4), (6). Эти задачи как операторные уравнения можно рассматривать в других пространствах. Обозначим через $\overline{\mathrm{B}}^{(k)}$, $k=5, 6$, банаховы пространства, получаемые по норме

$$\|u\|_{\overline{B}^{(k)}}=\sup_{0\leq\tau\leq T}\sum_{|\alpha|\leq 3}\left\|D^\alpha u\right\|_{L_2(\Omega_\tau)}(\tau). \qquad (28)$$

Через $\overline{H}^{(k)}$ обозначим гильбертово пространство

$$\overline{H}^{(k)} = L_2(Q)\times\overline{H}_0^{(k)}(\Omega_0)\times\overline{H}_1^{(k)}(\Omega_0)\times H_2^{(k)}(\Omega_0)\times H_3(\Omega_0).$$

Здесь $\overline{H}_0^{(k)}(\Omega_0)$, $\overline{H}_0^{(k)}(\Omega_0)$ - замыкания множеств $C^3_{\text{гр}}(\overline{\Omega}_0)$ по соответствующим нормам $\|\cdot\|_{\overline{H}_0^{(k)}(\Omega_0)} = \sum_{|\alpha'|\le 3}\|D^{\alpha'}\cdot\|_{L_2(\Omega_0)}$, $\|\cdot\|_{\overline{H}_1^{(k)}(\Omega_0)} = \sum_{|\alpha'|\le 2}\|D^{\alpha'}\cdot\|_{L_2(\Omega_0)}$,

где $\alpha'=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Задачи (2), (4), (5) и (2), (4), (6) как операторные уравнения рассматриваем из банаховых пространств $\overline{B}^{(k)}$ в гильбертовы пространства $\overline{H}^{(k)}$, k=5, 6, в случае общего вида (3) дифференциального выражения A_3u.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты оператора* A_3 $a_\alpha(t, x)$ *ограниченны и суммируемы. Тогда существует константа* c>0, *не зависящая от и, для которой справедливо неравенство*

$$\|u\|_{\overline{B}^{(k)}} \le c\|L^{(k)}u\|_{\overline{H}^{(k)}},\ k=5,\ 6, \tag{29}$$

для любой функции $u\in D(L^{(k)})$.

Теорема 3 доказывается по схеме доказательства теоремы 1 (см. также доказательство теоремы 1 в [1]), где в качестве разделяющего оператора берется $M = 2\partial/\partial t\left(\partial^2/\partial t^2 - c^2\Delta\right)$, $b_2<c_2<a_2$. Доказывается, что операторы $L_{(k)}$ из $\overline{B}^{(k)}$ в $\overline{H}^{(k)}$ допускают замыкания $\overline{L^{(k)}}$. Решения уравнений

$$\overline{L^{(k)}}u = F,\ k=5,\ 6, \tag{30}$$

называем также *сильным решением* задач (2), (4), (5) при k=5 и (2), (4), (6) при k=6.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 3 *для любых* $F\in\overline{H}^{(k)}$ *существуют и единственны сильные решения* $u\in\overline{B}^{(k)}$ (*решения уравнений* (30)) *задач* (2) - (4), (k) *для каждого* k=5, 6 *и справедливы неравенства*

$$\|u\|_{\overline{B}^{(k)}} \le c\|F\|_{\overline{H}^{(k)}},$$

где положительная константа с из неравенства (29).

Теорема доказывается с помощью операторов осреднения переменного шага [6, 7].

1. Корзюк В.И., Чеб Е.С. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 2. С. 9.
2. Петровский И.Г. Математический сборник. 1937. Т. 2(44). С. 815.
3. Дезин А.А. // Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
4. Корзюк В.И. // Вести. Белорус, ун-та. Сер. 1. 1996. № 3. С. 55.
5. Радыно Я.В., Юрчук Н.И.// Дифференц. уравнения. 1992. Т. 6. № 2. С. 343.
6. Корзюк В.И. // Вестн. Белорус, ун-та. Сер. 1. 1996. №2. С. 49; № 3. С. 63.
7. Burenkov V.I. Sobolev Spaces jf Domains. Stuttgart; Leipzig, 1998.

Поступила в редакцию 17.12.2003.

Виктор Иванович Корзюк - член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой.

Елена Сергеевна Чеб - кандидат физико-математических наук, доцент.