Лекция 3 (лектор В.А.Еровенко)

МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ: МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ПРИНЦИПАМАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Обращаясь к философским основаниям математического знания, мы неизменно убеждаемся в справедливости сентенции классика немецкой философии Иммануила Канта, преподававшего математику и философию в Кёнигсбергском университете, о том, что обыденному рассудку «привычнее нисходить к следствиям, чем восходить к основаниям». Если говорить об арифметических основаниях математики, то следует заметить, что возможность внешней проверки справедливости утверждений теоретической арифметики долгое время лишало ее внутреннего стимула для перехода на аксиоматическую точку зрения с целью строго математического обоснования арифметических рассуждений. Поэтому неудивительно, что арифметика, в отличие от геометрии, так и не стала первой дедуктивной математической дисциплиной. Как известно, наиболее распространенная в математической литературе система аксиом для натурального ряда чисел была предложена итальянским математиком Джузеппе Пеано в конце XIX века, между тем как система аксиом геометрии Евклида известна со времен древних греков, то есть с тех времен, когда знания о конкретных предметах начинались именно в сфере философии.

Хотя философ не обязан выискивать в своей науке практически полезных концепций для математического знания, он может и обязан указывать на совокупность плодотворных научных идей, у истоков которых трудились философы. Заметим, что греческое слово arithmos означало число, и вплоть до XVII века арифметикой называлась теория чисел, которая общепризнанно считается одной из наиболее сложных современных математических дисциплин. Философам науки элементарная арифметика интересна, прежде всего, тем, что методологическая общность и естественная простота этого философско-математического знания делают его практически доступным любому человеку. Но, как заметил философ математики В.Я. Перминов: «*В рамках философии нет теорий и выводов, которые считались бы обязательными для любого философа, подобно тому как арифметика обязательна для любого математика, а Ньютонова механика – для любого физика*». Поэтому, вовсе не случайно, курс математики для философов начинается с философско-методологического анализа аксиом арифметики. Большинство философствующих математиков считает, что сердцевиной всех теорий чисел является арифметика Пеано. Она еще является и прекрасным «математическим полигоном» для развития философского мышления, а именно, позволяет внести ясность в систему арифметических утверждений, которой у большинства студентов не было на общеобразовательном уровне «школьной математики».

Философский комментарий. Говоря об аксиоматике, следует помнить о двух крайностях: об аксиоматике, как «синтаксической конструкции», смысл которой придается извне, и об аксиоматике, как «семантической конструкции», изначально обладающей смысловой интерпретацией, смысл которой привносит человек. Под интерпретацией при этом понимается видение математической модели в конкретной ситуации или ее применение к конкретной задаче. В реальности любая аксиоматика представляет, по мнению высокопрофессионального математика, пишущего под псевдонимом В. Босс, «смесь ингредиентов», маскирующих различие между формальными и неформальными интерпретациями. По существу, это актуальная философская проблема обоснования существования таких моделей, потому что «болезнь так хорошо в них вплетена, что неотличима от здоровой ткани». Сложность ее решения заключается в том, что любая аксиоматика сама по себе не обладает априорной пропорцией синтаксиса и семантики.

Методологический комментарий. Методологические проблемы математики базируются на взаимосвязи математики и философии, точнее на соотношении математических абстракций, или математических идеализаций, и реальным миром, с точки зрения их объективного содержания. Боязнь того, что новые варианты математических теорий чисел изменят хорошо известные и привычные факты, отражает непонимание взаимоотношений математики с действительностью. Как утверждает американский физик Даглас Хофштадтер, изучающий творческие возможности человеческого мышления: «*Математика дает нам ответы на вопросы о реальном мире только после того, как мы выбрали, какой тип математики мы используем в данный момент*». Например, математики не используют теорию натуральных чисел, чтобы описывать облака, поскольку понятие «единицы» не годится для «облачного исчисления». Они создают математические теории для описания действительности, а не наоборот, в отличие от физиков-теоретиков, которые используют «воображаемую ситуацию» для того, чтобы узнать глубоко спрятанные аспекты реальности.

Особую роль в аксиоматике Пеано играет пятая аксиома – «аксиома индукции», или «аксиома математической индукции». Эта аксиома постулирует применимость одного из важнейших математических принципов или методов доказательства. Напомним ее формулировку:

(А5) *Любое подмножество* M *из множества* **N**, *содержащее единицу, то есть* $1 \in M$, *и вместе с каждым* $n \in M$, *содержащее следующий за* n, *то есть* $n' \in M$, *совпадает с множеством* **N**.

Напомним, что, с точки зрения философов, методологией математики является учение о методах математического познания, о формально-теоретических средствах математического исследования и о методах практического постижения математической истины. Роль пятой аксиомы Пеано в математических доказательствах, «*расширяющих методологические горизонты*» можно прояснить для философов следующим образом. Пусть имеется бесконечная упорядоченная последовательность высказываний, пронумерованных натуральными числами:

$$A(1),\ A(2),\ \ldots,\ A(n),\ A(n+1),\ \ldots$$

Допустим, что нам каким-то образом удалось установить верность высказывания A(1) – это «б а з а и н д у к ц и и», или «базис индукции», и удалось также доказать, что если верно высказывание A(n), для произвольного $n > 1$, то верно и высказывание A($n + 1$) – это «ш а г и н д у к ц и и», или «индукционный шаг». Тогда верны все высказывания бесконечной последовательности A(1), A(2), A(3), … При всей наглядности и убедительности сказанного, мы имеем дело с новым математическим методом, который принято называть «*принципом математической индукции*», хотя для него более уместен рабочий термин «наследственного» доказательства. Дадим теперь его строгую математическую формулировку.

Принцип математической индукции. *Если утверждение* A(n), *в котором* n *– натуральное число, истинно для* $n = 1$ *и из того, что оно истинно для* $n = k$ *следует, что оно истинно и для следующего числа* $n = k + 1$, k *– любое натуральное число, то утверждение* A(n) *истинно для любого натурального числа* n.

На этом принципе основан метод доказательства называемый «*методом математической индукции*». Выдающийся французский математик и философ Анри Пуанкаре, который считал, что не все в математике сводится только к правилам совершенной логики, в работе «Математика и логика» писал: «*Я видел в этом принципе квинтэссенцию математического рассуждения. Я не хотел этим сказать как это думали, будто все математические рассуждения могут быть сведены к применению этого принципа*» [3, с.5]. Заметим, что в категории методологических принципов, представляющих такие же существенные признаки, принцип математической индукции является простейшим.

Методический комментарий. Методическая особенность изложения метода математической индукции состоит в том, что при формулировке предложения индукции используют новую букву k, когда в индуктивном шаге пишут: «Если утверждение верно для любого $n = k$, то оно верно и для $n = k + 1$». Словесная формулировка, приведенного выше принципа математической индукции, с помощью кванторов общности записывается так:

$$\left.\begin{array}{r} A(1) \\ \forall\ k\ \ (A(k) \Rightarrow A(k+1)) \end{array}\right\} \Rightarrow\ \forall\ n\ \ A(n)$$

Иногда пользуются другой формулировкой, не смущающей математиков, когда вместо записи $\forall\ k\ \ (A(k) \Rightarrow A(k+1))$ они предпочитают классическую символическую запись $\forall\ n\ \ (A(n) \Rightarrow A(n+1))$, поскольку эти записи равносильны, так как переменные под квантором общности «связаны». Методическую целесообразность введения буквы k можно аргументировать тем, что нематематикам психологически трудно понять одно и тоже утверждение A(n), которое в двух близких местах имеет разный смысл. Речь идет о том, что в условии задачи это утверждение, которое мы собираемся доказывать, а с другой стороны, в процессе доказательства «индуктивного перехода от n к $n + 1$» тоже утверждение используется уже как истинное по индуктивному предположению.

Кроме того, когда ставится задача доказательства того, что A(n) верно для любого натурального n, психологически проще подставить k и $k + 1$ вместо n, поскольку подстановка $n + 1$ вместо n дается некоторым студентам-философам гораздо труднее. Обратим внимание еще на одну методическую трудность из реальной образовательной практики. Студенту, уже владеющему методом математической индукции, задачи на доказательство с его использованием кажутся самыми простыми, но начинающие довольно плохо его усваивают без помощи преподавателя. А именно, тождества с одной натуральной переменной психологически трудно воспринимаются ими как ряд самостоятельных утверждений, подлежащих доказательству. Одна из причин этого в том, что буква k имеет в данном контексте не всегда понятный статус – то ли еще одной переменной, то ли постоянной, а параметр-переменная, входящий в условие задачи, не всегда ассоциируется с наглядным образом ряда утверждений.

Исторический комментарий. Изучавшим школьную математику должна быть известна формула под названием «бином Ньютона», представляющая выражение $(a + b)^n$ при целом положительном n в виде многочлена:

$$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n,$$

где биномиальные коэффициенты можно вычислить по рекуррентной формуле $C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$, задающей символический «треугольник Паскаля». Последнее равенство означает, что каждое из чисел внутри треугольника Паскаля располагается в некотором горизонтальном ряду, и число, расположенное в $(n + 1)$-м основании, возвращаясь назад, то есть, применяя «рекурсию», можно вычислить, используя два соседних числа из n-го основания. При этом «граничное условие» треугольника Паскаля при $r = 0$, по определению, целесообразно положить равным $C_n^0 = 1$. Хорошо известна явная формула для вычисления биномиальных коэффициентов

$$C_n^r = (n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1)) \,/\, (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r).$$

В случае, когда $r = n$, эта формула для другого граничного условия не теряет смысла, так как $C_n^n = 1$. Несмотря на то, что указанная рекуррентная формула для биномиальных коэффициентов содержит бесчисленное число частных случаев, французский математик и философ Блез Паскаль дал совсем короткое доказательство для случаев $0 < r < n$, основанное на двух леммах.

Первая лемма утверждает, что рекуррентная формула верна для первого основания. Это очевидно для $n = 1$ и двух возможных значениях r, то есть $r = 0$ и $r = 1$. Вторая лемма утверждает, что если наша рекуррентная формула верна для произвольного основания, то есть для произвольного значения n, то она будет справедлива и для следующего за ним основания, то есть для $n+1$. Из этих двух лемм с необходимостью вытекает, считал Паскаль, справедливость рекуррентной формулы для всех значений n. Его аргументация сводилась к тому, что в силу первой леммы она верна для $n = 1$, следовательно, в силу второй леммы она справедлива для $n = 2$, следовательно, опять-таки в силу второй леммы она верна для $n = 3$, и так далее до бесконечности.

По мнению венгерского математика Джорджа Пойя эти рассуждения Паскаля имеют историческое значение, так как «*его доказательство представляет собой первое применение нового фундаментального метода рассуждения, обычно называемого математической индукцией*». Этот метод, безусловно, заслуживает философского осмысления, поскольку небрежно проведенное рассуждение, основанное на формальном применении математической индукции, может озадачить неискушенного студента.

Философский комментарий. Особенности математической индукции проще всего объяснять на примерах, но для начала необходимо добиться ясного философского понимания того, что импликация $\mathrm{A}(k) \Rightarrow \mathrm{A}(k+1)$ – это условное предложение в следующем смысле: утверждая, что, например, из A(2) вытекает A(3), мы ничего не говорим об истинности или ложности самих утверждений A(2) и A(3).

Идею метода математической индукции можно образно пояснить с помощью следующей аналогии. Выстроим в ряд костяшки домино, затем повалим в направлении ряда первую из них. Тогда за ней, в заданном направлении падения, последует вся цепочка костяшек. При этом мы не произносили слов «база индукции» и «шаг индукции», чтобы не отвлекать внимание от самой идеи «волны доказательств». Для преодоления указанных трудностей по существу, как это делается в любом методологически грамотно составленном курсе математики, например [5, § 1.11], учитывая особенности математической подготовки студентов-философов, необходимо перейти к рассмотрению специально подобранных задач из разнообразного по содержанию «математического фольклора».

***Задача* (*о числах из единиц*).** *Число из трех единиц* 111 *делится на число* 3*, число из* 9 *единиц* 111 111 111 *делится на число* 9*, число из* 27 *единиц* 111 … 111 *делится на число* 27*. Доказать, число из* 3^n *единиц* 111 … 111 *делится на число* 3^n *при любом* n.

Р е ш е н и е. *База индукции.* Число, десятичная запись которого состоит из $3^1 = 3$ единиц, то есть 111, очевидно, в силу признака делимости на 3, делится на число 3. Можно и просто разделить, получится $111 : 3 = 37$.

Шаг индукции. Обозначим число, десятичная запись которого состоит из 3^n единиц, через b, а число, десятичная запись которого состоит из 3^{n+1} единиц, через a, где n – произвольное натуральное число. Предположим, что число b делится на число 3^n , и при этом предположении покажем, что число a делится на число 3^{n+1}. Это можно проверить, поделив a на b «уголком». Легко убедиться, что $a = b \cdot (10 \ldots 010 \ldots 01)$, где всего три единицы и между соседними единицами 3^n-1 нулей, что можно проверить умножением «в столбик». Но в правой части, полученного равенства для числа a, первый сомножитель, по предположению индукции, делится на число 3^n, а второй, по признаку делимости на 3, делится на число 3. Отсюда следует, что произведение $b \cdot (10 \ldots 010 \ldots 01)$ делится на $3^n \cdot 3 = 3^{n+1}$.

Таким образом, мы проверили базу индукции и обосновали шаг индукции, что в совокупности составляет математическое доказательство сформулированного свойства.

***Задача* (*о банковских билетах*).** *В течение многих десятилетий в бывшем Советском Союзе были в обращении банковские билеты достоинством в* 3 *и* 5 *рублей. Доказать, что такими билетами можно было выплатить любую рублевую сумму, начиная с* 8 *рублей.*

Р е ш е н и е. *База индукции.* Очевидно, что восемь рублей можно выплатить одним пятирублевым и одним трехрублевым билетами.

Шаг индукции. Предположим, что n рублей, где n – некоторое натуральное число, которое не меньше восьми, то есть $n \geq 8$, можно выплатить пятирублевыми и трехрублевыми билетами. Покажем, что при этом допущении можно такими билетами выплатить $n+1$ рублей. Действительно, рассмотрим следующие варианты. Если среди билетов, составивших в сумме n рублей, есть хотя бы один пятирублевый, то его можно заменить двумя трехрублевыми. Если вся сумма n рублей выплачена одними трехрублевыми билетами, при условии $n \geq 8$, этих билетов должно быть не меньше трех, поэтому можно заменить три трехрублевых билета на два пятирублевых билета.

Таким образом, доказано, что для любого натурального n, где $n \geq 8$, соответствующую рублевую сумму можно выплатить указанными банковскими билетами.

***Задача* (*о двух красках*).** *Несколько прямых делят плоскость на части, или «области». Доказать, что эти части можно раскрасить в белый и черный цвет так, чтобы любые две соседние области, имеющие общий отрезок границы, были окрашены в разные цвета.*

Р е ш е н и е. *База индукции.* Поскольку прямая только одна, то ситуация предельно простая: одна полуплоскость белая, а другая – черная.

Шаг индукции. Предположим, что области, на которые n прямых разбивают плоскость, для некоторого натурального числа n, можно раскрасить требуемым образом. Покажем, что при таком условии это же верно и для $n+1$ прямых. Действительно, пусть на плоскости проведена $n+1$ прямая. Чтобы воспользоваться индуктивным предположением сотрем одну из прямых. Тогда появившиеся при этом области по предположению можно раскрасить в белый и черный цвет так, как требуется по условию задачи. Теперь можно восстановить стертую прямую, а затем с одной стороны от новой прямой перекрасить каждую область в другой цвет, то есть белый сделать черным и наоборот. Другими словами, с одной стороны от прямой мы берем «позитив» карты областей, а с другой ее «негатив».

Таким образом, можно сказать, что доказательство окончено и задача решена для плоскости, разрезанной на части прямыми. Заметим, что не любую «карту», например, политическую карту стран, можно так раскрасить. Об этом говорится в знаменитой «задаче о четырех красках».

Философский комментарий. Реальный философский анализ в математике проходит, как любят говорить философы, в «особом» познавательном движении между математикой и философией. Использование математической индукции в описанных выше задачах в силу разных способов обоснования выглядит несколько таинственным, оно даже может быть воспринято как изощренный и хитроумный «обман». Несмотря на вполне разумные сомнения по поводу доказательного статуса метода математической индукции, мало кто из философов мог, достаточно вразумительно, объяснить, почему такой способ все-таки допустим. Английский математик, логик и философ Бертран Рассел по этому поводу вполне определенно сказал: «*Мы теперь знаем, что все подобные взгляды являются ошибочными, и что математическая индукция является определением, а не принципом*». Математики определяют натуральные числа так, что к ним могут применяться доказательства, основанные на методе математической индукции, то есть, они изначально рассматриваются как такие числа, которые обладают всеми индуктивными свойствами.

Методический комментарий. При решении математических задач всегда актуальным является вопрос: как угадать ответ? При доказательствах с помощью принципа математической индукции можно обосновать, когда подмеченная для нескольких первых членов ряда закономерность окажется справедливой и для всех остальных его членов. Заметим, что суть метода математической индукции в ее процессе. Методическая трудность подстерегает нас на понятийном, даже онтологическом, уровне, так как процесс, в отличие от остальных понятий, введенных ранее, не является строго математически определенным. Хотя, справедливости ради, можно сказать, что, для всех, впервые знакомящихся с математической индукцией, «догадка по аналогии» является важнейшей составляющей плохо формализуемого процесса математического познания.

Следует все же предостеречь студентов-философов насчет того, что хотя догадка по аналогии – это довольно сильное «методическое оружие», но оно одновременно и опасное, поскольку всегда есть искушение или соблазн принять угаданную закономерность за доказательство без строгого математического обоснования, опираясь лишь на проверку конечного опыта. Необходимо подчеркнуть, что принцип математической индукции сильно отличается от эмпирической индукции, свойственной естественным наукам. Сошлемся, например, на авторитетное мнение одного из ведущих математиков XX века Рихарда Куранта: «*Подтверждение общего закона на конечном числе случаев* (*как бы это число ни было велико*) *никоим образом не представляет собой доказательства в математическом смысле, даже если неизвестно ни одного исключения*». Сказанное можно проиллюстрировать на следующем знаменитом примере, принадлежащем выдающемуся математику XVIII века Леонарду Эйлеру.

Контрпример **(*о простом числе*).** *Проверим верна ли гипотеза, что число* $A(n) = n^2 + n + 41$ *является простым при любом натуральном* n.

Р е ш е н и е. Скажем сразу, что эта гипотеза ошибочна, так как, например, для числа имеем $A(40) = 40^2 + 40 + 41 = 41 \cdot 41$, а для числа $A(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$. Но если кто-то, не зная этого, попытается угадать ответ, экспериментируя с небольшими значениями n, начиная с 1 до 39 включительно, рискует прийти к противоположному выводу, так как для таких n число $A(n)$ оказывается простым.

Ссылки на выдающихся математиков полезны в том отношении, что они не только являлись наиболее авторитетными специалистами в теоретической математике, но также и математиками-методологами, даже математиками-философами, хорошо понимающими, как устроено математическое знание и как оно формируется. Поэтому они не только могли четко формулировать важнейшие математические проблемы, но и определять перспективные методы их решения.

Методологический комментарий. С догадкой по аналогии связана методологическая неприятность сугубо языкового свойства. Сам термин «математическая индукция» является очень неподходящим названием для соответствующего метода доказательства, так как понятие индукция дает только правдоподобное, а не доказательное умозаключение. Индуктивные выводы отличаются от дедуктивных выводов тем, что их посылки подкрепляют заключение, но это заключение, вообще говоря, строго логически не следует из посылок. Дедукция как принцип математических рассуждений заключается в том, что мы начинаем с определений, постулатов или аксиом, из которых посредством канонов логики выводим, если повезет, некоторые математические утверждения.

Философский комментарий. Метод математической индукции не имеет ничего общего, кроме названия, с индуктивным умозаключением, что является основой для многих философских недоразумений. Ассоциация с индуктивным умозаключением возникает из-за того, что базис индукции действительно проверяется только для частного случая. Индуктивные умозаключения используются лишь в тех науках, в которых абсолютно достоверные доказательства невозможны. Поэтому, хотя индуктивный процесс познания является базовым для экспериментальных наук, он совершенно неприемлем в математике как идеале строгости. Хотя в своих убеждениях относительно того, чего мы не знаем, например, относительно нашего будущего, мы всегда опираемся на индуктивное умозаключение.

Методический комментарий. Сущность метода математической индукции состоит в том, что он апеллирует к бесконечному множеству аргументов. Но ни один логический принцип не охватывает бесконечно много аргументов, поэтому принцип математической индукции не следует из логических принципов, что вызывает споры и поэтому заслуживает особого философского внимания. При аксиоматическом построении арифметики все ее величественное здание опирается на определения операций над натуральными числами, которые задаются с помощью математической индукции.

Напомним, что операции сложения и умножения натуральных чисел определяются, соответственно, базой индукции: (S1) $x+1 = x'$, (P1) $x\cdot 1 = x$ и шагом индукции: (S2) $x+y' = (x+y)'$, (P2) $x\cdot y' = x\cdot y+x$, где x' и y' – натуральные числа, «следующие за» x и y.

Философский комментарий. Чтобы описать какое-то свойство натуральных чисел приходится «совершать восхождения по лестнице», на «нижней ступени» которой находится соответствующее свойство для наименьшего натурального числа. В школьном курсе арифметики уверенность достигалась не с помощью аксиоматического метода, а индукцией и накопленным опытом. «*Но такая, пусть вполне обоснованная, уверенность так же отличается от подлинного доказательства, как, скажем, газетная информация от подлинного знания очевидца, причем эта аналогия простирается весьма далеко*». Натуральный ряд чисел – это важнейший математический инструментарий и применять его надо вполне обоснованно, что можно реально продемонстрировать на примере свойств операций сложения и умножения натуральных чисел.

***Свойство* 1 (*ассоциативность сложения*).** *Сложение натуральных чисел ассоциативно*: $(k + m) + n = k + (m + n)$ *для любых* $k, m, n \in \mathbf{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится индукцией по n при произвольно выбранных $k, m \in \mathbf{N}$. *База индукции.* При $n = 1$ имеем $(k + m) + 1 = (k + m)' = k + m' = k + (m + 1)$. Первое равенство выполняется по аксиоме (S1), второе – по аксиоме (S2), третье – по аксиоме (S1). *Шаг индукции.* Пусть справедливо равенство $(k + m) + n = k + (m + n)$, покажем, что $(k + m) + n' = k + (m + n')$. Имеем $(k + m) + n' = ((k + m) + n)' = (k + (m + n))' = k + (m + n)' = k + (m + n')$. Первое равенство выполняется по аксиоме (S2), второе – по индуктивному предположению, третье и четвертое – по аксиоме (S2).

***Свойство* 2 (*коммутативность сложения*).** *Сложение натуральных чисел коммутативно*: $m + n = n + m$ *для любых* $m, n \in \mathbf{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится индукцией по n. *База индукции*. Вначале проверим, что $m + 1 = 1 + m$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Для доказательства этого равенства, в свою очередь, воспользуемся индукцией по m. При $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть справедливо равенство $m + 1 = 1 + m$, покажем, что $m' + 1 = 1 + m'$. Имеем $m' + 1 = (m + 1) + 1 == (1 + m) +1 = 1 + (m + 1) = 1 + m'$. Первое равенство выполняется по аксиоме (S1), второе – по индуктивному предположению, третье – по свойству 1, четвертое – по аксиоме (S1). *Шаг индукции.* Путь справедливо равенство $m + n = n + m$, покажем, что $m + n' = n' + m$. Имеем $m + n' = (m + n)' = (n + m)' = n + m' = n + (m + 1) = n + (1 + m) = (n + 1) + m = n\,' + m$. Первое из этих равенств выполняется по аксиоме (S2), второе – по индуктивному предположению, третье – по аксиоме (S2), четвертое – по аксиоме (S1), пятое – по базе индукции, шестое – по свойству 1, седьмое – по аксиоме (S1).

***Свойство* 3 (*дистрибутивность*).** *Умножение натуральных чисел дистрибутивно относительно сложения*: $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$ *и* $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$ *для любых* $k, m, n \in \mathbf{N}$.

Доказательство первого равенства проводится индукцией по n при произвольно выбранных $k, m \in \mathbf{N}$. *База индукции.* При $n = 1$ имеем $k \cdot (m + 1) = k \cdot m' = k \cdot m + k = k \cdot m + k \cdot 1$. Первое равенство выполняется по аксиоме (S1), второе – по аксиоме (P2), третье – по аксиоме (P1). *Шаг индукции.* Пусть справедливо равенство $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$, покажем, что верно $k \cdot (m + n') = k \cdot m + k \cdot n'$. Имеем следующую цепочку равенств $k \cdot (m + n') = k \cdot (m + n)' = k \cdot (m + n) + k = (k \cdot m + k \cdot n) + k = k \cdot m + (k \cdot n + k)$ $= k \cdot m + k \cdot n'$. Первое равенство выполняется по аксиоме (S2), второе – по аксиоме (P2), третье – по индуктивному предположению, четвертое – по свойству 1, пятое – по аксиоме (P2).

Второе равенство доказывается аналогично.

***Свойство* 4 (*ассоциативность умножения*).** *Умножение натуральных чисел ассоциативно*: $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$ *для любых* $k, m, n \in \mathbf{N}$.

Доказательство проводится индукцией по n при произвольно выбранных $k, m \in \mathbf{N}$. *База индукции.* При $n = 1$ имеем $(k \cdot m) \cdot 1 = k \cdot m = k \cdot (m \cdot 1)$. Первое и второе равенства выполняются в силу аксиомы (P1). *Шаг индукции.* Пусть справедливо равенство $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$, покажем, что $(k \cdot m) \cdot n' = k \cdot (m \cdot n')$. Имеем $(k \cdot m) \cdot n' = (k \cdot m) \cdot n + k \cdot m = k \cdot (m \cdot n) + k \cdot m = k \cdot (m \cdot n + m) = k \cdot (m \cdot n')$. Первое равенство выполняется по аксиоме (P2), второе – по индуктивному предположению, третье – по первой части свойства 3, подчеркнем, что в этом доказательстве используется свойство дистрибутивности, а четвертое – по аксиоме (P2).

***Свойство* 5 (*коммутативность умножения*).** *Умножение натуральных чисел коммутативно*: $m \cdot n = n \cdot m$ *для любых* $m, n \in \mathbf{N}$.

Доказательство проводится индукцией по n. *База индукции.* Вначале проверим, что $m \cdot 1 = 1 \cdot m$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Для доказательства этого равенств, в свою очередь, воспользуемся индукцией по m. При $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть справедливо равенство $m \cdot 1 = 1 \cdot m$, покажем, что $m' \cdot 1 = 1 \cdot m'$. Имеем $m' \cdot 1 = (m + 1) \cdot 1 = m \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot m + 1 \cdot 1 = 1 \cdot (m + 1) = 1 \cdot m'$. Первое равенство выполняется по аксиоме (S1), второе – по первой части свойства 3, то есть свойства дистрибутивности, третье – по индуктивному предположению, четвертое – по аксиоме (S1). *Шаг индукции.* Пусть справедливо равенство $m \cdot n = n \cdot m$, покажем, что $m \cdot n' = n' \cdot m$. Имеем $m \cdot n' = m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \cdot 1 = n \cdot m + 1 \cdot m = (n + 1) \cdot m = n' \cdot m$. Первое равенство выполняется по аксиоме (S1), второе – по первой части свойства 3, третье – по индуктивному предположению и базе индукции, четвертое – по второй части свойства 3, то есть в этой цепочке равенств дважды использовалось свойство дистрибутивности, а пятое – по аксиоме (S1).

Методический комментарий. Отметим, что обоснование базы и шага индукции проводится с помощью дедуктивных доказательств соответствующих утверждений. К этому можно добавить, что ни база индукции, ни шаг индукции по отдельности, а именно их сочетание в целом приводит к выводу о том, что доказываемые свойства справедливы для каждого натурального числа. Это и означает «переход от частного к общему», хотя нельзя утверждать, что это происходит при доказательстве с помощью принципа математической индукции. Связанное с этим недоразумение может возникнуть из-за предположения о связи базы индукции и шага индукции, то есть убеждения, что справедливость утверждения для каждого натурального числа следует из его справедливости для начального числа. В действительности шаг индукции не зависит от базы индукции. Они вместе составляют основу доказательства, а в теоретической математике под доказательством всегда понимают дедуктивное рассуждение и доказательство с помощью метода математической индукции не является исключением.

Философский комментарий. Область натуральных чисел была выстроена на основе предположения, что операцию сложения можно повторять бесконечно. Функция «следующий за» в аксиоматике Пеано позволяет продолжать натуральный ряд чисел сколь угодно далеко. Но, чтобы делать какие либо утверждения, для всех натуральных чисел, необходим специальный метод доказательства, позволяющий оперировать с бесконечными совокупностями, экономя место на разговорах о бесконечных процессах. Такой метод базируется на принципе математической индукции, что составляет его философскую сущность. Заметим, что для обоснования современной математики необходимо совместное использование логических и математических средств, но статус принципа математической индукции, а то есть логический или математический, тоже является предметом философских споров.

Историк математики В.П. Шереметевский тоже рассматривал этот вопрос философски. «*Приблизительно с восьмидесятых годов XIX столетия эти вводящие в высший анализ исследования делаются самодовлеющей дисциплиной и развиваются в то, что иногда называют «философией числа», и что быть может, заслуживало бы названия метаарифметики…*». Он при этом ссылался на мнение Анри Пуанкаре, считавшего, что математическая индукция – «истинный тип синтетического суждения» (в смысле Канта) и «образцовый метод доказательства, недоступный ни аналитическому доказательству, ни опыту».