

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра компьютерных технологий и систем**

В. Б. Таранчук

**ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ
СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ**

**Пособие для студентов
факультета прикладной математики и информатики**

**МИНСК
2013**

УДК 004.4 (075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73
Т19

Утверждено на заседании
кафедры компьютерных технологий и систем
17 января 2013 г., протокол № 8

Таранчук, В. Б.

Т19 Основные функции систем компьютерной алгебры : пособие
для студентов фак. прикладной математики и информатики /
В. Б. Таранчук. – Минск : БГУ, 2013. – 59 с.

В пособии рассматриваются системы компьютерной алгебры, описаны
возможности их использования.

Предназначено для студентов факультета прикладной математики и ин-
форматики.

УДК 004.4 (075.8)
ББК 32.973.26-018.2я73

© Таранчук, В. Б., 2013
© БГУ, 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие посвящено системам компьютерной алгебры – программным средствам для символьных вычислений, позволяющим провести весь цикл разработки математической модели: от поиска и просмотра необходимой литературы до аналитического и/или численного решения задачи и подготовки отчёта или статьи к печати. Системы компьютерной алгебры (СКА) становятся одним из обязательных компонентов компьютерных технологий, используемых в образовании. Такие системы пригодны для решения любой учебной задачи или проведения серьёзного исследования, где требуется математика – от курсовой работы до научной или инженерной разработки высокого класса.

Одной из форм образовательного процесса на ФПМИ является то, что студентов, начиная с первых курсов, ориентируют на самостоятельное изучение дополнительных разделов прикладной математики, освоение новых информационных технологий, нацеливают на проведение анализа и оптимизацию алгоритмов в разных информационных средах, получение нетрадиционных решений заданий в рамках дисциплин общепрофессионального цикла.

При изучении дисциплин специализации, выполнении курсовых и дипломных работ де факто стандартом является требование применения и сопоставления студентами классических, традиционных и новых методов. Достигается это чаще всего на основе использования новейших платформ и сред для программных реализаций. Чаще всего таковыми являются самостоятельно изученные в дополнение к основным современные языки программирования, программные комплексы или системы. Особое место при этом занимают системы компьютерной математики (СКМ) и, в частности, системы компьютерной алгебры, специализированные пакеты для численных расчётов, системы для моделирования, анализа и принятия решений, универсальные и специализированные пакеты графической визуализации.

В пособии изложена современная терминология, принятая большинством авторов последних русскоязычных изданий, дан обзор основных систем компьютерной алгебры и среды математического моделирования MATLAB, их функциональных, интерфейсных, издательских возможностей; предпринята попытка перечислить основные функциональные возможности проприетарных и с открытым кодом лидеров СКА. Такие

системы являются сложными программными продуктами. Многие специалисты отмечают, что СКА целесообразно осваивать в два этапа: изучить общие возможности выбранной системы, затем приступить к избранному знакомству. Представляется, что материалы пособия будут полезны при выборе предпочтительной системы.

Советы и критические замечания по изложению данного в пособии материала просьба направлять на taranchuk@bsu.by.

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

БД – база данных.

ИТ – информационные технологии.

ОДУ – обыкновенные дифференциальные уравнения.

ОС – операционная система.

ПО – программное обеспечение.

САПР – система автоматизированного проектирования.

СКА – система компьютерной алгебры.

СКМ – система компьютерной математики.

ФПМИ – факультет прикладной математики и информатики.

dll (dynamic-link library) – динамически подключаемая библиотека.

HDR (High Dynamic Range) – общее название технологий обработки изображений и видео, диапазон яркости которых превышает возможности стандартных технологий.

NB (notebook) – блокнот, основной документ СКА Mathematica.

1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

В середине XX века на стыке математики и информатики возникло и интенсивно развивается фундаментальное научное направление – компьютерная алгебра, наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов. Синонимами термина “компьютерная алгебра” являются: “символьные вычисления”, “аналитические вычисления”, “аналитические преобразования”, а иногда и “формальные вычисления”.

Во второй половине прошлого века основные результаты компьютерной алгебры были получены в теории базисов Грёбнера, факторизации многочленов, интегрирования в конечном виде ([1]). В настоящее время развивается теория и расширяется область применения алгоритмов факторизации, охватывая, например, случай многочленов с коэффициентами из конечных полей или из полей алгебраических чисел. Многие научные работы посвящены дальнейшему исследованию базисов Грёбнера и их обобщений (базисы Ширшова-Грёбнера, инволютивные базисы), отысканию оптимальных алгоритмов их построения. Решение задач криптографии стимулировало исследования по факторизации натуральных чисел, по алгоритмам генерации больших простых чисел, проверки на простоту, по алгоритмическим проблемам арифметики эллиптических кривых. Круг математических задач, которые можно решить с помощью СКА, непрерывно расширяется. Значительные усилия исследователей направлены на разработку алгоритмов вычисления топологических инвариантов многообразий, узлов, алгебраических кривых, когомологий различных математических объектов, арифметических инвариантов колец целых элементов в полях алгебраических чисел. Другое направление современных исследований – квантовые алгоритмы, имеющие иногда полиномиальную сложность, тогда как существующие классические алгоритмы имеют экспоненциальную.

Направление компьютерная алгебра представлено теорией, технологиями, программными средствами. К прикладным результатам относят разработанные алгоритмы и программное обеспечение для решения с помощью компьютера задач, в которых исходные данные и результаты имеют вид математических выражений, формул. Основным продуктом компьютерной алгебры стали программные системы компьютерной алгебры – СКА (англ. Computer Algebra System, CAS). Систем этой катего-

рии достаточно много, им посвящены многие издания, систематически выходят обновления с изложением возможностей новых версий. С обстоятельным изложением на русском языке основных правил работы и обзором решаемых с помощью СКА классов задач по состоянию на 2008 г. можно ознакомиться в книге [2].

Не следует отождествлять системы компьютерной алгебры и компьютерной математики. Например, в [2] СКМ условно делятся на две категории: системы компьютерной алгебры и системы для численных вычислений. В ряде изданий к СКМ обычно¹ относят:

- ✓ табличные процессоры, например, Microsoft Excel, Lotus Symphony Spreadsheets, Gnumeric, OpenOffice.org Calc;
- ✓ системы для статистических расчётов, например, STATISTICA, PASW Statistics (первоначальное название SPSS Statistics);
- ✓ системы для моделирования, анализа и принятия решений, например, GPSS, AnyLogic, DSS;
- ✓ системы компьютерной алгебры;
- ✓ универсальные математические системы.

Если с выделением в отдельные группы первых трёх из перечисленных СКМ есть согласие большинства авторов, то отнесение в отдельную группу универсальных математических систем прослеживается только у нескольких. Основные СКА в контексте численных и аналитических вычислений большинством авторов считаются универсальными системами. Скорее всего, классификация и разделение СКМ в некоторых изданиях на 5 групп определяется тем, к какой из систем они относились изначально, и зависит от истории их зарождения.

В настоящем изложении также принята терминология, отличная от [3, 4], где программные средства, ориентированные на решение математических задач, названы и предложено “условно дифференцировать на 5 уровней: (1) встроенные средства различной степени развития той либо иной системы программирования; (2) специальные языки программирования; (3) узко-специальные, (4) специальные, (5) общие пакеты прикладных программ. К первому уровню авторы относят такие системы программирования как Basic, C, Pascal-XSC, PL/1 и др., ко второму – Fortran, ISETL, Prolog и др. Третий уровень – библиотеки математических подпрограмм (SSP, NAG, ПНП-БИМ и др.) и узко-специальные па-

¹ В изданиях до 2005 г. можно встретить разделение СКМ на: табличные процессоры, матричные системы, системы для статистических расчетов, системы для специальных расчетов, системы компьютерной алгебры, универсальные системы.

кеты MacMath, Phaser, VossPlot, Eureka и др. Четвертый уровень – пакеты S-Plus, XploRe, SAS, Dynamics, StatGraf, SPSS, BMDP, PL/1-Fornac, Systat и др. ... Пятый уровень представляют основные математические пакеты MathCAD, Reduce и MatLab, ... Mathematica и Maple”. Следует отметить, что авторы пишут: “данная рубрикация программных средств во многом носит субъективный характер”. Везде далее в настоящем пособии программные комплексы типа Mathematica, Maple, MATLAB, Mathcad и др. называются не пакетами, а системами, т.к. они содержат библиотеки и пакеты дополнений.

Исследования и разработки теоретических основ и технологий реализации СКА продолжаются. Термины, определения, названия в описаниях функций и инструментов этих систем также претерпевают изменения, некоторые формулировки, ранее приводимые в отдельных руководствах, обзорах возможностей инструментария не только уточняются, но и изменяются. Это нормально для новых научных направлений и технологий. Читатель не должен удивляться, если в других источниках встретит иные формулировки, термины.

1.1 Назначение, как работают системы компьютерной алгебры

Основное назначение СКА – работа с математическими выражениями в символьной форме. Базовые типы данных СКА: числа и математические выражения. Числа: короткие и длинные целые (одинарной и кратной точности), рациональные, комплексные, алгебраические числа. Алгебраическое число задается своим минимальным многочленом, а иногда для его задания требуется указать интервал на прямой или область в комплексной плоскости, где содержится единственный корень данного многочлена. Математические выражения: арифметика, функции, уравнения, производные, интегралы, векторы, матрицы, тензоры. Кроме того, в компьютерной алгебре рассматриваются такие объекты, как: функциональные, дифференциальные поля, допускающие показательные, логарифмические, тригонометрические функции; матричные кольца и другие. Перечислим основные отличительные признаки систем компьютерной алгебры ([2 - 5]).

СКА работают следующим образом:

- математические объекты (алгебраические выражения, ряды, уравнения, векторы, матрицы и др.) и указания, что с ними делать, задаются пользователем на входном языке системы в виде символьных выражений;
- интерпретатор анализирует и переводит символьные выражения во внутреннее представление;

- символьный процессор системы выполняет требуемые преобразования или вычисления и выдает ответ в математической нотации.

Алгоритмы внутренних преобразований имеют алгебраическую природу, что и отражено в названии систем – системы компьютерной алгебры.

Содержание техники символьных вычислений:

- внутреннее представление математического выражения в системе символьных вычислений – синтаксическое дерево (список списков);
- суть символьных вычислений (аналитических преобразований) – переписывание термина с помощью последовательного применения правил из определённого пользователем или системой списка;
- преобразование из внешнего представления во внутреннее и обратно обеспечивается дополнительными инструментальными средствами.

Далеко не каждая математическая задача имеет определяемое существующими математическими формализмами аналитическое решение; есть алгоритмически неразрешимые задачи; в исследованиях проблемы оценки трудоёмкости алгоритмов алгоритмически разрешимых задач при наличии принципиальных достижений остаётся значительное число вопросов. Специалисты в областях прикладной и компьютерной математики единодушны во мнении, что много практически важных задач и не могут быть формализованы настолько, чтобы решаться аналитически, в лучшем случае они могут решаться только численными методами.

Относительно классификации СКА. Достаточно полный перечень с указанием функциональности систем символьных вычислений и платформ, на которых эксплуатируются, можно найти в [5]. Многие выделяют СКА общего назначения и специализированные. Наиболее известные системы из первой группы: Derive, Mathematica, Maple, Macsyma и её потомок Maxima, Scratchpad и её потомок Axiom, Reduce, MuPAD, Mathcad, MATLAB, Sage, SMath Studio, Yacas, Scientific WorkPlace, Kalamaris. Системы для решения задач одного или нескольких смежных разделов символьной математики – это специализированные СКА. Примерами таковых являются: GAP (теория групп), Cadabra (тензорная алгебра), KANT (алгебра и теория чисел), Singular (полиномиальные вычисления с акцентом на нужды коммутативной алгебры, алгебраическая геометрия), Calc3D (для работы с 3D матрицами, векторами, комплексными числами), GRTensorII (дифференциальная геометрия).

Классификация СКА по типу архитектуры является, скорее следствием истории становления, потому что у большинства на современном этапе структуры одинаковые. Отличительным признаком является – используется собственное ядро или заимствовано от других. Более того, у

некоторых изначально было ядро одного производителя, потом перешли на другое. Например, у Mathcad символьные вычисления выполнялись на базе сокращённого ядра системы Maple, начиная с 14 версии, используется символьное ядро MuPAD.

1.2 Типовая структура СКА

Составляющие СКА:

- ядро системы,
- интерфейсная оболочка,
- библиотеки специализированных программных модулей и функций,
- пакеты расширения,
- справочная система.

Функции ядра всегда тщательно отлажены, как правило, реализуются на машинно-ориентированном языке, т.к. требуется высокая производительность их выполнения. У некоторых СКА оптимизация машинного кода обеспечивается, в том числе, с помощью частичной реализации функциональности на языке ассемблера или аппаратно. Ядро содержит реализации операторов и встроенных функций, обеспечивающих выполнение аналитических преобразований математических выражений на основе системы определённых правил. Объем ядра обычно ограничивают, но к нему добавляют библиотеки дополнительных процедур и функций. Распределение состава поддерживаемых системой алгоритмов символьных вычислений между ядром и библиотеками осуществляется по принципу баланса производительности и функциональности с учётом текущего состояния наиболее распространённого аппаратного обеспечения. У большинства коммерческих СКА алгоритмы вычислений и программные модули ядра являются ноу-хау разработчиков и относятся к разряду тщательно скрываемых данных.

Библиотеки специализированных программных модулей и функций, пакеты расширения содержат систематизированные по назначению реализации алгоритмов обработки абстрактных объектов, решения типовых математических задач. Библиотеки и пакеты функционально расширяют ядро, а также обеспечивают возможности программирования алгоритмов не только на языке самой системы, но и на языке её реализации, а у многих СКА и на основных языках программирования высокого уровня.

Интерфейсные оболочки обеспечивают поддержку всех функций, необходимых для информационных и управляющих взаимодействий между системой и пользователями, в том числе ввод, редактирование, сохранение, обмен программами, использование разных аппаратных

средств. У большинства СКА интерфейсные оболочки разные для разных ОС, при этом ведущие системы компьютерной алгебры работают без перекомпилирования исходного кода, как на различных аппаратных платформах, так и под управлением разных операционных систем; пользовательские интерфейсы обеспечивают похожие визуальные сценарии работы в СКА на разных компьютерах, в разных ОС.

Справочная система всех СКА содержит и обеспечивает пользователей описаниями функциональных возможностей и демонстрационными примерами работы, информационными сообщениями о текущем состоянии системы, а также сведениями о математических основах алгоритмов. Справедливо утверждение, что многие СКА, по сути, являются не только инструментами для получения и анализа решений, но и математическими энциклопедиями. Для СКА типичны организация и обеспечение диалога получения справок пошагово с вложенными уровнями абстракции и/или конкретизации информации. Обычно пользователю доступны: краткая контекстная справка о функциональном назначении выбранного элемента, информация о синтаксисе и семантике операторов и функций языка с поясняющими примерами, описание реализованных вариантов решения. Информативность справочной системы обеспечивается обязательным описанием всех функций ядра, инструментами поиска сведений об объекте СКА по имени, тематическому разделу, ключевым словам. У многих в системе помощи содержатся обучающие материалы с разделением по категориям пользователей, интерактивные учебные курсы решения математических задач в среде системы, некоторые также имеют консультант-репетитора, выполняющего пошаговое решение примеров с поясняющими комментариями.

1.3 Основные функциональные возможности СКА

СКА позволяют реализовывать с использованием компьютера аналитические и численные методы решения задач, представляя результаты в математической нотации, обеспечивают графическую визуализацию, оформление результатов и подготовку к изданию.

Используя СКА и компьютер, можно выполнять в аналитической форме:

- упрощение выражений или приведение к стандартному виду,
- подстановки символьных и численных значений в выражения,
- выделение общих множителей и делителей;
- раскрытие произведений и степеней, факторизацию,
- разложение на простые дроби,

- нахождение пределов функций и последовательностей,
- операции с рядами,
- дифференцирование в полных и частных производных,
- нахождение неопределённых и определённых интегралов,
- анализ функций на непрерывность,
- поиск экстремумов функций и их асимптот,
- операции с векторами,
- матричные операции,
- нахождение решений линейных и нелинейных уравнений,
- символьное решение задач оптимизации,
- алгебраическое решение дифференциальных уравнений,
- интегральные преобразования,
- прямое и обратное быстрое преобразование Фурье,
- интерполяция, экстраполяция и аппроксимация,
- статистические вычисления,
- машинное доказательство теорем.

Если задача имеет точное аналитическое решение, пользователь СКА может получить это решение в явном виде (разумеется, речь идет о задачах, для которых известен алгоритм построения решения).

Также большинство СКА обеспечивают:

- числовые операции произвольной точности,
- целочисленную арифметику для больших чисел,
- вычисление фундаментальных констант с произвольной точностью,
- поддержку функций теории чисел,
- редактирование математических выражений в двумерной форме,
- построение графиков аналитически заданных функций,
- построение графиков функций по табличным значениям,
- построение графиков функций в двух или трёх измерениях,
- анимацию формируемых графиков разных типов,
- использование пакетов расширения специального назначения,
- программирование на встроенном языке,
- автоматическую формальную верификацию,
- синтез программ.

В СКА можно производить вычисления в арифметике с плавающей точкой и указывать точность, реализована точная рациональная арифметика, т.е. можно производить численные расчеты без потери точности.

К особенностям СКА относят преимущественно интерактивный характер работы – пользователь не знает заранее ни размера, ни формы ре-

зультатов и поэтому должен иметь возможность корректировать ход вычислений на всех этапах, задавать режим пошагового выполнения с выводом промежуточных результатов.

Большинство СКА в современной реализации не только применимы для исследования различных математических и научно-технических задач с использованием встроенных и дополнительных функций, но и содержат все составляющие языков программирования – де факто являются проблемно ориентированными языками программирования высокого уровня. Лидерами СКА являются *Mathematica* и *Maple* – мощные системы с собственными ядрами, оснащенные развитым пользовательским интерфейсом и обладающие разнообразными графическими и редакторскими возможностями. Широкое распространение в настоящее время имеют и СКА: *Derive*, *Maxima*, *Axiom*, *Reduce*, *MuPAD*, *Mathcad*. Особое место занимает система компьютерной математики *MATLAB*.

2 СКА WOLFRAM MATHEMATICA

Mathematica – система компьютерной алгебры компании Wolfram Research является одним из наиболее мощных и широко применяемых интегрированных программных комплексов мультимедиа-технологии ([2, 6 - 9]). *Mathematica* признана фундаментальным достижением в области компьютерного проектирования. По объёму программных модулей она является одним из самых больших программных комплексов; содержит много новых алгоритмов, и при её реализации применено много уникальных технических решений. В системе реализованы и доступны пользователям практически все возможности аналитических преобразований и численных расчётов, она поддерживает работу с базами данных, графикой и звуком. *Mathematica* даёт пользователю возможности работать, анализировать, манипулировать, иллюстрировать графиками практически все функции чистой и прикладной математики. Система обеспечивает расчеты с любой заданной точностью; построение двух- и трёхмерных графиков, их анимацию, рисование геометрических фигур; импорт, обработку, экспорт изображений и звука.

Система *Mathematica* прошла путь от программы, используемой преимущественно для математических и технических расчетов, до инструмента, широко применяемого в различных других областях ([6, 7]). Среди специалистов она отмечается, как платформа для разработки, полностью интегрирующая вычисления в рабочий процесс от начала до

конца, плавно проводя пользователя от первоначальных идей до развернутых индивидуальных и промышленных решений.

Mathematica имеет встроенный язык программирования, включающий средства создания программ и пользовательских интерфейсов, подключения внешних dll, параллельных вычислений. Язык программирования системы является типичным интерпретатором, он не предназначен для создания исполняемых файлов, но вобрал в себя лучшее из таких языков программирования, как Бейсик, Фортран, Паскаль и С. Язык программирования *Mathematica* поддерживает все известные парадигмы: функциональное, структурное, объектно-ориентированное, математическое, логическое, рекурсивное и т.д. В него включены и средства визуально-ориентированного программирования на основе применения шаблонов математических символов, таких как знаки интеграла, суммирования, произведения и т.д.; по своим возможностям в выполнении математических и научно-технических вычислений этот язык превосходит обычные универсальные языки программирования.

Как и всякая система компьютерной алгебры, *Mathematica* представляет собой тип программного средства, предназначенного для манипулирования математическими формулами. Основная её цель состоит в автоматизации зачастую утомительных и в целом ряде случаев трудных алгебраических преобразований. Пользователь работает в системе с блокнотами – NB документами, каждый из которых содержит как минимум одну секцию (cell). В русскоязычной литературе можно встретить термин не секция, а ячейка. Пояснением принятого здесь предпочтения является сопоставление с **MS Excel**, где устойчиво и всеми применяется термин ячейка. Имеющие опыт работы с **Excel** и *Mathematica*, понимают разницу и то, что в **MS Excel** именно ячейки, а в блокнотах *Mathematica* более общие объекты.

NB документы можно открывать, просматривать, редактировать, сохранять, выполнять полностью или отдельные секции. Интерфейс блокнота содержит много палитр (меню) и графических инструментов для создания, редактирования, просмотра документов, отправки и получения данных к ядру и от ядра. Блокнот включает одну или набор секций, которые при необходимости можно объединять в группы. Каждая секция содержит, по крайней мере, одну строку текста или формул, цифровой объект аудио либо видео. Блокноты можно редактировать как текст в любом редакторе или в интерфейсной оболочке *Mathematica*. Ядро выполняет вычисления, может быть запущено на том же самом компьютере, на котором выполняется интерфейс, или на другом, подключенном

посредством сети. Как правило, ядро запускается в момент, начала выполнения вычислений.

Секции в *Mathematica* можно условно разделить на секции ввода и результата (вывода). В секциях ввода пользователь вводит или размещает команды, комментарии, объекты мультимедиа, они могут быть исполняемыми и другими; исполняемые секции обрабатываются – система возвращает результаты.

Все версии *Mathematica* содержат мощную справочную базу данных, встроенный в систему Центр Документации (Help, Documentation Center) сам по себе является примером NB документа. Не прерывая работу с модулями, можно уточнить назначение любой функции, опции, директивы или служебного слова системы; изучить, выполняя «живые» примеры, возможности получения и оформления результатов; вставить примеры целиком или фрагменты кода из примеров в собственный код.

2.1 Фрагменты хронологии версий *Mathematica*

Первый выпуск *Mathematica* – июнь 1988 г., основной концепцией стало однажды и навсегда создать одну систему для разных вычислений в последовательном и объединенном виде. Основой этому стало создание нового символьного компьютерного языка для управления при минимальном числе исходных большого числа объектов, вовлеченных в технические вычисления. С момента появления все разработки Wolfram Research Inc. регулярно занимают первые места среди достижений ИТ, отмечаются средствами массовой информации. Например, когда появилась *Mathematica 1.0*, газета New York Times написала, что "важность программы не может быть не оценена", а журналы Newsweek, Business Week зачислили комплекс в десятку важнейших достижений года.

Хронология выпуска версий *Mathematica* полно отражена в ряде изданий и на сайтах, например [6, 7]. Здесь отметим только знаковые моменты, которые оказали принципиальное влияние и на другие СКА, а в расширенном понимании и на развитие ИТ.

- ✓ *Mathematica 1.0*, 23 июня 1988 – первый выпуск *Mathematica*.
- ✓ Версия 1.2, август 1989 г. – интерфейс под Macintosh, поддержка удалённых ядер, добавлены стандартные пакеты Statistics и Graphics.
- ✓ Версия 2.0, январь 1991 г. – Notebook интерфейс, протокол MathLink межпроцессорного и сетевого взаимодействия, поддержка звука, поддержка наборов букв не только латинского алфавита, добавлен ParametricPlot3D.
- ✓ Версия 2.1, июнь 1992 г. – MathLink под Macintosh, поддержка Windows 3.1, синтез звука.

- ✓ Версия 2.2, июнь 1993 г. – реализация для Linux, трёхмерное построение контурных графиков, вариационное исчисление, музыка, онлайн-руководства для Windows и браузер функций для Macintosh и NeXT.
- ✓ Версия 3.0, сентябрь 1996 г. – интерактивная система математического набора, интервальная арифметика.
- ✓ Версия 4.0, май 1999 г. – публикация документов в ряд форматов, прямой импорт и экспорт в более чем 20 форматов графических, звуковых файлов и файлов стандартных данных.
- ✓ Версия 4.1, ноябрь 2000 г. – интеграция с Java посредством J/Link 1.1, поддержка управления в реальном времени трёхмерной графики под Linux и Unix.
- ✓ Версия 4.2, ноябрь 2002 г. – XML-расширения, которые позволяют сохранять файлы и выражения Mathematica как XML.
- ✓ Версия 5.0, июнь 2003 г. – включена .NET/Link, обеспечивающая полную интеграцию с Microsoft's .NET Framework.
- ✓ Версия 5.1, октябрь 2004 г. – встроенная подключаемость к универсальной базе данных, интегрированная поддержка веб-сервисов, интерфейс GUIKit и встроенный разработчик программ.
- ✓ Версия 5.2, июнь 2005 г. – поддержка многоядерности на основных платформах, MathematicaMark 5.2 – обеспечивает работу с grid и кластерами.
- ✓ Версия 6, май 2007 г. – язык для интеграции данных, включая автоматическую интеграцию сотен стандартных форматов данных, объединение активных графиков и элементов управления с поточным текстом и вводом.
- ✓ Версия 7, ноябрь 2008 г. – встроенная поддержка параллельных высокопроизводительных вычислений, визуализация векторных полей, полная поддержка сплайнов, включая неоднородный рациональный B-сплайн, интегрированные геодезические и GIS данные.
- ✓ Версия 8, ноябрь 2010 г. – интеграция с Wolfram|Alpha, вейвлет-анализ, встроенная поддержка CUDA и OpenCL, автоматическое генерирование кода C, расширенная двух- и трёхмерная графика, включающая отображение текстур и аппаратное ускорение 3D рендеринга, интерактивный мастер создания CDF-документов.
- ✓ Версия 9, ноябрь 2012 г. – набор функций анализа социальных сетей, встроенная связь с Facebook, LinkedIn, Twitter, поддержка объемных операций с 3D изображениями.

Приведенный выше перечень отражает много совершенно новых достижений, которые нашли применение, развитие и в других системах,

информационных технологиях. Для разработок Wolfram Research Inc. в основном характерны преемственность интерфейса и возможность применения исходных кодов из предыдущих версий. Но это не всегда так. В истории развития системы были несколько знаковых этапов, когда переход на новую версию требовал изменений кода. Вообще говоря, соответствующая информация будет полезна по нескольким причинам. Одна из них – начальные версии были с открытым кодом. Другая – иногда приходится возвращаться к разработкам прошлых лет и использовать части результатов, например, включать в новые комплексы фрагменты отлаженных в других версиях исходных блокнотов.

Отметим несколько таких ситуаций из истории версий Wolfram Mathematica примерами по разработкам прошлых лет. На рисунках 1а – 1в приведены скриншоты окон блокнотов программы мониторинга аналитических решений задачи Баклея-Левретта². Программа была разработана в 1999 – 2000 г.г. в версии 3.0 и адаптирована позже для работы в следующих версиях. Для использования программы в версиях, начиная с 4, пришлось к коду применять конвертер кириллицы, т.к. после версии 3 применялась другая кодировка. Изменений функций, опций и директив в коде при переходе от 3.0 к версиям 4 не понадобилось. На рисунке 1а приведен вид главного окна программы в версии 4.2, на рисунке 1б вид окна фрагмента этой программы. Вид того же фрагмента оригинального кода (до применения конвертера) дан на рисунке 1в – если бы оригинальный NB был открыт в Mathematica 3.0, он был бы подобен изображению, как на рисунке 1б.

Виды окон при открытии отлаженного в Mathematica 4.2 исходного кода в версиях, начиная с 6, будут такими, как на рисунках 2а – 2б. Система предлагает автоматическую обработку, которую можно провести по всему документу целиком или пошагово по секциям, где нужны уточнения – интерфейсная оболочка системы показывает пользователю текущий код и предлагаемую замену. Большинство требуемых уточнений для работы в версиях 6 и следующих обусловлены тем, что, начиная с 6 версии, несколько пакетов приложений были перенесены в ядро, кардинально по функциональности и содержанию изменены функции графической визуализации.

Режим интерактивного пошагового уточнения кода предполагает согласие с предлагаемым вариантом или редактирование, и тогда ввод

² Ванцевич О.В. "К исследованию устойчивости решений задачи Баклея-Левретта". Материалы VIII Белорусской Математической Конференции, г. Минск, 2000 г. Ч. 3.

иного варианта. Больше всего подобных уточнений приходится проводить в настройках функций графики. Это естественно, т.к. базовые исправления обычно соответствуют назначениям по умолчанию, а не индивидуальным предпочтениям составителей кода. Поэтому в блокнотах с большой нагрузкой на графику лучше выполнять пошаговое изменение исходного NB документа. Именно при таком подходе будет акцентировано внимание на задании типов, цветов и толщин линий, способа задания фона, указания стиля подписей и разметки осей, формирования и оформления легенды. Такой регламент полезен не только в определении блоков, которые по разному запрограммированы составителем кода и в типовом варианте разработчиков системы, а также в выявлении блоков, где нужны дополнения по конкретным требованиям. Также важно, что при интерактивной подготовке кода для новой версии пользователь попутно увидит дополнительные опции и директивы, новые возможности.

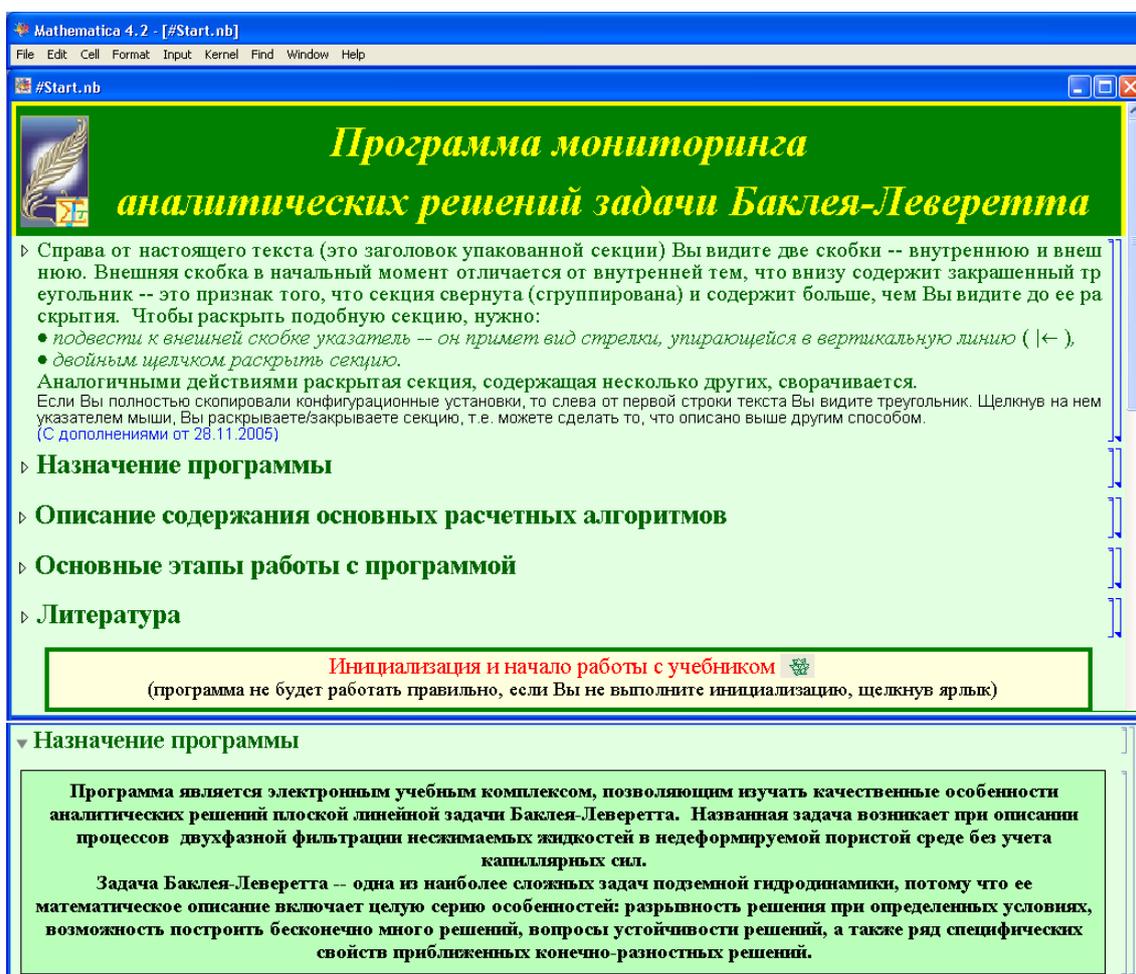


Рис. 1а. Вид главного окна программы, открытой в Mathematica 4.2

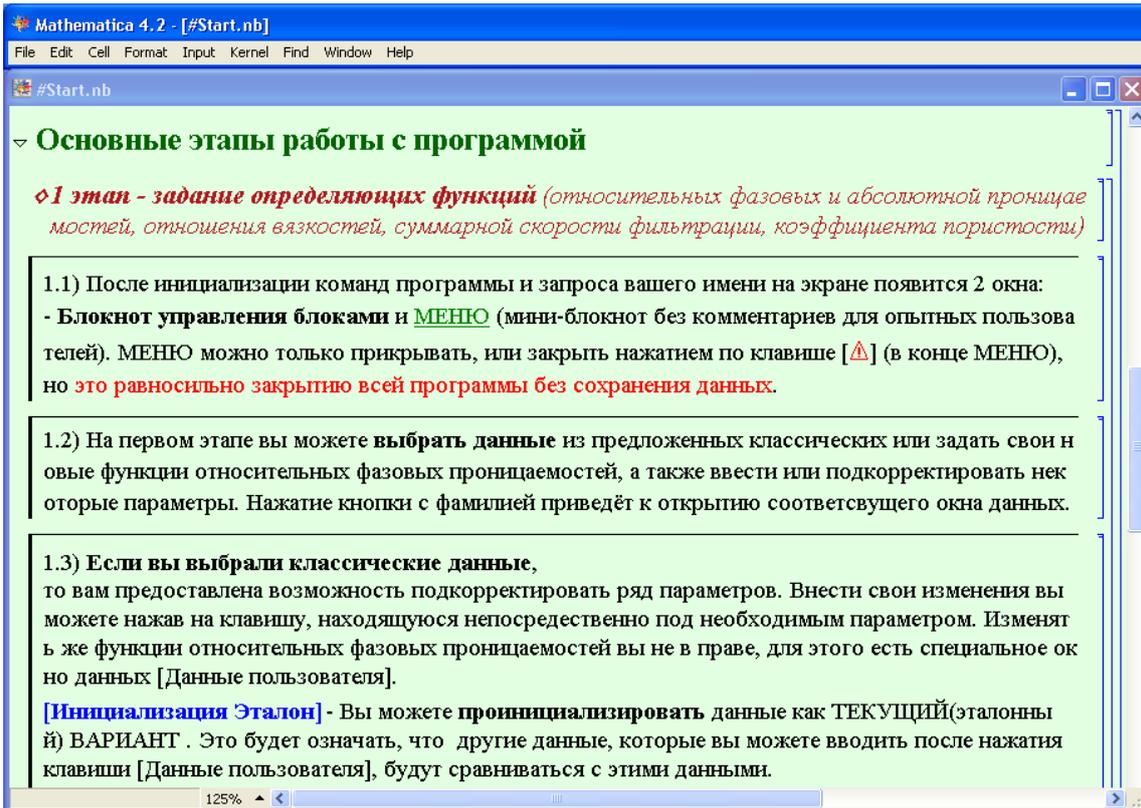


Рис. 1б. Вид окна фрагмента программы, открытой в Mathematica 4.2

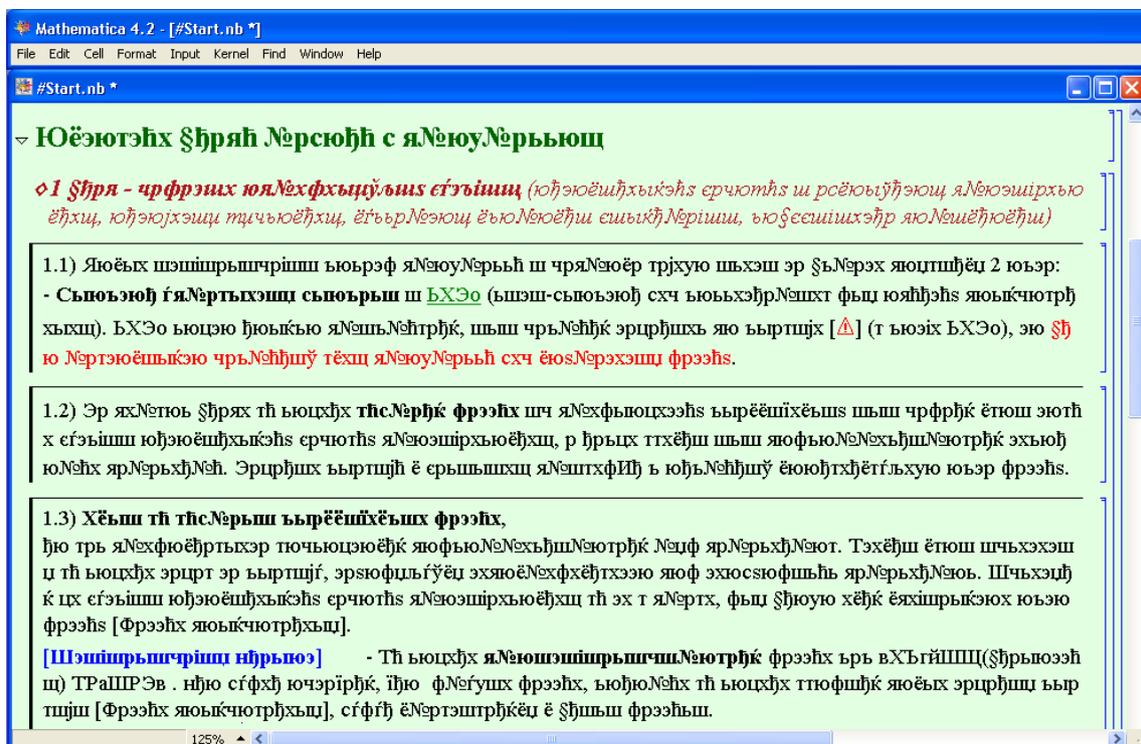


Рис. 1в. Вид окна фрагмента программы, открытой в Mathematica 3.0

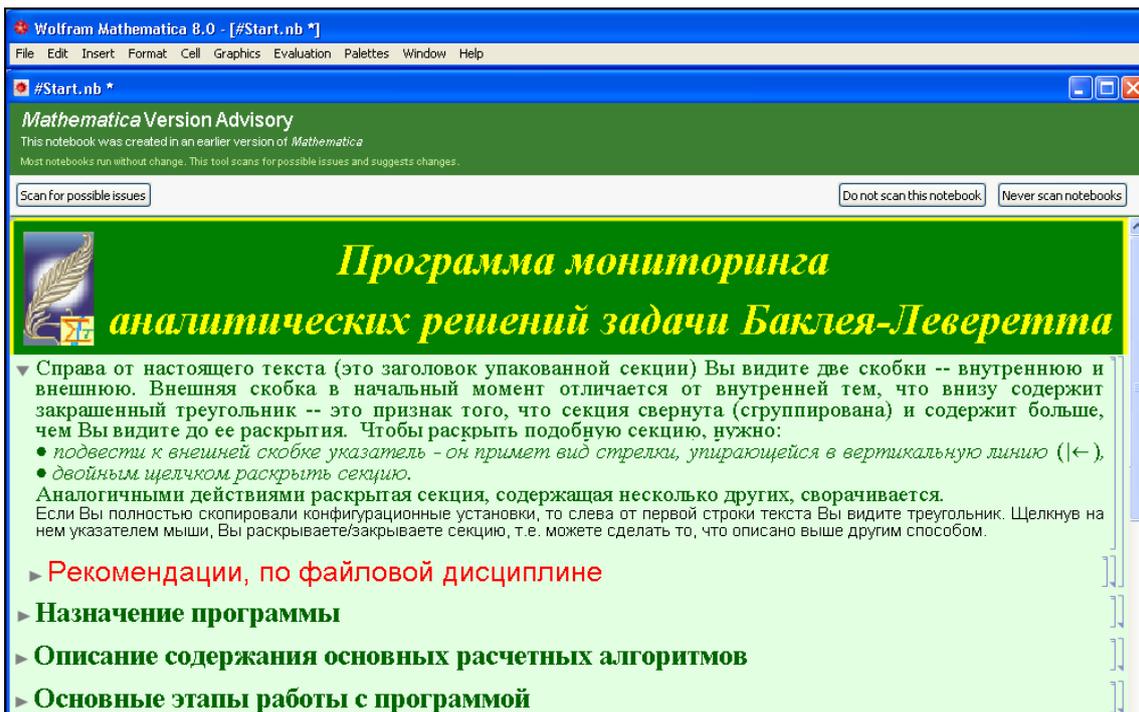


Рис. 2а. Вид главного окна программы, открытой в Mathematica 8.0

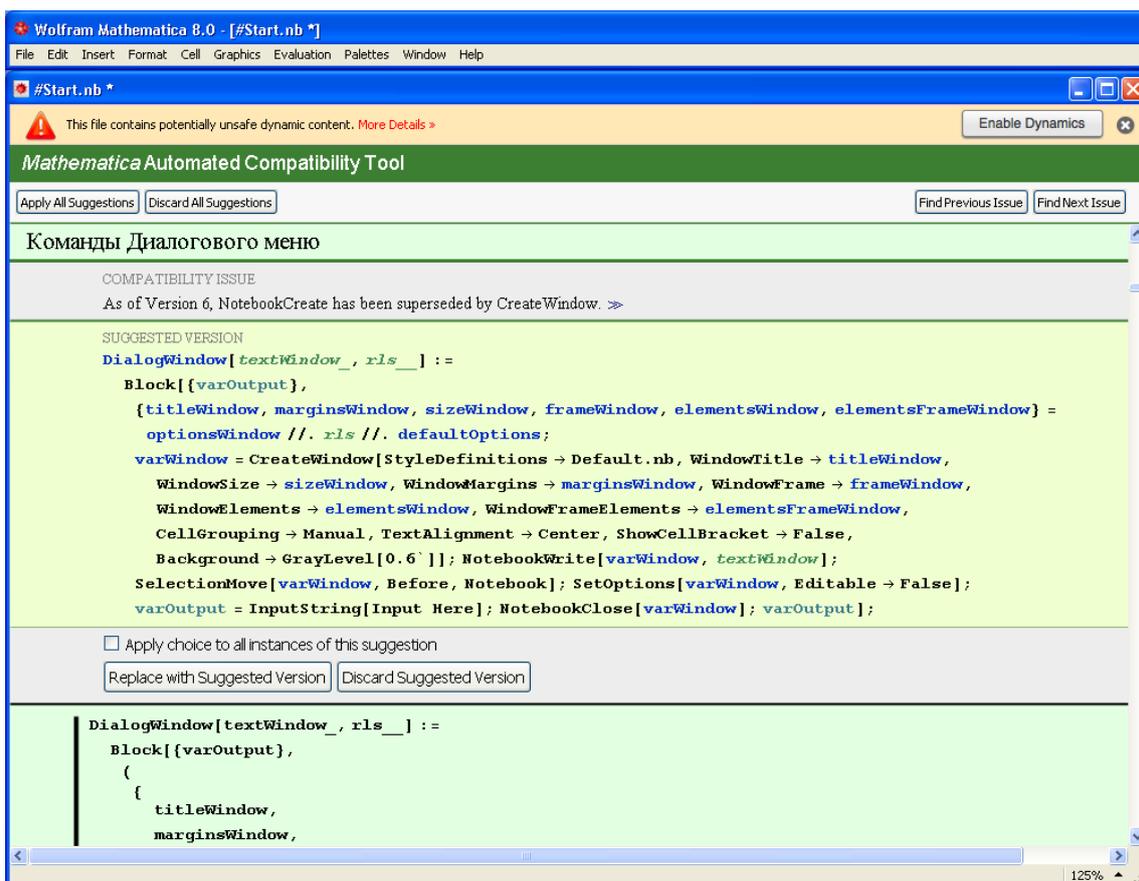


Рис. 2б. Вид окна фрагмента программы, открытой в Mathematica 8.0

2.2 Основные возможности *Mathematica*

Перечисление полного перечня возможностей системы потребовало бы в несколько раз большего объёма, чем разрешённый для данного учебного пособия. Например, руководство [8] имеет объём содержательной части более 600 страниц, но фактически в нём изложены только основные функции СКА. Первоначально вышедшая в 1988 г. и в 5-ом издании актуализированная по версии *Mathematica 5* книга “The *Mathematica* Book by Stephen Wolfram”, Fifth Edition, 2003 года издания имеет объём 1488 страниц. Перечень книг S. Wolfram можно посмотреть на сайте [9]. Изложение ниже не претендует на полноту даже в части перечисления, отмечены те аспекты, которые имеют прямое отношение к работам, выполняемым студентами БГУ при курсовом проектировании, изучении основных и дисциплин специализации, исследованиях в рамках дипломных работ, магистерских диссертаций.

Изложение ниже не претендует на полноту даже в части перечисления, отмечены те аспекты, которые имеют прямое отношение к работам, выполняемым студентами БГУ при курсовом проектировании, изучении основных и дисциплин специализации, исследованиях в рамках дипломных работ, магистерских диссертаций. При этом надо отметить, что в Республике Беларусь и, в частности, в БГУ более 10 лет система *Mathematica* активно используется в научных исследованиях и учебном процессе. Можно отметить учебные пособия [10 - 15], электронные программные комплексы [16 - 18].

Основные возможности *Mathematica* ([19, 20]):

Аналитические преобразования, символьные вычисления:

- упрощение, раскрытие и расширение выражений;
- нахождение конечных и бесконечных сумм и произведений;
- интегрирование и дифференцирование функций;
- нахождение пределов;
- решение систем полиномиальных и тригонометрических уравнений и неравенств, трансцендентных уравнений, сводящихся к ним;
- решение рекуррентных уравнений;
- разложение функций в степенные ряды (Тейлора, Маклорена), операции с рядами: сложение, умножение, композиция, получение обратной функции;
- работа с векторами и матрицами, разреженными массивами; поддержка векторного анализа, включая векторное исчисление;

- решение дифференциальных и уравнений в частных производных;
- поиск экстремумов;
- функции полиномиальной интерполяции и аппроксимации;
- преобразования Лапласа, Фурье; функции косинусного, синусного, z -преобразований;
- вейвлет-анализ;
- функции вычислительной геометрии (вычисление выпуклости оболочки, вычисление данных для построения планарного графа по заданным точкам, диаграммы Вороного, триангуляции Делоне);
- функции геометрических расчетов для регулярных полигонов (многоугольников) – число вершин, сторон, граней; список координат вершин, площадь полигона, радиус вписанной в полигон окружности, радиус описывающей полигон окружности.

Важно отметить, что в интерфейсе при вводе реализовано интеллектуальное автоматическое завершение набора и подсветка для функций, опций и других элементов, причём это интегрировано с системой документации *Mathematica*. В последних выпусках системы введена свободная форма языкового ввода – совершенно новый способ выполнения аналитических преобразований, вычислений. Пользователь может ввести фразу на английском языке, и сразу получает результат – знание синтаксиса не обязательно. Как только закончены вычисления, система выводит оптимизированные предложения о том, что можно сделать далее – нажать кнопку, чтобы вычислить новую функцию или вызвать диалоговое окно для дальнейшей работы. Такой подход к организации взаимодействия между пользователем и *Mathematica* позволяет легко ориентироваться и исследовать функциональные возможности системы.

Численные расчёты:

- вычисление значений функций, в том числе специальных, с любой задаваемой точностью;
- вычисление сумм и произведений (в том числе бесконечных);
- решение систем уравнений;
- вычисление пределов; интегрирование и дифференцирование, в том числе и табличное;
- расчёт решений дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных;
- полиномиальная интерполяция функции от произвольного числа аргументов по набору известных значений;
- дискретные преобразования Фурье и Лапласа, а также Z -

преобразование.

Статистическая обработка данных и массивов:

- функции манипулирования данными;
- символьные и численные вычисления вероятностей и условных вероятностей событий, заданных в форме логических комбинаций равенств и неравенств;
- символьные и численные вычисления ожиданий и условных ожиданий выражений;
- функции вычисления доверительных интервалов;
- функции оценивания параметров и вычисления статистических критериев соответствия для встроенных параметрических распределений и конструкторов комбинированных распределений, с использованием автоматически выбранных или явно указанных алгоритмов;
- генерирование выборки из произвольного распределения, автоматизированное оценивание параметров и проверка согласованности данных с распределениями;
- функции множественных распределений;
- поддержка функций распределений (плотность вероятностей, кумулятивная функция распределения, функция надёжности, обратная кумулятивная функция и обратная функция надёжности);
- поддержка основных типов моментов (степенные моменты, центральные моменты, полуинварианты, факториальные моменты), всех производящих функций, связанных с моментами; вычисление стандартных и несмещённых точечных оценок моментов;
- функции оценки распределений по данным, вычисления статистических критериев соответствия;
- определение и использование новых распределений, построенных из данных, формул или уже существующих распределений, в том числе поддержка копул, смесей, порядковой статистики, усечения и замены переменных;
- функции непрерывного распределения вероятностей;
- функции дискретного распределения вероятностей;
- функции дисперсионного анализа;
- функции для реализации линейной и нелинейной регрессии;
- сглаживание данных.

Графическая визуализация:

- построение кривых, иллюстрирующих поведение одной или нескольких функций одной переменной, заданных аналитическими вы-

- ражениями или по точкам в декартовых, полярных координатах; функций, заданных в параметрической форме;
- построение кривых, иллюстрирующих поведение функций с логарифмическими и полулогарифмическими масштабами;
 - построение столбиковых, секторных, финансовых диаграмм;
 - представление данных с помощью сплайна, поддержка сплайнов, включая неоднородный рациональный B-сплайн;
 - разные способы отображения на плоскости трёхмерных поверхностей, задаваемых аналитически явными, неявными выражениями, в параметрической форме, а также наборами значений высот поверхности на равномерной сетке и рассеянном множестве точек (изолинии, карты плотности, аксонометрические графики визуализации 3D фигур на основе каркасного представления);
 - разные способы оформления изображений трёхмерных поверхностей, в том числе с функциональной закрашкой, текстурным отображением изображений на трехмерных поверхностях;
 - построение графиков векторных полей, линий тока, линий тока с фоном плотности функции; графиков вихря, градиента, Лапласиана векторного поля;
 - построение проекций графиков поверхностей;
 - построение пространственных фигур стереометрии, полиэдров;
 - построение реалистических графиков рельефа;
 - формирование трехмерных графических объектов, получаемых вращением кривых относительно некоторой оси;
 - графы и сети полностью интегрированы в систему, включая построение графов, высокопроизводительные масштабируемые структуры данных, эстетическое оформление, широкие возможности для моделирования и анализа;
 - построение графиков в основных картографических системах;
 - возможности импорта рисунков и редактирования получаемых изображений инструментами встроенного редактора графики.

Повышение наглядности графиков, особенно имеющих несколько кривых или поверхностей, обеспечивается возможностями задания уровней прозрачности, выводом обозначений кривых, легенды, дополнением иллюстраций графическими примитивами. Все объекты формируемой графики при подключении соответствующей функции могут перемещаться, деформироваться в режиме реального времени.

Цифровая обработка звуковых сигналов и изображений:

- генерация типовых сигналов разной формы, частоты и длительности;

- модуляция сигналов по амплитуде и по частоте;
- создание звукового объекта с задаваемыми основной частотой гармониками и длительностью, содержащего дополнительные частоты с задаваемыми кратностями и амплитудами;
- считывание звуковых файлов с магнитного диска;
- загрузка, отображение и экспорт изображений в разных форматах;
- вычисление площадей отдельных участков изображений;
- сегментация;
- функции нахождения контуров, распознавания лиц;
- точечные, геометрические и морфологические операции, в том числе с 3D изображениями;
- цифровая фильтрация изображений;
- обработка HDR изображений и химическая спектроскопия;
- алгоритмы для захвата изображений в режиме реального времени, выделения признаков и прочего;
- вейвлет-анализ (задание вейвлетов и техника их визуализации, коллекция семейств вейвлетов, непрерывные и дискретные вейвлет преобразования, вейвлет);
- обработка и фильтрация сигналов и изображений, приближение функций вейвлетами, компрессия и декомпрессия сигналов и изображений с помощью вейвлетов.

Целостная среда и интерактивный рабочий процесс индустриального стандарта для обработки и анализа изображений. В числе поддерживаемых форматов файлов наиболее распространенные форматы графических файлов: GIF, JPEG, TIFF, PNG, SVG, PDF, DICOM и др.

Интегрируемость с внешними приложениями:

Wolfram LibraryLink даёт эффективный способ для подключения внешнего кода в *Mathematica*, обеспечивая высокую скорость и рациональное распределение памяти. LibraryLink обеспечивает прямую загрузку динамических библиотек с непосредственным обращением к ядру, возможностью вызывать функции системы в библиотеках, обмениваться любыми данными (целые, вещественные, упакованные массивы, строки, произвольные выражения).

Mathematica включает несколько программных средств для поддержки взаимодействия системы с внешними приложениями. Основные: MathLink, .NET/Link, J/Link.

Специальный протокол системы MathLink служит для соединения *Mathematica* с другими приложениями. Основными функциями

MathLink являются управление внешними программами из системы, передача данных в обоих направлениях и обмен данными между параллельными процессами в самой СКА.

.NET/Link является средством, которое служит для соединения *Mathematica* с технологической платформой Microsoft .NET, заменяющей предшествовавшие ей технологии MFC, COM, ASP и другие. Фактически J/Link и .NET/Link можно рассматривать как определенные расширения универсального протокола MathLink, имеющие некоторые специфические особенности.

J/Link обеспечивает соединение *Mathematica* с Java-приложениями, позволяет вызывать программы на Java из системы, обращаться к ядру из внешних приложений на Java. Используя J/Link, можно загружать произвольные Java-классы в СКА, создавать Java-объекты, вызывать их методы и получать доступ к их полям из программной среды системы.

Также в *Mathematica* реализованы поддержка GPU и OpenCL программирования при помощи встроенных пакетов CUDALink, OpenCLLink. Они обеспечивают аппаратное ускорение обработки линейной алгебры на GPU, реализацию дискретных преобразований Фурье и алгоритмов обработки изображений. Можно подгрузить пользовательские CUDA и OpenCL программы в систему, и наоборот написать свои собственные модули, причём CUDALink и OpenCL обеспечивают доступ к инструментам создания интерфейса в СКА, возможностям импорта/экспорта, визуализации, доступ к базам данных.

Интегрируемость с базами данных:

В *Mathematica* для работы с базами данных имеется DatabaseLink, который представляет собой набор встроенных инструментов, обеспечивает готовые промышленного уровня решения для интеграции с любой стандартной базой данных SQL; поддерживает использование построения запроса в кодах чисто SQL, системы и их комбинацию. Функции DatabaseLink обеспечивают открытие и закрытие, соединение с базой данных (в том числе с несколькими БД одновременно, непрерывно или по необходимости), получение сведений об организации баз данных; поиск, вставку и удаление данных, создание новых SQL-совместимых таблиц, модификацию существующих файлов БД или создание в системе новых. Подключение работает с большинством стандартных приложений баз данных SQL – локальных и сетевых, включая различные типы компьютеров. Поставляются драйвера встроенной поддержки для основных БД – MySQL, PostgreSQL, Open Database Connectivity (ODBC), HSQLDB. Отдельно разработанный небольшой по размеру быстрый

движок для HSQLDB, написан на Java, интегрирован с DatabaseLink, содержит драйверы JDBC и настройки необходимой конфигурации. В среде DatabaseLink можно устанавливать одну или несколько ссылок между *Mathematica* и одним или более источниками данных.

Работа с географическими объектами:

- вычисление дня недели по заданному году, месяцу и числу с возможностью задания типа календаря (григорианский или юлианский);
- преобразование заданной даты из одного календаря в другой;
- вычисление числа суток между двумя датами;
- функции манипулирования, интеграции геодезических и геоинформационных данных;
- вычисление расстояния между двумя указанными городами;
- вычисление с учетом выпуклости Земли расстояния между двумя указанными точками;
- построение в различных проекциях (азимутальной, цилиндрической) карты любой страны или всего мира.

Встроенная поддержка параллельных вычислений:

Благодаря встроенным функциям, *Mathematica* при применении пользователем соответствующих функций к собственному вычислительному коду, автоматически распределяет задачи по имеющимся процессорам, оптимизируя доступное оборудование (на многоядерных системах или локальных сетях). В системе поддерживаются все известные концепции параллельных вычислений, такие как виртуально совместно используемая или распределенная память, автоматическое или явное распределение и параллелизм, включая синхронизацию, блокирование и скрытие времени ожидания. Распараллеливание действует в любой компьютерной сети, работающей под управлением Unix, Linux, Windows, Mac OS X, и требует только лишь протокол связи TCP/IP между машинами. Функции распараллеливания эффективны в математических расчетах и в реализации сложной графики, включают машинно-независимое выполнение и параллельное программирование, а также восстановление после отказа и автоматическое перенаправление взаимосвязанных процессов в случае системной ошибки. Причём *Mathematica*, уже начиная с версии 4.0, реализует специальную технологию упакованных массивов, в её рамках были созданы специальные математические библиотеки, оптимизированные для каждого основного типа микропроцессора (Intel, AMD, IBM). Применение позволило существенно повысить скорость вычисления большинства встроенных в ядро функций.

Интерфейсная часть СКА реализована как отдельный процесс, отде-

лѐнный от процессов ее вычислительного ядра. Это обеспечивает пользователя возможностями управления вычислениями даже тогда, когда многоядерный процессор находится под предельной нагрузкой. Даже при использовании процессора с двумя ядрами система обеспечивает работу на разных ядрах интерфейсного модуля и вычислительного ядра. В итоге время обработки, традиционно значительное для прежних версий *Mathematica*, начиная с версии 5.2, сокращено более чем в 100 раз.

Работа с файлами документов:

С момента своего появления *Mathematica* зарекомендовала себя не только как универсальная мощная система для символических и численных расчетов, но и как система, обладающая разнообразными средствами подготовки технической документации. Система имеет множество инструментов для обработки текста, включает различные шаблоны стилей, обеспечивает предварительный просмотр версии для печати, управление библиографической информацией, поддержку примечаний; можно записывать и считывать файлы, представленные в форматах PDF, TEX, HTML, XML. Вместе с XML может использоваться формат стандарта MathML, который используется для передачи через Интернет математической информации со сложными формулами.

Создание и развертывание CDF документов:

Предложенный компанией Wolfram Research электронный формат вычисляемых документов (Computable Document Format или CDF) предусматривает использование печатной вѐрстки и технических обозначений системы *Mathematica*, поддерживаются компоновки документа с разбивкой на страницы, со структурной детализацией и режим слайд-шоу. Стилистическое оформление документа можно контролировать с использованием каскадных таблиц стилей. В формате CDF с помощью СКА обеспечено создание интерактивных книг, отчѐтов и приложений, свободное распространение их в виде веб-страниц или настольных приложений. CDF файлы можно просматривать с помощью бесплатной программы CDF Player, размещѐнной на сайте компании Wolfram Research.

Функции ядра и интерфейс *Mathematica* постоянно совершенствуются, повышается скорость работы. Кроме краткого перечня обновлений, приведенного выше, отдельно следует отметить несколько важных для студентов факультетов прикладной математики и информатики, механико-математического, радиофизики и компьютерных технологий принципиально новых дополнений, обеспеченных на уровнях математики и техники. В версиях, начиная с 5, значительное увеличение быстродейст-

вия было достигнуто благодаря улучшению алгоритмов. Например, при доработке модуля численного решения дифференциальных уравнений, принят специальный подход к вычислению разреженных матриц, что позволило сравняться по производительности с лидером по решению такого класса задач системой MATLAB. Реализованы высокоэффективные методы, включая: новое поколение оптимизированных функций для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных; общие функции численного решения уравнений расширены на векторные и матричные функции. В версиях, начиная с 6, *Mathematica* имеет поддержку параллельных высокопроизводительных вычислений; интегрированную обработку изображений; эффективные функции с большим числом настроек видов построения диаграмм и графической визуализации информации, векторных полей. В системе обеспечена поддержка данных из географических информационных систем (ГИС), более чем 4500 единиц измерений, в том числе для свободной языковой формы ввода, конвертации данных и проверки совместимости размерностей в графических, численных и символьных вычислениях. Начиная с версии 7, в *Mathematica* имеются функции анализа статистических моделей; высокопроизводительные функции индустриального стандарта для композиции, преобразования, обработки и сегментации изображений. В версиях 8 расширены возможности: работы с графами, сетями и линейной алгеброй; трёхмерной графики, включая отображение текстур и аппаратное ускорение рендеринга; добавлены: встроенная поддержка CUDA и OpenCL; автоматическое генерирование кода Си. В версии 9 для взаимодействия с системой реализован принципиально новый интерфейс (Wolfram Predictive Interface), который предлагает подсказки о том, что можно делать дальше. Обеспечены полный веб-доступ со стороны клиента для обмена данными с удаленными серверами и для взаимодействия с веб-API; асинхронное соединение для программирования в стиле AJAX.

Версии *Mathematica* работают на платформах Windows 2000/XP/Vista, Mac OS X, Linux x86, Solaris UltraSPARC/x86 и совместимых системах. Между разными платформами существует отличия, но одной из важнейших особенностей СКА является то, что в ней можно работать и создавать свои материалы, не обращая внимания на эти различия; команды, которые пользователь отправляет ядру, одинаковы для любой операционной системы. Пользовательский интерфейс *Mathematica* по внешнему виду в разных ОС может несколько отличаться, в частности, во внешнем виде блокнотов в разных ОС, а также в не-

которых механизмах, предусмотренных для взаимодействия с ними, т.к. окна и меню формируются средствами операционной системы.

3 СКА MAPLE

Mathematica и *Maple* являются лидерами СКА, часто их сравнивают. Представляется, что это непродуктивно. Каждая из названных систем имеет свои особенности, у них есть свои достоинства и недостатки; постоянно конкурируя друг с другом, они развиваются и совершенствуются. Большинство пользователей СКА, прежде чем выбрать для себя основную систему, испытывали несколько других. Обмен мнениями, анализ публикаций, выступлений на конференциях и семинарах позволяют утверждать, что у каждой системы есть свои приверженцы, а специалистов, использующих СКА достаточно продолжительное время, бесполезно убеждать, что иная, нежели предпочитаемая ими, система в чем-то лучше других. В большинстве случаев основным фактором использования конкретной СКА является привычка пользователя. При этом многие отмечают, что, освоив любую из систем, легко работать с другими.

По полноте функционала и интерфейсным решениям инструментальной реализации символьных и численных вычислений в системах *Mathematica* и *Maple* совершенен, вопрос не в отсутствии каких-то функций или инструментов, а в навыках пользователей.

Дать полный обзор возможностей системы *Maple*, как и *Mathematica*, невозможно. Вряд ли, кто-то из авторов даже специализированных изданий с ориентацией книги на конкретный класс задач может изложить все инструменты названных СКА из рассматриваемого ими спектра. Данный материал можно рассматривать лишь как введение в возможности системы с упоминанием классов задач по интересам студентов, магистрантов, аспирантов. Повторим, что функционал систем *Mathematica* и *Maple* почти во всём касающемся математики, прикладной математики, информатики не только достаточен, но и избыточен. Т.к. основной перечень возможностей по системе *Mathematica* уже приведен выше, а в *Maple* они тоже реализованы, здесь отметим то, что в ряде источников или опущено, или названо другими терминами.

Системам *Maple* во всем мире посвящены много книг, список которых можно найти на сайте компании разработчика в соответствующем разделе [21]. Издания на русском можно проследить по [4, 22]. Несмотря на фундаментальность и направленность на самые серьезные математи-

ческие вычисления, системы класса *Maple* необходимы довольно широкой категории пользователей: студентам и преподавателям вузов, инженерам, аспирантам, научным работникам и даже учащимся математических классов общеобразовательных и специальных школ.

Maple – типичная интегрированная программная система. Она объединяет в себе следующие составляющие ([22 - 24]):

- редактор для подготовки и изменения документов и программных модулей,
- ядро алгоритмов и правил преобразования математических выражений,
- численный и символьный процессоры,
- язык программирования,
- многооконный пользовательский интерфейс с возможностью работы в диалоговом режиме,
- справочную систему с пояснениями всех функций и опций,
- систему диагностики,
- библиотеки встроенных и дополнительных функций,
- пакеты функций сторонних производителей,
- поддержку нескольких других языков программирования.

Основной документ *Maple* – Worksheet, работа с которым подобна обычному редактированию в текстовом редакторе. Текст можно форматировать на уровне абзацев, оформляя их различными стилями, или символов. Содержимое документа можно структурировать по секциям, подсекциям и т.д. вплоть до ячеек. Секция может состоять из различных объектов: текстовых комментариев, строк ввода, строк вывода, графиков и других секций (подсекций). Отличием является наличие активной строки ввода, воспринимающей команды пользователя. Введенные команды (операторы) передаются ядру системы и возвращаются, как правило, в виде текста или графического изображения. Как и в большинстве СКА, в интерфейсе *Maple* соединены функции текстового и командного процессоров. Начиная с версии 8, в систему добавлены средства Maplets (маплеты) для поддержки визуально-ориентированного диалога. Маплеты позволяют вводить диалоговые окна, индивидуальные палитры, средства интерфейса, привычного пользователям Windows-приложений. В версиях, начиная с 11, реализована концепция «умных» документов, доступны инструменты, которые обеспечивают создание самодокументируемых контекстных меню. Например, контекстное меню для матриц позволяет вызвать матричный редактор (Matrix Browser), выполнить основные операции линейной алгебры, конвертировать матрицу в различ-

ные внешние форматы. Причём не нужно знать синтаксис команд, достаточно выбрать нужный пункт из меню, появляющегося при нажатии правой кнопкой на выбранном объекте. Эксперты отмечают, что интерфейс *Maple* организован в формате интуитивно понятного и дружелюбного диалога, что облегчает и ускоряет освоение системы.

Система *Maple* (как и *Mathematica*), интегрирует в себе три языка: входной или язык общения с системой, реализации, программирования.

Входной язык является интерпретирующим языком сверхвысокого уровня, ориентированным на решение математических задач практически любой сложности в диалоговом режиме. Он служит для задания системе вопросов или, говоря иначе, задания входных данных для последующей их обработки. Язык имеет большое число заранее определенных математических и графических функций, а также обширную библиотеку дополнительных функций, подключаемую по мере необходимости. Встроенный Maple-язык программирования считается одним из самых лучших и мощных языков программирования математических задач. Его классифицируют, как язык процедурного программирования.

Ядро системы *Maple* и все её составляющие улучшаются от версии к версии. Многие встроенные в систему функции, как и функции ядра, могут использоваться без какого-либо объявления, другие нуждаются в объявлении. Имеется ряд подключаемых проблемно-ориентированных пакетов (packages), тематика которых охватывает множество разделов классической и современной математики. Общее число функций в системе *Maple*, с учетом встроенных в ядро и размещенных в пакетах, превышает 3000. Ядро (не в полном составе) используют MATLAB и Mathcad (начиная с 14 версии, используется символьное ядро MuPAD).

3.1 Основные этапы разработки, дополнения в версиях *Maple*

Система *Maple* прошла долгий путь развития и апробации. Она реализована на больших ЭВМ, рабочих станциях Sun, ПК класса IBM PC, Macintosh и др., работающих с операционной системой Windows, Unix, Linux и совместимых.

Maple – система компьютерной алгебры, в основу которой были положены исследования группы ученых, организованной в 1980 году в университете Waterloo (Канада) К. Геддом (Keith Geddes) и Г. Гонэ (Gaston Gonnet). СКА *Maple* – продукт компании MapleSoft, которая в настоящее время является подразделением Cybernet Systems Co. Ltd. in Japan (Watcom Products Inc. – 1984 г., Waterloo Maple Inc. – 1988 г.).

На начальном этапе исследователи университета Waterloo разраба-

тывали систему для внутреннего использования, но сразу после демонстрации на профильных конференциях она заинтересовала преподавателей других университетов. К концу 1983 г. её использовали, более чем 50 университетов (Maple 1.0 и 1.1 – январь 1982 г., 2.0 и 2.1 – май и июнь 1982 г., 2.2 – декабрь 1982 г., 3.0 и 3.1 – май и октябрь 1983 г., 3.2 – апрель 1984 г.). Система с самого начала имеет собственное ядро, которое было включено и в целый ряд других СКА. Например, в Mathcad 11/12/13 и MATLAB (с пакетом расширения Symbolic Math Toolbox).

Началом промышленного распространения СКА *Maple* считается 1984 год. Даты выпуска следующих версий: 3.3 – март 1985 г. (первая широко доступная версия), 4.0 – апрель 1986 г., 4.1 и 4.2 – май и декабрь 1987 г., 4.3 – март 1989 г., V – август 1990 г., V R2 – ноябрь 1992 г., V R3 – март 1994 г., V R4 – январь 1996 г., V R5 – ноябрь 1997 г., 6 – декабрь 1999 г., 7 – июль 2001 г., 8 – апрель 2002 г., 9 – июнь 2003 г., 9.5 – апрель 2004 г., 10 – май 2005 г.; 11, 11.01, 11.02 – февраль, июль, ноябрь 2007 г.; 12 – май 2008 г., 13 – апрель 2009 г., 14 – апрель 2010 г., 15 – апрель 2011 г., 16 – март 2012 г.

Отметим ключевые позиции в выпущенных версиях, что добавлено, подключено, оптимизировано (основной источник – [23] и доступные с указанной страницы уточнения):

- ✓ Версия 4.3 – первый графический пользовательский интерфейс для Макинтоша.
- ✓ Версия 6:
 - высокопроизводительные вычислительные алгоритмы линейной алгебры библиотеки NAG;
 - связь и обмен с Microsoft Excel 2000;
 - инструменты преобразования программных кодов в коды C, Fortran и Java;
 - экспорт в большое количество форматов данных, включая TEX, HTML, RTF и DXF.
- ✓ Версия 7:
 - новые алгоритмы решения дифференциальных уравнений (в частности, для граничных задач, начальных задач, систем дифференциальных уравнений с частными производными);
 - полная поддержка MathML и XML; приложения, обеспечивающие решение задач методом конечных элементов, инструменты нелинейной оптимизации;
 - доступ к каталогу единиц измерений и физических констант науки и техники.

- ✓ Версия 8:
 - приложение Maplelets для настройки графического интерфейса, визуально-ориентированного диалога с системой, задания диалоговых окон и иных типовых средств интерфейса;
 - инструменты генерации кода в язык Java;
 - пакет для математического анализа с возможностями выполнять аналитические расчеты в режиме пошаговых команд с созданием визуальных объектов;
 - пакеты для численного решения уравнений с частными производными с граничными условиями, векторного анализа, вариационного исчисления.
- ✓ Версия 9:
 - новый программный интерфейс OpenMaple API, обеспечивающий возможности вызова ядра системы из программ, написанных на языке C, Visual Basic, а также преобразование программных кодов в коды C, Fortran, Java, MATLAB и Visual Basic;
 - модуль интерактивной графики OpenViz, с помощью которого пользователи могут создавать с заданием уровня прозрачности 3D графики и осуществлять их вращение вокруг произвольной оси;
 - новые алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) типа Риккати, линейных ОДУ 2 порядка типа Мэтью, решений в виде полиномов нелинейных ОДУ и систем ОДУ, линейных и нелинейных уравнений в частных производных, систем уравнений в частных производных;
 - новые методы решений ОДУ с начальными условиями, в том числе заданными в кусочном виде;
 - гипергеометрические решения без интегралов линейных ОДУ; алгоритмы решения трудных ОДУ Абеля первого порядка;
 - новые численные методы решения задач с начальными условиями для алгебраических дифференциальных уравнений, жестких и нежестких;
 - пакет Optimization дает средства для линейного, квадратичного и нелинейного программирования, включая задачи с ограничениями и без них, а также средства реализации алгоритмов решения методом наименьших квадратов линейных и нелинейных задач;
 - расширенное меню Tools, которое обеспечивает доступ к интерактивным обучающим программам по курсам математического анализа, линейной алгебры, функций нескольких переменных.

- ✓ Версия 10:
 - новый тип документов в виде блоков на основе достижений Rich-технологии;
 - новые средства для работы со звуком, изображениями;
 - графический Maple-калькулятор (Maple Graphing Calculator);
 - новые средства решения в аналитическом виде ряда нелинейных дифференциальных уравнений;
 - новые опции компиляции функций, в частности численного дифференцирования, производных дробного порядка, абстрактных производных, идеальных полиномов и др.;
 - улучшенные средства оптимизации и её визуализации путем построения графиков не только целевой функции, но и ограничений;
 - пакет статистических вычислений Statistics, функции для реализации регрессии, в том числе экспоненциальной, степенной, логарифмической и нелинейной регрессии общего вида.
- ✓ Версия 11:
 - самодOCUMENTИРУЕМЫЕ контекстные меню;
 - функция распознавания рукописного ввода математических выражений;
 - режим слайд-шоу, позволяющий превратить документ Maple в дидактический материал, в котором во время показа все встроенные компоненты остаются активными, а графики можно поворачивать;
 - инструменты установки ссылок на уравнения, используемые в разных документах, позволяющие хранить единственную копию основных уравнений и просто ссылаться на них в других документах – доступ к математическим выражениям из другого документа;
 - пакет Threads (многопоточное исполнение);
 - возможность анимации графика по кривым решений и по направлениям поля;
 - алгебры и группы Ли, а также группы преобразований;
 - улучшенный алгоритм решения задач с дифференциально-алгебраическими уравнениями высших индексов с поддержкой крупных систем, которые обычно возникают при инженерном моделировании;
 - сертифицированный механизм поиска действительных корней в системах многочленов;
 - команды для построения трехмерного пересечения поверхностей;
 - эллиптические решения для нелинейных ОДУ первого и второго порядков, новые алгоритмы для точных решений уравнений в частных производных;

- эффективный механизм вычислений в базисе Грёбнера;
- работающие по принципу «наведи и щелкни» обучающие курсы Calculus /Численные методы/, Algebra /Алгебраические методы/, пакет Graph Theory с широким набором инструментов для работы с графами, включая алгоритмы визуализации графов в двух и трех измерениях; пакет Physics /Физика/ для вычислений по теоретической физике с инструментами от простых приложений классической механики до вычислений по теории квантовых полей; пакет и полный учебный курс по дифференциальной геометрии (Differential Geometry) и ее приложениям; тензорный анализ; расчеты на пространствах потоков;
- модуль Scientific Constant – доступ к БД более 20 000 физических констант и свойств химических элементов.
- ✓ Версия 12:
 - интерактивные элементы управления, включающие ползунки, кнопки и шкалы;
 - инструмент Exploration Assistant для создания интерактивных мини-приложений;
 - преобразователь кодов MATLAB в Maple, который принимает и автоматически выполняет команды MATLAB, используя эквивалентные средства Maple, работает с одиночными командами и MATLAB .m файлами, поддерживает основные операции, индексацию матриц и их строение;
 - средства интеграции с базами данных: система работает с JDBC-совместимыми БД, такими как Microsoft SQL Server, Microsoft Access, Sybase, Oracle, IBM DB2 и MySQL, позволяет делать запросы, обновлять и создавать базы данных в среде Maple, автоматически обновляет результаты без использования дополнительных SQL команд;
 - представление объектов систем: создание передаточных функций для моделей на основе дифференциальных или разностных уравнений, пространства состояний, полюсов и нулей коэффициентов усиления, сверка, вызов и редактирование содержания моделей и опций, быстрое преобразование из одной формы модели в другую;
 - инструменты генерации с множеством форм волн импульсных, периодических, синусоидальных, шаговых, прямоугольных и треугольных тестовых сигналов;
 - вейвлеты: возможность вычисления прямых и обратных вейвлет-преобразований с использованием различных условий на границах,

- вейвлет-фильтры для известных семейств вейвлетов, пакет Discrete Transforms содержит численные вейвлет-преобразования для многих хорошо известных классов вейвлетов, включая Daubechies и Bi-Orthogonal Spline вейвлеты, и позволяет применить их для преобразования дискретных данных;
- пакет графический анализ, включающий: графики частотных характеристик, генерацию графиков корневых годографов, графическое изображение нулей и полюсов линейных систем;
 - возможность анализировать и решать системы параметрических полиномиальных уравнений и неравенств;
 - пакет теории чисел дополнен новой командой, проверяющей, не является ли полином циклотомическим;
 - дополнение команды solve новой эффективной библиотекой базисов Грёбнера FGb;
 - новая команда для вычисления тензора Кронекера произведения двух матриц в пакете линейной алгебры;
 - новые алгоритмы для решения классов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка и линейных дифференциальных уравнений 3-го порядка;
 - новые инструменты для работы с уравнениями с частными производными, включающие команды для работы с оператором Эйлера, сохраняющимися потоками и обобщенными интегрирующими множителями, а также для нахождения общих решений некоторых семейств линейных ОДУ с использованием инвариантов Лапласа.
- ✓ Версия 13:
- модули Maple Portal для доступа к информационным ресурсам Maple Portal for Engineers и Maple Portal for Math Educators – обеспечивают помощь при выборе интерактивных инструментов и команд для выполнения технических вычислений;
 - Vector Calculus Task Template – включает более 50 шаблонов и новые символы для представления результатов вычислений;
 - инструменты создания визуально привлекательных чертежей с возможностью размещения большого количества информации;
 - интеграция с САПР – пользователь может запрашивать параметры из чертежей САПР и отсылать их новые значения обратно с автоматическим включением в конструкцию;
 - инструмент CAD Link Assistant дает возможность интерактивно экспериментировать функциональностью взаимосвязи с системой САПР без необходимости написания программ; поддерживаются

SolidWorks и Autodesk Inventor;

- пакет Dynamic Systems с широким набором графических и аналитических инструментов для линейных инвариантных по времени систем, необходимых при разработке систем управления.

✓ Версия 14:

- модуль Maple Cloud Document Exchange – интегрированная среда для создания, распространения, получения технической документации;
- улучшенная поисковая система – ускоренная генерация результатов поиска;
- новые возможности для решения алгебраических уравнений типа Риккати;
- улучшенные инструменты линеаризации (встроенные возможности линеаризации нелинейных дифференциальных алгебраических уравнений);
- интерполяции кривых с возможностью просмотра и уточнения результатов благодаря команде ArrayInterpolation для многомерной интерполяции данных;
- интеграция с MATLAB (модуль Maple Toolbox), включая трансляцию и генерацию кода, экспорт и импорт файлов данных, вызов MATLAB из среды Maple.

✓ Версия 15:

- автоматический параллелизм – система сама определяет и задействует все доступные ядра процессоров для параллельного выполнения вычислений;
- запуск нескольких вычислительных процессов напрямую из уровня пользователя без необходимости получать права администратора;
- поддержка CUDA, в том числе на платформах Mac OS X;
- многопоточное программирование;
- интерактивные инструменты Clickable Math – более 40 новых мини-демонстраций, помогающих изучать или наглядно демонстрировать основные математические понятия;
- интерактивные ассистенты и шаблоны заданий – свыше 60 ассистентов и около 350 шаблонов заданий;
- менеджер переменных, предоставляющий простой доступ к переменным, заданным в ходе сеанса пользователя;
- новая таблица данных, которую можно встраивать непосредственно в документ пользователя;
- подключение к Интернету для извлечения и экспорта результатов сайты или импорта данных из интернет-источников в среду Maple;

- возможность быстрого поиска документов в «облачном» хранилище MapleCloud;
 - отображение всех возможных решений параметрических полиномиальных уравнений в зависимости от свойств неизвестных параметров;
 - генерация кода на языках C#, C, Java, Fortran, Visual Basic и MATLAB;
 - интеграция с САПР – реализована возможность использовать вычисления Maple для анализа и оптимизации CAD-проектов.
- ✓ Версия 16:
- модули Smart Popups (Интерактивные всплывающие окна), которые обеспечивают вывод на экран образцов математических равенств, диаграмм, разложений и других вспомогательных элементов для рассматриваемого выражения, при этом для решения, визуализации и изучения математических задач используется интуитивно понятный интерфейс – единый набор панелей, интерактивных ассистентов, контекстно-зависимых меню, учебников и других инструментов Clickable Math;
 - модуль Drag-to-Solve (Перетащите, чтобы решить), помогающий пользователям решать уравнения в пошаговом режиме простым перетаскиванием отдельных условий;
 - реализация в функциях визуализации специального «интеллектуального» представления, которое автоматически фокусирует отображение на наиболее важных для пользователя участках;
 - технологии интерполяции по регулярным и рассеянным множествам точек, сглаживания для 3D визуализации.

4 НЕКОММЕРЧЕСКИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СКА

Отличительной чертой современного состояния ИТ является то, что коммерческие программные продукты во многих случаях полностью или частично можно заменить некоммерческим программным обеспечением, аналогами с открытым исходным кодом – свободными программами. К таковым относят программные продукты, которые с изменениями или без них не имеют ограничений применения, копирования и передачи другим пользователям, за плату или безвозмездно. Ниже упоминаются программные средства, публикуемые под лицензией GPL. Поясним, что это предполагает. GPL предоставляет получателям компьютерных про-

грамм следующие права («свободы»): свободу запуска программы с любой целью; свободу изучения того, как работает программа, а также её модификации (предварительным условием для этого является доступ к исходному коду); свободу распространения копий исходного и исполняемого кода; свободу улучшения программы и выпуска улучшений в публичный доступ. В общем случае распространитель программы, полученной на условиях GPL, либо программы, основанной на таковой, обязан предоставить получателю возможность работать с соответствующим исходным кодом.

4.1 *Maxima*

Maxima – свободная полнофункциональная система компьютерной алгебры, потомок системы *Macsyma*, разрабатывавшейся в рамках проекта создания искусственного интеллекта в Массачусетском Технологическом Институте с 1968 по 1982 годы (этапы разработки и руководители групп разработчиков основных разделов перечислены в [25]). *Macsyma* (от MAC Symbolic MAnipulation), будучи первой системой аналитических вычислений, произвела в свое время переворот в компьютерной алгебре и оказала влияние на многие другие системы, в числе которых *Mathematica* и *Maple*. Изначально *Macsyma* была закрытым коммерческим проектом, доступность которого OpenSource-сообществу стала возможной благодаря профессору Техасского университета В. Шелтеру (William Schelter), который добился от Энергетического Управления США (Department of Energy, DOE) получения кода *Macsyma* и его публикации под лицензией GPL с именем *Maxima*. Профессор В. Шелтер долгое время разрабатывал как саму систему, так и один из диалектов лиспа – GCL (GNU Common Lisp), на котором разрабатывалась *Maxima*.

Кроме того, что *Maxima* является свободной полнофункциональной СКА, она имеет и другие преимущества, основным из которых является сравнительно небольшой объём – размер дистрибутива составляет около 23 Мб, а в установленном виде системе со всеми расширениями потребуется менее 85 Мб. *Maxima* состоит из интерпретатора макроязыка, написанного на Lisp, и нескольких поколений пакетов расширений, написанных на макроязыке системы или непосредственно на Lisp.

Maxima является полноценной системой компьютерной алгебры, в которой можно выполнять:

- операции с многочленами, списками, векторами, матрицами и тензорами, множествами, рациональными функциями, обобщенными функциями Дирака и Хэвисайда;

- синтаксические, алгебраические и подстановки по шаблону;
- преобразования тригонометрических и выражений со степенями и логарифмами, выносить за скобки, а также раскрывать скобки, упрощение выражений;
- нахождение пределов в конечных точках (в том числе – поиск односторонних пределов), на бесконечности;
- вычисление сумм ряда;
- дифференцирование, интегрирование;
- нахождение разложений в ряд, вычетов;
- преобразование Лапласа;
- вычисление длины кривых, площади и объема двух-, трех- и многомерных фигур.

Используя ядро и дополнительные пакеты, в *Maxima* можно решать:

- уравнения, системы линейных алгебраических уравнений (алгоритмы численного решения задач линейной алгебры почти соответствуют популярной системе компьютерной математики MATLAB);
- аналитическими методами обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядка, в частности, линейные и нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка, линейные дифференциальные уравнения второго порядка и системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка;
- приближенными методами широкий класс обыкновенных дифференциальных уравнений (разложение в ряд Тейлора и три метода возмущений для решения, классические алгоритмы Рунге-Кутты а также алгоритмы решения жестких дифференциальных уравнений);
- интегральные уравнения с фиксированными и переменными пределами интегрирования;
- задачи теории вероятностей, математической статистики и статистической обработки данных.

Эксперты отмечают, что *Maxima*, в отличие от *Mathematica* и *Maple*, в основном ориентирована на прикладные математические расчеты. В связи с этим в системе отсутствуют или сокращены разделы, связанные с теоретическими методами, как, например, теория чисел, теория групп, алгебраические поля, математическая логика. В то же время, числа в математических выражениях в системе по умолчанию предполагаются действительными. Это позволяет получать аналитические решения для многих вычислений, встречающихся в прикладных задачах (например, таких как алгебраические преобразования и упрощения, интегрирование, решение дифференциальных уравнений), для которых в комплексной

области решения не существуют.

Расчеты. *Maxima* производит численные расчеты высокой точности, используя точные дроби, целые числа и числа с плавающей точкой произвольной точности.

Графика. *Maxima* позволяет иллюстрировать функции и статистические данные в двух и трех измерениях. В системе реализованы возможности получения качественных иллюстраций, включая параметрические графики кривых и поверхностей, а также графики векторных полей и анимацию. Число настраиваемых атрибутов в системе большое. Например, типичный трехмерный график имеет около 200 атрибутов, которые можно менять по предпочтениям пользователя. Настройки и управление сгруппированы в простых интерфейсных диалогах, при работе с графическими объектами возможны: вращение, преобразование, увеличение, включение/выключение перспективы и осей. Оформление включает вывод и установки вида заголовка иллюстрации, других текстовых комментариев, задание цвета поверхности, толщины сетки и линий осей, наименований осей, числа точек шкалы осей и шрифта чисел; возможны уточнения внешнего вида поверхностных узлов, линий и точек; можно задать цвет наружного освещения, положение и цвета осветителей. В рабочем документе можно производить анимацию положения камеры, цветов, освещения, планов и других атрибутов. Графику можно экспортировать в основные векторные и растровые форматы.

Программирование. Как и другие СКА, *Maxima* имеет средства процедурного программирования и программирования по заданному правилу. Система имеет открытую архитектуру, большинство команд, хранящихся в командных файлах (с расширением .mac) могут быть прочитаны и изменены пользователем. Пользователь может программировать свои команды, пополняя библиотеку. Система генерирует коды языков Fortran и C, включая управляющие операторы (циклы, ветвления), определения subroutine и function, описания типов переменных, включая матрицы, сегментацию выражений и возможность задания оптимизации общих частей выражений.

Переносимость. *Maxima* успешно работает на всех современных операционных системах: Windows (готовые сборки доступны на сайте проекта), Linux и UNIX, Mac OS и даже на КПК под управлением Windows CE/Mobile. Главную роль в переносимости *Maxima* играет язык Lisp, на котором она написана. Исторически Lisp имеет большое количество несовместимых друг с другом диалектов, но сейчас эпоха разнообразия закончилась, поскольку появился официальный стандарт

ANSI Common Lisp. *Maxima* была модифицирована в соответствии с этим стандартом, и в результате может работать под управлением разных реализаций Common Lisp, как свободных, так и проприетарных.

Взаимодействие с системой, интерфейс. Сама по себе *Maxima* – консольная программа, все математические формулы она “отрисовывает” обычными текстовыми символами. В этом есть плюсы. Например, саму систему можно использовать как ядро, надстраивая поверх нее разные графические специализированные интерфейсы. Соответствующих примеров на сегодняшний день существует несколько.

Традиционно все СКА имеют интерфейсные пользовательские оболочки, способные представить данные в математической нотации и облегчающие взаимодействие с пользователем. Одной из таких оболочек для *Maxima* является TeXmacs – самостоятельная программа, которую классифицируют как научный WYSIWYG-редактор. TeXmacs разработан и развивается для визуального редактирования текстов со значительным объемом математической нотации, в котором пользователь видит на экране редактируемый текст практически в том же виде, в котором он будет распечатан. В частности, доступен так называемый математический режим ввода, удобный для работы с самыми разными формулами. TeXmacs поддерживает также импорт/экспорт содержания в LaTeX и XML/HTML. Именно возможностями по работе с формулами пользуется *Maxima*, вызванная из TeXmacs’a. Фактически, формулы отображаются в привычной математической нотации, но при этом их можно редактировать и копировать в другие документы.

Также есть несколько других оболочек, лучшей из которых считается wxMaxima, которая как и сама *Maxima*, помимо Linux/*BSD существует еще и в версии для MS Windows, причём реализована и в версии русского языка, но пока без встроенной справки на русском. Нужно отметить, что по функциональности графические оболочки свободных систем компьютерной алгебры пока уступают коммерческим аналогам.

Maxima хорошо документирована – имеет справочное руководство с описанием практически всех встроенных функций, оно интегрировано в систему в виде онлайн-справочника, оснащенного средствами поиска. Руководство уже переведено на несколько языков, и в настоящее время переводится на русский. Система имеет отладчик, не имеет утечек памяти, для проверки работы с ней поставляются большое число тестов.

Maxima – результат коллективного труда сотен людей. Несмотря на свой солидный возраст, система продолжают активно развиваться. Последний релиз *Maxima* 5.28.0 выпущен 27 августа 2012 г. Для первично-

го знакомства с СКА *Maxima* можно рекомендовать доступное в электронном виде учебное пособие [26].

4.2 *Axiom*

Axiom – свободная система компьютерной алгебры ([27]). Она состоит из среды интерпретатора, компилятора и библиотеки, описывающей строгую, математически правильную иерархию типов. Разработка системы была начата в 1971 году группой исследователей IBM под руководством Ричарда Дженкса (Richard Dimick Jenks). Изначально система называлась Scratchpad. Первоначально проект рассматривался как исследовательская платформа для разработки новых идей в вычислительной математике. В 90-х система была продана компании Numerical Algorithms Group (NAG), получила название *Axiom* и стала коммерческим продуктом, но не получила коммерческого успеха и была отозвана с рынка в октябре 2001 г. NAG сделала *Axiom* свободным программным обеспечением и открыла исходные коды под модифицированной лицензией BSD. Разработка системы продолжается, выходят новые версии ([27]). В 2007 г. у *Axiom* появились две ветки (форка) с открытым исходным кодом: *OpenAxiom* и *FriCAS*.

OpenAxiom (<http://open-axiom.sourceforge.net>) в июле 2011 г. выпустила версию 1.4.1. Основные изменения, реализованные в этой версии, относятся к работе компилятора. Упомянутая выше система подготовки и редактирования документов с математической нотацией GNU TeXmacs может использоваться как интерфейс *OpenAxiom*.

Другой активно развиваемой веткой *Axiom* является *FriCAS* (<http://fricas.sourceforge.net>), сейчас используется версия 1.1.8. FriCAS выгодно отличается от других СКА общего назначения развитой иерархией типов, соответствующей реальным математическим структурам.

Axiom и названные ветки на данном этапе в темпе развития уступают *Maxima*. Начинаям лучше ориентироваться на *Maxima*.

5 СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATLAB

Интерактивная система программирования *MATLAB* (сокращение от MATrix LABoratory) разработана компанией The MathWorks, Inc. Это одна из старейших, тщательно проработанных и проверенных временем систем автоматизации математических расчетов, построенная на расширенном представлении и применении матричных операций. В настоящее

время система вышла далеко за пределы специализированной матричной и стала одной из наиболее мощных универсальных интегрированных СКМ. **MATLAB** включает инструменты разработки сложных программ с развитым графическим интерфейсом, является эффективной средой для проведения исследований, создания моделей, решения естественнонаучных и инженерных задач [28, 29]. Система де-факто стала одним из мировых стандартов в области современного математического и научно-технического программного обеспечения. В первую очередь СКМ ориентирована на численные расчеты, особо выделяется матричная алгебра. Эффективность системы обусловлена, прежде всего, ориентацией на работу с многомерными массивами, большими и разреженными матрицами с программной эмуляцией параллельных вычислений и упрощенными средствами задания циклов. Последние версии системы поддерживают 64-разрядные микропроцессоры и многоядерные микропроцессоры, например Intel Core 2 Duo и Quad. Функциональные возможности системы обеспечены богатой библиотекой команд и своим языком программирования. Из-за большого числа поставляемых с **MATLAB** пакетов расширения она является и самой большой из СКМ, ориентированных на персональные компьютеры. Объем ее файлов превышает 3 Гб. Есть много изданий с описанием системы, её составляющих – по состоянию на 2009 г. из русскоязычных можно отметить [30]. **MATLAB** – коммерческая система; существуют некоммерческие варианты программных продуктов её типа, совместимые по базовым конструкциям языка, но не совместимые по библиотечным функциям. Например, Scilab, Maxima, Euler Math Toolbox и Octave.

В состав **MATLAB** входят интерпретатор команд, графическая оболочка, редактор-отладчик, профилировщик (profiler), компилятор, символьное ядро СКА *Maple* для проведения аналитических вычислений, математические библиотеки и библиотеки Toolboxes, предназначенные для работы со специальными классами задач.

5.1 Язык **MATLAB**

Система **MATLAB** – это одновременно и операционная среда, и язык программирования. Язык **MATLAB** является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления; имеется возмож-

ность создавать специальные наборы инструментов (toolbox), расширяющих функциональность и представляющих коллекции функций, написанных для решения определённого класса задач.

Программы, написанные на **MATLAB**, бывают двух типов: функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты используют общее рабочее пространство. Скрипты и функции не компилируются в машинный код, они сохраняются в виде текстовых файлов. Существует возможность сохранять так называемые pre-parsed программы – функции и скрипты, обработанные в удобный для машинного исполнения вид. В общем случае такие модули выполняются быстрее запрограммированных в других средах, особенно если функция содержит команды графики.

Программы **MATLAB**, как консольные, так и с графическим интерфейсом пользователя, могут быть собраны с помощью компоненты MATLAB Compiler в независимые исполняемые приложения или динамические библиотеки. Программы-компоновщики MATLAB Builder расширяют возможности MATLAB Compiler и позволяют создавать самостоятельные компоненты Java, .NET или Excel.

Развертывание веб-приложений на основе кода **MATLAB**. Продукты компании MathWorks для развертывания приложений позволяют разрабатывать основанные на языке СКМ компоненты для сети, выполняющие математические вычисления с интерактивной визуализацией. По разработанному в **MATLAB** алгоритму можно автоматически создать стандартный компонент и интегрировать его в веб-приложение. Это возможно благодаря программам-компоновщикам MATLAB Builder для Java или .NET. После размещения созданных приложений на сервере, пользователи могут работать с ними при помощи браузера без установки дополнительных программ на своих компьютерах.

5.2 Основные пакеты расширения

Особенностью СКМ **MATLAB** является возможность создавать специальные наборы инструментов (toolbox). Компания MathWorks поставляет более 80 наборов, которые используются во многих областях. В последних релизах компании они классифицируются по трём семействам – MATLAB, SIMULINK и Polyspace ([28]), а также партнёрские продукты.

Серия продуктов MATLAB:

- MATLAB – язык, основа всего семейства продуктов MathWorks; *Parallel Computing Toolbox* – набор средств и функций для написания параллельных алгоритмов и организации распределенных вычисле-

- ний в *MATLAB*; *MATLAB Distributed Computing Server* – серверная часть пакета для организации распределенных вычислений.
- Математика и оптимизация: *Optimization Toolbox* – набор классических алгоритмов для оптимизации стандартных задач и задач большой размерности; *Symbolic Math Toolbox* – пакет расширения, содержащий функции аналитических преобразований и поддерживающий арифметику произвольной точности, дает системе возможности решения задач в символьном (аналитическом) виде, включая реализацию точной арифметики произвольной разрядности; пакет базируется на применении ядра *Maple*; *Partial Differential Equation Toolbox* – инструменты для исследования и решения уравнений в частных производных в двух измерениях со временем; *Global Optimization Toolbox* – пакет, расширяющий оптимизационные возможности *MATLAB* и *Optimization Toolbox* для решения задач оптимизации недифференцируемых, стохастических и разрывных функций.
 - Статистика и анализ данных: *Statistics Toolbox* – набор средств для статистической обработки данных, содержащий функции и интерактивные инструменты для анализа временных рядов, статистических моделей, а также средства разработки статистических алгоритмов; *Neural Network Toolbox* – средства для проектирования, моделирования, разработки и визуализации нейронных сетей; *Curve Fitting Toolbox* – интерактивные средства предварительной обработки данных, сравнения стандартных моделей и разработки моделей пользователя, подгонки с помощью стандартных и робастных методов и анализа качества аппроксимации; *Model-Based Calibration Toolbox* – пакет, предназначенный для калибровки моделей сложных систем и механизмов, включает графический интерфейс, может применяться при калибровке датчиков системы управления двигателем для оптимизации работы впрыска, зажигания, клапанов, системы выхлопа и др.
 - Проектирование и анализ систем управления: *Control System Toolbox* – функции и графические приложения для работы с динамическими объектами и линейными замкнутыми системами управления; *System Identification Toolbox* – инструменты создания математических моделей динамических систем на основе наблюдаемых входных/выходных данных; *Fuzzy Logic Toolbox* – инструменты для проектирования систем нечеткой логики, позволяющие создавать экспертные системы на основе нечеткой логики, проводить кластеризацию нечеткими алгоритмами, а также проектировать нечеткие нейросети; *Robust Control Toolbox* – пакет расширения для разработки сис-

тем управления объектами с неопределенностями и нелинейностями различного типа, позволяющий проектировать и настраивать системы управления с учетом чувствительности к неопределенным параметрам, возмущениям и ошибкам модели; *Model Predictive Control Toolbox* – пакет расширения для исследования и проектирования алгоритмов управления с предсказанием динамики, позволяющий создавать системы адаптивного управления для сложных систем с одним или несколькими входами (выходами) и различными ограничениями; *Aerospace Toolbox* – инструменты для анализа и моделирования авиационных, космических, реактивных и турбореактивных систем; содержит средства для преобразования координат, векторов, кватернионов и тензоров, функции для вычислений аэродинамических показателей, специальную графику и средства моделирования.

- Обработка сигналов и связь: *Signal Processing Toolbox* – набор типовых функций для цифровой и аналоговой обработки сигналов; *Communications System Toolbox* – алгоритмы и инструменты для проектирования, моделирования и анализа систем связи; включает алгоритмы кодирования данных, канального кодирования, перемежения, модуляции, эквалайзеров, синхронизации, а также модели каналов связи; имеются инструменты, предназначенные для анализа битовых ошибок, генерации глазковых диаграмм и созвездий модулированного сигнала, визуализации характеристик канала; *DSP System Toolbox* – алгоритмы и инструменты для проектирования и моделирования систем обработки сигналов, таких как системы связи, радары/сонары, системы управления, медицинские измерительные приборы и другие устройства; *Wavelet Toolbox* – функции вейвлет-преобразования, средства разработки вейвлет-алгоритмов, функции анализа, синтеза, фильтрации, сжатия и обработки, а также инструменты для кратномасштабного анализа одномерных и двумерных данных; *Fixed-Point Toolbox* – пакет расширения, обеспечивающий поддержку типа данных и арифметики с фиксированной точкой; *RF Toolbox* – функции и графические приложения для анализа, расчета и визуализации различных сверхвысокочастотных (СВЧ) систем и радио компонентов, таких как усилители, смесители, передающие устройства, СВЧ фильтры; *Phased Array System Toolbox* – алгоритмы и инструменты для проектирования, моделирования и анализа систем обработки сигналов для фазированных антенных решеток; включает в себя алгоритмы для генерации сигналов, формирования луча, оценки направления прихода сигнала, обнаружения целей, и пространственно-

- временной адаптивной обработки.
- Обработка видео и изображений: *Image Processing Toolbox* – набор типовых эталонных алгоритмов для обработки и анализа изображений, в том числе функций фильтрации, частотного анализа, улучшения изображений, морфологического анализа и распознавания; *Image Acquisition Toolbox* – пакет расширения для захвата изображений и видео с внешних PC-совместимых устройств и передачи напрямую в СКМ, позволяет автоматически обнаруживать и конфигурировать видеоустройства, осуществлять просмотр и захват изображений непосредственно из среды **MATLAB** и **Simulink**, поддерживает большинство современных устройств (веб-камер и фреймграбберов, высокоточных промышленных видеокамер и микроскопов); *Mapping Toolbox* – полный набор средств для построения карт, обработки и визуализации картографических данных; включает стандартные функции преобразования картографических проекций, расчета линий прямой видимости и другие вычисления геометрии Земли, используемые в геодезии, картографии, экологии, океанографии, в нефтегазоразведывательной и аэрокосмической отраслях.
 - Тесты и измерения: *Data Acquisition Toolbox* – набор программных средств для ввода/вывода аналоговых и цифровых данных; позволяет автоматически обнаруживать и конфигурировать внешние устройства и платы ввода/вывода; *Instrument Control Toolbox* – пакет расширения, обеспечивающий взаимодействие с внешними измерительными устройствами, осциллографами, функциональными генераторами и аналитическими инструментами; *SystemTest* – среда для организации тестирования алгоритмов СКМ и проверки отказоустойчивости **Simulink** систем; включает в себя шаблоны тестов для создания специальных процедур проверки, позволяет организовать коллективный доступ к процедурам тестирования для большой команды разработчиков в период всей работы с проектом; *OPC Toolbox* – позволяет **MATLAB** и **Simulink** реагировать на события OPC сервера, управлять различными внешними OPC-устройствами с помощью единого простого синтаксиса, содержит графическое окно OPCtool для интерактивной работы, и блоки для чтения/записи живых данных с OPC серверов во время моделирования; *Vehicle Network Toolbox* – позволяет посылать и принимать CAN пакеты напрямую из **MATLAB** или **Simulink**; осуществляет кодирование, декодирование и фильтрацию CAN сообщений, позволяет работать с файлами баз данных CAN промышленных стандартов.

- Вычислительная биология: *Bioinformatics Toolbox* – набор функций и алгоритмов для обработки биологических данных, исследований в области биоинформатики, геномной инженерии и разработки лекарственных препаратов; включает инструменты для выравнивания нуклеотидных последовательностей, редактирования белковых цепочек, инструменты для построения филогенетических деревьев различными методами; осуществляет поддержку форматов представления геномных и белковых данных, содержит средства визуализации и анализа; *SimBiology* – библиотека для имитационного моделирования, анализа и визуализации биохимических процессов; содержит средства настройки биологических типов, параметров, реакций, правил и кинетических законов модели.
- Автоматическая генерация кода: *MATLAB Coder* – генерирует автономный C и C++ код из кода *MATLAB*; созданный код является платформонезависимым; *MATLAB Coder* поддерживает основные возможности языка, в том числе операторы языка, функции и матричные операции; может генерировать MEX функции, которые позволяют ускорить части кода СКМ, содержащие большой объем вычислений, а также провести верификацию сгенерированного кода; *Filter Design HDL Coder* – добавляет возможность аппаратной реализации фильтров в *MATLAB*, позволяет создавать эффективный, синтезируемый и портируемый VHDL и Verilog код, описывающий фильтры с фиксированной точкой, которые были разработаны в DSP System Toolbox, для последующей реализации на СБИС или ПЛИС.
- Финансовые вычисления: *Financial Toolbox* – пакет расширения, дополняющий возможности *Statistics Toolbox* и *Optimization Toolbox* функциями и процедурами анализа финансовых данных; служит инструментом для решения задач оптимизации инвестиционного портфеля, оценки рисков, анализа процентных ставок и деривативов, а также анализа финансовых временных рядов; *Datafeed Toolbox* – пакет расширения, обеспечивающий доступ к интернет-базам данных финансовой информации в режиме онлайн; позволяет отслеживать данные биржевых индексов и котировок в реальном времени и использовать их для расчетов и принятия решений; *Financial Instruments Toolbox* – функции для моделирования и анализа ценообразования бумаг с фиксированной доходностью, кредитования и формирования портфеля ценных бумаг; *Econometrics Toolbox* – набор инструментов моделирования поведения экономических систем, анализа волатильности; позволяет выполнять симуляцию методом Монте-

Карло и прогнозирование на основе линейных и нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, строить одномерные ARMAX/GARCH сложные модели с различными GARCH вариантами, а также многомерные VARMAX модели.

- Разработка приложений: *MATLAB Compiler* – специальный инструмент, позволяющий создавать независимые приложения в средах СКМ; обеспечивает преобразование программного MATLAB-кода, графики и интерфейса в независимые приложения, не требующие для исполнения присутствия платформы *MATLAB*; *Spreadsheet Link EX* – пакет расширения, обеспечивающий доступ к MATLAB-функциям из среды Microsoft Excel; *MATLAB Builder EX (for Microsoft Excel)* – пакет, расширяющий возможности *MATLAB Compiler* средствами разработки надстроек для Microsoft Excel (Add-ins); *MATLAB Builder JA (for Java language)* – средства преобразования функций *MATLAB* в java-классы; *MATLAB Builder NE* – средства генерации независимых .NET компонент и COM объектов; *MATLAB Production Server* – позволяет запускать MATLAB-программы в производственной среде пользователя; Web, базы данных и корпоративные приложения подключаются к MATLAB-программам запущенным на *MATLAB Production Server* через клиентскую библиотеку.
- Подключение к базам данных и отчетность: *Database Toolbox* – пакет расширения для работы с базами данных; обеспечивает соединение с ODBC/JDBC базами, импорт и экспорт данных, средства взаимодействия с базами данных, функции формирования SQL-запросов и получения результатов, содержит графический интерактивный мастер SQL-запросов; *MATLAB Report Generator* – средство создания отчетов из СКМ, позволяющее автоматически документировать алгоритмы и функции, включать графику в состав отчетов, управлять шаблонами и настраивать внешний вид генерируемой документации, создавать отчеты в форматах: HTML, PDF, RTF, DOC и XML.

Серия продуктов SIMULINK:

- SIMULINK – графическая среда имитационного моделирования, позволяющая при помощи блок-диаграмм в виде направленных графов строить динамические модели, включая дискретные, непрерывные и гибридные, нелинейные и разрывные системы; *Simulink Report Generator* – средство создания отчетов; позволяет автоматически документировать модели *Simulink* и *Stateflow*, включать технические требования и спецификации в состав отчетов, управлять шаблонами и настраивать внешний вид генерируемой документации, создавать от-

четы в форматах HTML, PDF, RTF, DOC и XML; обеспечивает сохранение Simulink-моделей в HTML формате для интерактивного просмотра в обычном веб-обозревателе.

- Моделирование систем с фиксированной точкой. *Simulink Fixed Point* – расширение, позволяющее моделировать и проектировать системы, использующие арифметику с фиксированной точкой; позволяет проводить имитационное моделирование с битовой точностью, исследовать эффекты дискретизации и насыщения для систем цифровой обработки сигналов, связи, систем управления и т.п.
- Событийное моделирование: *Stateflow* – расширение среды *Simulink* для моделирования логики событий, состояний и переходов в сложных событийных системах; часть интегрированной среды *MATLAB* и *Simulink*, которая позволяет создавать системы, совмещающие в себе модели физических объектов и логику смены их состояний и событий; *SimEvents* – библиотека *Simulink* для моделирования систем с дискретными состояниями, использующая теорию очередей и систем массового обслуживания.
- Физическое моделирование: *Simscape* – продукт, расширяющий возможности *Simulink* для моделирования физических объектов с использованием различных технологий (электронной, механической, гидравлической и других); *SimMechanics* – библиотека *Simulink* для физического моделирования механических систем; позволяет создавать модели механических объектов и совместно с другими пакетами *MathWorks* разрабатывать реальные прототипы систем управления; *SimPowerSystems* – расширяет *Simulink* инструментами для моделирования электросиловых систем генерации, передачи, распределения и потребления электроэнергии; *SimDriveline* – библиотека *Simulink* для физического моделирования двухмерных механических объектов; продукт специально ориентирован на моделирование трансмиссий и приводов; *SimHydraulics* – библиотека *Simulink* для физического моделирования гидравлических систем; расширяет среду имитационного моделирования *MATLAB* и *Simulink*, позволяя строить модели сложных гибридных гидромеханических, электромеханических объектов и систем управления для них; *SimElectronics* – библиотека *Simulink* для моделирования и имитации электронных и электромеханических систем; позволяет добавлять внутрь моделей аналоговые электронные и электромеханические компоненты, создавать новые подсистемы с помощью структурных блоков полупроводниковых компонент, приводов, движителей, двигателей и датчиков; *Thermolib* – расширением (toolbox) для моделирования и симуляции широкого

- спектра термодинамических систем из различных областей.
- Графическое моделирование: *Simulink 3D Animation* – инструменты визуализации динамически смоделированных систем в среде 3D; обеспечивает взаимодействие между **MATLAB** и *Simulink* и виртуальной реальностью написанной на языке Virtual Reality Modeling Language (VRML); даёт возможности менять положение, поворот, размер и другие свойства объектов в виртуальном мире; *Gauges Blockset* – пакет расширения *Simulink*, который позволяет оснащать модели графическими приборами и измерительным оборудованием; можно создавать реалистичные экраны и дисплеи, которые будут модифицированы под создаваемую модель и будут внешне соответствовать окружению, которое моделируете.
 - Проектирование и анализ систем управления: *Simulink Control Design* – пакет расширений *Simulink* для линеаризации сложных нелинейных объектов; в состав пакета входят средства для работы со сложными нелинейными объектами и многоконтурными системами управления, функции интерактивного синтеза регуляторов классическими и специальными методами (размещение полюсов, частотные характеристики, модальное регулирование, линейно-квадратичное управление (LQG, LQR), синтез наблюдателей, фильтр Калмана); *Aerospace Blockset* – библиотека *Simulink*-блоков, содержащая специальные инструменты для моделирования, интегрирования и имитации авиационных, космических, реактивных и турбореактивных систем; включает блоки с математическими моделями аэросистем и физических явлений, блоки для решения уравнений движения и преобразования координат, блоки навигации и управления; библиотека основана на утвержденных отраслевых стандартах для моделирования атмосферы, турбулентностей, гравитации и геоцентрических координат, что позволяет разрабатывать, тестировать и проверять модели различных летательных аппаратов и их системы управления; *Simulink Design Optimization* – инструмент, позволяющий по входным и выходным данным реальной физической системы настраивать и калибровать её модель в *Simulink*; функции пакета позволяют с помощью графического интерфейса определять и калибровать параметры системы, начальные условия для дифференциальных уравнений, различные табличные функциональные соотношения.
 - Обработка сигналов и связь: *Communications System Toolbox* – алгоритмы и инструменты для проектирования, моделирования и анализа систем связи; алгоритмы представлены в виде MATLAB-функций,

системных объектов и *Simulink* блоков; пакет включает алгоритмы кодирования данных, канального кодирования, перемежения, модуляции, эквалайзеров, синхронизации, а также модели каналов связи; имеются инструменты, предназначенные для анализа битовых ошибок, генерации глазковых диаграмм и созвездий модулированного сигнала, визуализации характеристик канала; *DSP System Toolbox* – алгоритмы и инструменты для проектирования и моделирования систем обработки сигналов, таких как системы связи, радары/сонары, системы управления, медицинские измерительные приборы и другие устройства; включает методы проектирования специализированных КИХ-и БИХ-фильтров, БПФ, методы многоскоростной обработки и методы для обработки потоковых данных, инструменты для создания прототипов работающих в реальном времени; *SimRF* – библиотека компонентов и среда моделирования для разработки высокочастотных систем; включает в себя смесители, усилители, блоки заданные S-параметрами и другие основные блоки для проектирования и моделирования беспроводных передатчиков; *Computer Vision System Toolbox* – алгоритмы и инструменты для проектирования и моделирования компьютерного зрения и систем обработки видео; возможности представлены в виде функций *MATLAB*, системных объектов *MATLAB* и блоков *Simulink*; включает в себя алгоритмы извлечения свойств объекта, обнаружения движения, слежения за объектами, стерео зрения, обработки и анализа видео.

- Автоматическая генерация кода: *Simulink Coder* – создает и исполняет C и C++ код из моделей *Simulink*, диаграмм и функций *MATLAB*; *Embedded Coder* – генерирует читаемый, компактный и быстрый C/C++ код для использования на встроенных процессорах, отладочных платах и микроконтроллерах; *HDL Coder* – продукт для генерации полноценного Verilog и VHDL-кода по *Simulink* моделям и Stateflow диаграммам; расширяет возможности разработки аппаратных устройств в среде СКМ и обеспечивает генерацию VHDL и Verilog кода с побитовым и цикловым соответствием исходной модели *Simulink*; *DO Qualification Kit (для DO-178)* – пакет инструментов, содержащий документацию, контрольные примеры и методики, которые позволяют подготовить проверочные инструменты для проектов, выполняемых по стандарту DO-178; *IEC Certification Kit (для IEC 61508 и ISO 26262)* – пакет инструментов, который обеспечивает набор документации, сертификатов и шаблонов, которые помогают использовать *Embedded Coder* или инструменты проверки кода

PolySpace в тех проектах, которые будут сертифицированы по стандартам IEC 61508 или ISO 26262; *Simulink PLC Coder* – продукт позволяет автоматически генерировать соответствующий стандарту IEC 61131 код для программируемых логических контроллеров (PLC) и программируемых контроллеров автоматизации (PAC).

- Быстрое прототипирование и моделирование HIL: *xPC Target* – высокопроизводительная среда типа сервер-клиент, позволяющая соединить *Simulink* и Stateflow модели с реальными физическими исполнительными механизмами и выполнять их в реальном времени, используя универсальную PC платформу; обеспечивает функционал для быстрого прототипирования систем управления, программно-аппаратного тестирования и разработки приложений в открытой аппаратной платформе; *xPC Target Embedded Option* – расширение пакета *xPC Target*, позволяющее реализовывать и распространять готовые встроенные аппаратные устройства на базе PC-платформы; *Real-Time Windows Target* – программный продукт, обеспечивающий выполнение модели *Simulink* в реальном времени непосредственно на ОС Windows для быстрого прототипирования или программно-аппаратного тестирования систем управления и обработки сигналов.
- Верификация, валидация и тестирование: *Simulink Verification and Validation* – пакет расширения *Simulink* для проведения полного комплекса тестирований и проверок систем с учетом технических требований; *Simulink Design Verifier* – набор средств для автоматического создания тестов, удовлетворяющих полному покрытию модели; *SystemTest* – среда для организации тестирования алгоритмов *MATLAB* и проверки отказоустойчивости *Simulink* систем; *HDL Verifier* – дополнительный пакет для взаимодействия с HDL симуляторами производства Mentor Graphics, Cadence и Synopsys, позволяющий верифицировать VHDL, Verilog и разработки со смешанным кодом; *Simulink Code Inspector* – пакет расширения для автоматического сравнения сгенерированного кода с его исходной моделью для удовлетворения требований инспекции кода (Code Review) для DO-178 и других стандартов разработки критичного к безопасности ПО.

5.3 Партнёрские продукты

Более 300 партнерских продуктов и решений, дополняющих возможности *MATLAB* и *Simulink*, доступно на сайте [31]. Часть из них перечислены выше, отдельно отметим продукты семейства Polyspace для верификации (в настоящее время этим вопросам уделяется повышенное

внимание всех производителей программного обеспечения):

Polyspace Client for C/C++ и *Polyspace Server for C/C++* представляют собой верификаторы кода, которые доказывают отсутствие таких ошибок, как переполнение памяти, деление на ноль, выход за пределы массива и другие ошибки исполнения (runtime errors) в исходном коде, можно запускать задачи верификации на вычислительном кластере. Основные особенности: верификация на уровне классов или файлов, используется метод абстрактной интерпретации, ошибки исполнения показываются непосредственно в коде, проверка на соответствие кода MISRA-C:2004, MISRA-C++:2008, JSF++, несоответствия также указываются непосредственно в коде, вывод различных статистик о качестве и сложности кода, интеграция с Eclipse и Microsoft Visual Studio.

Используя *Polyspace Client* из командной строки или графического интерфейса пользователя Visual Studio или Eclipse можно:

- определить какие компоненты, файлы и классы нужно верифицировать;
- выбрать опции верификации (целевую платформу, кросс-компилятор);
- проверить код на соответствие стандартам MISRA-C:2004, MISRA-C++:2008, и JSF++ (Joint Strike Fighter Air Vehicle C++);
- исправлять ошибки на стадии разработки, до тестирования и развёртывания;
- отправить задачу верификации на сервер, работающий в кластере.

Для более производительных (с точки зрения скорости) верификаций *Polyspace Server for C/C++* позволяет запускать задачи верификации на вычислительном кластере. Задачи передаются на сервер с клиентской части *Polyspace* - *Polyspace Client for C/C++*. Основные особенности: доступ к статусу верификации и метрикам через Web браузер, автоматическое планирование задач на кластере и уведомления по e-mail, собственный планировщик задач, поддержка многоядерных кластеров, автоматическое создание отчетов, одновременная работа в различных ОС.

Polyspace Model Link SL расширяет возможности *Polyspace Client for C/C++* и *Polyspace Server for C/C++* инструментами, позволяющими передавать сгенерированный C код напрямую из *Simulink* моделей. Основные особенности: используются передовые методы верификации кода, обрабатывается весь спектр значений переменных кода пользователя; передает результаты верификации обратно в *Simulink* модель; проверки запускаются из *Simulink* или командной строки **MATLAB**; *Polyspace Model Link SL* интегрируется с *Polyspace Client for C/C++* или *Polyspace*

Server for C/C++. Пользователь может:

- исправлять ошибки, вносимые неэффективностями проекта;
- независимо верифицировать сгенерированный код;
- оценить насколько робастным является код для конкретной платформы;
- исправлять ошибки на стадии разработки, до тестирования и развёртывания.

Можно верифицировать подсистему, референсный блок, S-функцию или любой переиспользуемый компонент системы. Типичные обнаруживаемые ошибки времени исполнения:

В модели:

- переполнение, потеря значимости;
- деление на ноль и другие арифметические ошибки;
- выход за пределы массива;
- недостижимый код.

В коде:

- некорректное разыменование;
- чтение неинициализированной переменной;
- опасные преобразования типов.

В заключение отметим, что целью подготовки настоящего пособия было познакомить читателя с основными возможностями систем компьютерной алгебры, реализованных технологий программирования, а не дать обзор СКА, число которых постоянно увеличивается. Функциональные возможности программных средств для символьных вычислений расширяются, в очередных версиях каждой конкретной появляются функции из систем конкурентов, но, фактически, большинство дополнений являются повторением или развитием инструментов упомянутых выше СКА, как в аспектах базовых технологий, так и в части рассматриваемых разделов математики. Представляется, что к одной из основных задач можно отнести изучение приёмов функционального программирования в любой из СКА, тогда освоение другой не потребует значительного времени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. – М.: Мир, 1991. –352 с.
2. Дьяконов В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры. – М.: ДМК Пресс, 2009. –1264 с.
3. Аладьев В.З., Шишаков М.Л. Введение в среду пакета Mathematica 2.2. – М: Информационно-издательский дом "Филинь", 1997. –368 с.
4. Аладьев В.З., Ваганов В.А. Модульное программирование: Maple vs Mathematica, and vice versa. –СА: Palo Alto, Fultus Corp., 2011. –417 с.
5. List of computer algebra systems. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems
6. Mathematica. История версий. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://ru.wikibooks.org/wiki/Mathematica/История_версий
7. Mathematica Quick Revision History. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica/quick-revision-history.html>
8. Дьяконов В. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК Пресс, 2009. –624 с.
9. Stephen Wolfram. Books. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.stephenwolfram.com/publications/books/>
10. Прокопеня А.Н., Чичурин А.В. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие. – Минск: БГУ, 1999. –264 с.
11. Морозов А.А., Таранчук В.Б. Численные методы и программирование в системе Mathematica : учеб. пособие. – Минск: БГПУ, 2004. – 119 с.
12. Кулешов А.А. Уравнения математической физики в системе Mathematica : учеб. пособие. – Минск: БГУ, 2004. –293 с.
13. Голубева Л.Л., Малевич А.Э., Щеглова Н.Л. Компьютерная математика. Символьный пакет Mathematica : курс лекций. – Минск: БГУ, 2005. –102 с.
14. Морозов А.А., Таранчук В.Б. Программирование задач численного анализа в системе Mathematica : учеб. пособие. – Минск: БГПУ, 2005. –145 с.
15. Кулешов А.А., Пачинин В.И., Пачинина Л.И. Математическая статистика. Решение прикладных задач в системе Mathematica : учеб.

Пособие. – Минск: БГУИР, 2006. –363 с.

16. <http://www.elbook.bsu.by/> Кулешов А.А., Земсков С.В., Позняк Ю.В. Электронное учебное пособие по высшей математике на базе системы МАТНЕМАТИСА. – Минск: БГУ, 2001.

17. <http://www.elbook.bsu.by/> Кулешов А.А. Экономико-математические методы и модели. – Минск: БГУ, 2003.

18. <http://www.elbook.bsu.by/> Полозов М.Н., Клёван Р.А. Теоретическая механика с системой Mathematica. – Минск: БГУ, 2006.

19. Что нового в системе Mathematica 9. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica/new-in-9/>

20. Сайт русскоязычной поддержки Wolfram Mathematica. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://wolframmathematica.ru/>

21. Maplesoft. Books. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.maplesoft.com/books/index.aspx>

22. Дьяконов В. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – М.: ДМК Пресс, 2011. –800 с.

23. Maple Product History. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.maplesoft.com/products/maple/history/>

24. Аладьев В.З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования. - М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2006, –792 с.

25. Система компьютерной алгебры Maxima. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://maxima.sourceforge.net/ru/>

26. Стахин Н.А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima. (ПО для решения задач аналитических (символьных) вычислений): учебное пособие. –М.: 2008. –86 с.

27. AXIOM. The Scientific Computation System. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://axiom-developer.org/index.html>

28. MathWorks. MATLAB. The Language of Technical Computing. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.mathworks.com/products/matlab/>

29. . Центр компетенций MathWorks. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://sl-matlab.ru/>

30. Дьяконов В.П. MATLAB R2007/2008/2009 для радиоинженеров. – М.: ДМК Пресс, 2010. –976 с.

31. Партнерские продукты. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://sl-matlab.ru/products/polyspace-client>

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ	4
1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ...	5
1.1 Назначение, как работают системы компьютерной алгебры.....	7
1.2 Типовая структура СКА	9
1.3 Основные функциональные возможности СКА	10
2 СКА WOLFRAM MATHEMATICA	12
2.1 Фрагменты хронологии версий <i>Mathematica</i>	14
2.2 Основные возможности <i>Mathematica</i>	20
3 СКА MAPLE.....	29
3.1 Основные этапы разработки, дополнения в версиях <i>Maple</i>	31
4 НЕКОММЕРЧЕСКИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ СКА.....	38
4.1 <i>Maxima</i>	39
4.2 <i>Axiom</i>	43
5 СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MATLAB.....	43
5.1 Язык <i>MATLAB</i>	44
5.2 Основные пакеты расширения.....	45
5.3 Партнёрские продукты	54
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	57

Учебное издание

Таранчук Валерий Борисович

ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

**Пособие для студентов
факультета прикладной математики
и информатики**

В авторской редакции

Ответственный за выпуск *В. Б. Таранчук*

Подписано в печать – 23.07.2013. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 50 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Проспект Независимости, 4, 220030, Минск.

Отпечатано на копировально–множительной технике
факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.
Проспект Независимости, 4, 220030, Минск.