1. ВВОД И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 681.327.22

С.В.Абламейко, Б.С.Берегов, Л.В.Бокуть

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРНОГО СТРОЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СИММЕТРИИ

На основе принципа симметрии рассматриваются клеточные и фрактальные структуры изображений как частные случаи регулярных структур. Выделены зеркальная и косая симметрии в качестве признаков распознавания объектов на изображении. Для двумерной клетки на изображении предложены проективные и топологические инварианты.

Введение

Принцип симметрии, по выражению В.И. Вернандского, "охватил и охватывает все новые области науки". Само понятие симметрии содержит два противоречивых момента: преобразования и инварианта. Рассматриваемые преобразования совершаются на уровне элементов, находящихся между собой в определенном отношении эквивалентности. Совокупность элементов и их структурных связей, образующих целостную систему, при этом сохраняется.

В связи с этим под структурой в широком смысле слова понимается инвариантный аспект любой целостной системы на определенном этапе ее развития. Выделение структурных подуровней в объекте приводит к определению его групп симметрии, т.е. совокупности преобразований, сохраняющих инвариантность объекта. Поэтому симметрия определяется как закон строения структурных объектов.

1. Подходы к представлению изображений

Эффективность систем обработки изображений связана с возможностями представления информации изображения в одной из ее основных частей - базе данных изображений.

В настоящее время выделяют несколько подходов к представлению изображений и множество структур данных для реализации этих представлений. К способам представления изображений относятся: позиционный, структурный, комбинированный.

При позиционном представлении [1] плоскость изображения разбивается с помощью прямоугольной сетки на элементы одинакового размера - квадраты, которые являются наименьшими неделимыми частями изображения. Взаимное расположение хранимых элементов соответствует расположению квадратов разложения исходного изображения.

Позиционное представление широко применяется для хранения полутоновых изображений. Недостатком его является большая емкость памяти. Проблема увеличения объема данных не может быть решена лишь количественными методами. Ведется поиск новых подходов для решения таких проблем обработки изображений, как избыточность их, эффективность представлений.

Структурное представление изображений является одним из таких новых концептуальных подходов. Структурное описание позволяет представить изображение набором базисных элементов, базисные элементы - набором графических примитивов, а также набором отношений внутри каждой группы этих компонентов. Структурное представление позволяет уменьшить емкость памяти и время выполнения некоторых операций обработки изображений [2].

Структурное представление изображения можно разделить на представление изображения в виде объектов и их отношений и представление формы отдельно взятого объекта [3]. Описание формы отдельно взятого объекта может быть выполнено либо с помощью задания набора параметров, характеризующих эту форму, либо с помощью задания его контура. При описании контура наибольшее распространение получили топологические структуры, представляющие собой семейство упорядоченных точечных наборов, которые включают изолированные точки, линейные сегменты и наборы точек [4].

В работе предлагается новое топологическое описание изображений, основанное на теории клеточных комплексов и позволяющее представить изображение в виде объектов - клеточных комплексов и их отношений. Данное представление основано на непротиворечивой топологии конечных множеств и позволяет с большей эффективностью описывать объекты реального мира.

Для клеточного представления изображений введены топологические инварианты 2-клеток, достаточные для топологического описания объектов на изображении в случае, если оно имеет небольшую топологическую сложность.

В работе приведены также некоторые современные методы исследования инвариантности структур изображений относительно группы подобия (зеркальная симметрия) и аффинной и проективной групп преобразований (косая симметрия). Зеркальная и косая симметрия выделены в качестве признаков распознавания объектов на изображении.

2. Регулярные структуры изображений и их свойства

Будем рассматривать изображения как сформированные из простейших элементов - образующих - на основе определенных правил, налагающих ограничения на способы формирования комбинаций образующих. Такой принцип построения характеризует регулярные структуры изображений, введенные Гренандером У.

Регулярные структуры обладают следующими свойствами: атомистичности, комбинаторности, наблюдаемости и реалистичности [5].

Свойство атомистичности состоит в том, что структуры порождаются из образующих, описанных с помощью соответствующих векторов признаков.

Свойство комбинаторности. Комбинация образующих, у которых связаны выходные и входные связи, называется конфигурацией. Каждая конфигурация характеризуется типом соединения и отношением связей.

Тип соединения V представляет собой некоторое множество графов, не обязательно конечное, описывающее способ соединения связей образующих. Отношение связей ρ характеризует допустимость соединения связей. В случае задания комбинаторного правила конфигурация регулярна, если ее топология соответствует типу соединения и все ее соединенные связи удовлетворяют отношению связей .

Свойство наблюдаемости. Изображения или объекты, поддающиеся наблюдению, представляют собой классы эквивалентности, индуцированные на множестве регулярных конфигураций правилом идентификации. Наблюдатель пытается восстановить внутреннюю структуру, комбинаторную регулярность, составляющую основу изображения.

Свойство реализма. Реально наблюдается деформированное изображение, которое обладает собственной структурой регулярности.

На основе вышеизложенного к регулярным структурам изображений отнесем фрактальные и клеточные структуры.

Фрактальные структуры рассматриваются теорией фракталов как занимающие пространство между точками, прямыми, плоскостями и объемами в отличие от воспринимаемых объектов в одном, двух или трех измерениях. Фрактальные структуры имеют дробную размерность [6]. Фрактальная геометрия дает более ясный взгляд на устройство окружающего мира.

Важной характеристикой фрактальных объектов является их самоподобие. Объект, обладающий точным самоподобием, имеет следующее свойство: каждая его небольшая часть при увеличении точно воспроизводит части, имеющие больший размер. Характеристикой самоподобия является фрактальная размерность.

Для объектов евклидова пространства вводилась топологическая размерность, совпадающая с фрактальной. Так, размерность любого конечного или счетного множества точек есть $\dim_T = 0$. Размерность любого связного множества точек есть $\dim_T+1$, если оно может быть разрезано на две несвязанные части исключением из него как минимум $\dim_T$-мерного множества точек.

Топологическая размерность может быть только целым числом. Топологическая размерность прямой равна 1, плоскости и сферы - 2, шара - 3. Размерность самоподобия вычисляется как $D = \ln N / \ln n$, где N - число объектов, подобных данному (из которых его можно составить), имеющих в n раз меньший, чем у него, пространственный масштаб. Вообще, фракталами называются самоподобные объекты, обладающие нецелой размерностью Хаусдорфа-Безиковича [7].

Применяя теорию фракталов к обработке изображений, можно определить изображение как фрактальную решетку. Под фрактальной решеткой понимается система, устроенная на больших масштабах как соответствующий регулярный фрактал, а на минимальном масштабе регулярный фрактал соответствует одному узлу решетки, соединенному связями с другими узлами.

Рассмотрим клеточные структуры изображений, т.е. структуры клеточных комплексов.

Клеточный комплекс $C = (X,B,\dim)$ есть множество X абстрактных элементов (клеток) с условием антисимметричного, иррефлексивного и транзитивного бинарного отношения $B \subset X \times X$, называемого отношением ограничения, и с функцией размерности $\dim: X \to I$ из X во множество I неотрицательных целых чисел, так что $\dim(x_1) < \dim(x_2)$ для всех пар $(x_1,x_2) \in B$. Клетки можно интерпретировать как грани многогранника [1].

Говорят, что клетка x_1 ограничивает клетку x_2 более высокой размерности, т.е. $(x_1,x_2) \in B$, если x_1 является гранью x_2. Например, точка может быть 0-мерной гранью отрезка или треугольника, или тетраэдра. Двумерные элементы или 2-клетки при обработке изображений ассоциируются с понятием пикселов, так как значение яркости, приписанное пикселу, происходит от измерения количества энергии, излученной с элементарной площади.

Функция dim определяет размерность каждого элемента. Комплекс называется k-мерным, если размерность всех его элементов меньше или равна k.

Применяя теорию клеточных комплексов к обработке изображений, можно определить изображение как 2-мерный (3-мерный) клеточный комплекс с меткой яркости, приписанной каждой клетке.

Важным понятием такого подхода является иерархия классов объектов, при которой объект внутри некоторого уровня иерархии определяется заданием подмножества объектов низшего уровня, которые были предварительно определены. Эти объекты должны удовлетворять некоторым отношениям. Новый объект получается из старых с помощью теоретико-множественных операций.

Фрактальные объекты также иерархичны - каждый такт их развития дает объект, который некоторым образом уточняет, детализирует предыдущий [6].

3. Симметрия и инварианты

Условия существования целостного объекта или изображения в нашем случае в своих внутренних основаниях определяются глубинными симметриями. Понятие симметрии содержит два существенных момента: движение фигуры относительно элементов симметрии (или взаимное движение ее частей) и сохранение фигуры, возврат к ее первоначальному состоянию в результате данного движения. Под элементами симметрии понимают точки, линии, плоскости.

Единство сохранения и движения - вот краткая формула симметрии. Сохранение есть преимущественно физический, а инвариантность - математический термин для выражения форм симметрии. Под сохранением обычно понимают неизменность во времени, тогда как инвариантность имеет более широкий смысл неизменности относительно преобразований любого типа.

Итак, под инвариантностью понимается свойство неизменности или сохраняемости некоторых величин или абстрактных структур по отношению к определенным изменениям или математическим преобразованиям.

В формальном смысле симметрия означает, что некоторая структура инвариантна относительно некоторой группы преобразований [8].

В исследовании общих проблем регулярности симметрия играет существенную роль, так как метод симметрии обладает способностью выявлять инварианты преобразований, описывать внутреннюю структуру материальных систем как объектов научного исследования.

Проникновение в структуру исследуемых объектов тесно связано с исследованием различных типов симметрии. Рассмотрим их.

Пусть 1-D функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[-a;a]$. Говорят,что функция зеркально симметрична относительно начала координат, если $f(x)=f(-x)\ \forall\ x$, и антисимметрична, если $f(x)=-f(-x)\ \forall\ x$.

Любую функцию можно представить как сумму симметричной и антисимметричной функций: $f(x)=f_s(x)+f_{as}(x)$.

Мера симметрии определяется следующим образом [9]:

$$S\{f(x)\}=\frac{\|f_s(x)\|^2}{\|f(x)\|^2}=\frac{\|f_s(x)\|^2}{\|f_s(x)\|^2+\|f_{as}(x)\|^2},$$

причем $S\{f(x)\}\in[0;1]$, $S\{f(x)\}=1$, если $f(x)$ симметричная, $S\{f(x)\}=0$, если $f(x)$ антисимметричная.

Для того чтобы вычислить меру симметрии $S\{f(x)\}$, необходимо разложить функцию $f(x)$ на симметричную и антисимметричную компоненты. Если дано множество базисных функций, которое состоит из чисто симметричных и чисто антисимметричных функций, такая декомпозиция может быть получена проектированием функции $f(x)$ на подпространства, натянутые на соответственно симметричные и антисимметричные функции. К такому базису относится базис Фурье, состоящий из чисто симметричных функций косинуса и чисто антисимметричных функций синуса.

Используя комплексную гармоническую формулировку ряда Фурье, получим меру симметрии:

$$S\{f(x)\} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}^2\{f(n)\}}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}^2\{f(n)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}^2\{f(n)\}}.$$

Зеркальная симметрия 2-D функции f(x,y), определенной на круге радиуса a с центром в начале координат, измеряется относительно оси t, проходящей через начало координат и образующей угол Q с положительной осью OX.

2-D функция f(t,s) зеркально симметрична, если $f(t,s)=f(t,-s)\ \forall\ t,s$ из области определения, и антисимметрична, если $f(t,s)= - f(t,-s)$.

Мера 2-D зеркальной симметрии относительно оси t определяется следующим образом:

$$S_\Theta\{f\} = \frac{\int \left\| f_s(s,t') \right\|^2 dt'}{\int \left\| f(s,t') \right\|^2 dt'} = \frac{\int \left\| f_s(s,t') \right\|^2 dt'}{\int \left\| f_s(s,t') \right\|^2 dt' + \int \left\| f_{as}(s,t') \right\|^2 dt'},$$

причем $S_\theta\{f\} \in [0,1]$, $S_\theta\{f\} = 1$, если f чисто симметрична относительно оси t и $S_\theta\{f\}=0$, если f чисто антисимметрична относительно оси t.

Данная мера может быть также выражена следующим образом:

$$S_\Theta\{f\} = \frac{\int \sum \mathrm{Re}^2\{F_\Theta(n,t')\} dt'}{\int \sum \left| F_\Theta(n,t') \right|^2 dt'},$$

где $F_\theta(n,t)$ есть комплексный коэффициент ряда Фурье разложения функции f(s,t).

Важной проблемой является обнаружение и распознавание форм и их симметрий, даже если они испытали сильные искажения при обработке изображений, т.е. обнаружение косых симметрий [10].

Пусть дан плоский многоугольник с последовательностью вершин $Q=\{Q_1,Q_2,Q_3,\ldots,Q_N\}$, и нам нужно определить, может ли он быть изображением зеркально-симметричного многоугольника. Пусть вершины замкнутой многоугольной кривой $P=\{P_1,P_2,\ldots P_N\}$ переходят в вершины Q_i изображения Q при преобразовании T.

Каждой вершине многоугольной кривой ставим в соответствие две независимые инвариантные величины, т.е. сигнатуры ρ^L и ρ^R для каждого преобразования, так как одного инварианта недостаточно для полного восстановления многоугольника при любом преобразовании.

Выделяются два общих случая палиндромических последовательностей:

- симметричные последовательности вершин, палиндромичные относительно i-го элемента:

$$\rho^R(i-k)=\rho^L(i+k);\quad \rho^L(i-k)=\rho^R(i+k);$$

- симметричные последовательности ребер, палиндромичные относительно пространства между элементами i-1 и i:

$$\rho^R(i-k-1)=\rho^L(i+k); \quad \rho^L(i-k-1)=\rho^R(i+k).$$

Известно,что при аффинных преобразованиях сохраняются отношения площадей. Поэтому последовательности сигнатур $\{\rho(1), \rho(2), \ldots \rho(N)\}$, поставленные в соответствие вершинам многоугольника $Q=\{Q_1,Q_2,\ldots,Q_N\}$, должны быть функциями отношений площадей различных форм,закрепленных последовательно в вершинах Q_i .

Определим пару инвариантов:

$$\rho^L(i)=\frac{\left\|\Delta\left(q_i^L, Q_{i-1}, Q_i\right)\right\|}{\left\|\Delta\left(Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}\right)\right\|}\ ; \quad \rho^R(i)=\frac{\left\|\Delta\left(Q_i, Q_{i+1}, q_i^R\right)\right\|}{\left\|\Delta\left(Q_{i-1}, Q_i, Q_{i+1}\right)\right\|},$$

где q_i^L, q_i^R - пересечения отрезков, $\|\Delta(A,B,C)\|$ - площадь $\Delta(A,B,C)$.

Совместная палиндромическая структура $\{\rho^L(i)\}$ и $\{\rho^R(i)\}$ достаточна для определения аффинной косой симметрии.

При проективных преобразованиях сохраняются антигармонические отношения. Для четырех коллинеарных точек P_1,P_2,P_3,P_4 антигармоничные отношения определяются как

$$CR(P_1,P_2,P_3,P_4)=\frac{\left\{\left\|(P_1,P_2)\right\|\times\left\|(P_3,P_4)\right\|\right\}}{\left\{\left\|(P_1,P_4)\right\|\times\left\|(P_2,P_3)\right\|\right\}}.$$

Последовательность сигнатур $\{l(1), l(2),\ldots,l(N)\}$, поставленная в соответствие множеству $Q=\{Q_1,Q_2, \ldots , Q_N\}$, основывается, следовательно, на антигармоническом отношении коллинеарных точек, закрепленном для вершин Q_i, или пересечениях прямых, проходящих через эти вершины.

Получаем пару инвариантов l^L и l^R, где l^L - антигармоничное отношение величин A_i^-, A_i, A_i^+ и Q_{i+2} , причем A_i^- есть точки пересечения линий $Q_{i-2}Q_{i-1}$ с линией $Q_{i+1}Q_i$, A_i - точки пересечения линий $A_i^-Q_{i+2}$ и $Q_{i-1}Q_i$, A_i^+ - точки пересечения линий $A_i^-Q_{i+2}$ и $Q_{i-1}Q_{i+1}$ соответственно.

Аналогично определяется l^R. На рис.1 $l^L(i)$ отмечается квадратиками, а $l^R(i)$ - кружками. Для определения проективной косой симметрии достаточно совместной палиндромической структуры $\{l^L(i)\}$ и $\{l^R(i)\}$.

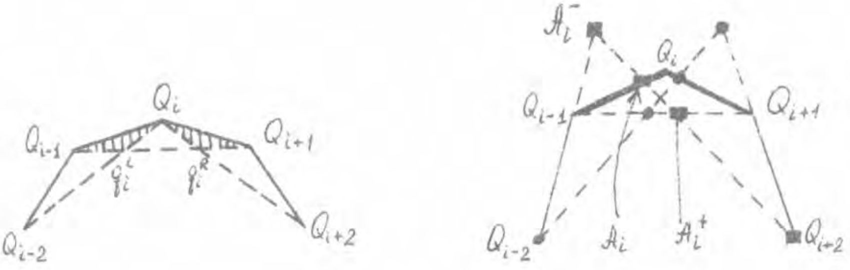

Рис. 1. Инварианты многоугольников

Итак, обнаружение косой симметрии является процессом обнаружения инвариантности относительно композиции двух преобразований: одного, характеризующего имеющуюся симметрию, и второго - зрительного искажения.

4. Геометрические и топологические инварианты 2-клеток

При структурном описании изображения важной является задача выделения признаков, характеризующих геометрические и топологические особенности изображения. Так, для распознавания объектов на изображении, полученных под различными углами зрения, необходимы признаки, инвариантные относительно проективного преобразования.

Если сцена плоская, то искажение исходной системы координат может быть описано проективным преобразованием

$$x' = \left(a_0 + a_1 x + a_2 y\right)\big/\left(1 + c_1 x + c_2 y\right);$$

$$y' = \left(b_0 + b_1 x + b_2 y\right)\big/\left(1 + c_1 x + c_2 y\right), \qquad (1)$$

где x, y - координаты в исходной системе координат и x′, y′ - координаты в другой системе координат.

Пусть (i,j,k) - площадь треугольника с вершинами (x_i, y_i),(x_j, y_j), (x_k, y_k), т.е.

$$\left(i,j,k\right) = \left(x_i y_j - x_j y_i + x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k\right)\big/2 =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Площадь считается отрицательной, если вершины треугольника нумеруются по часовой стрелке.

Если J(x,y) - якобиан проективного преобразования (1) в точке (x,y), т.е.

$$J\left(x,y\right) = \frac{1}{\left(1 + c_1 x + c_2 y\right)^3}\cdot\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

то после этого преобразования площадь треугольника может быть выражена следующим образом:

$$\left(i,j,k\right)' = \left(i,j,k\right)\sqrt[3]{J\left(x_i,y_i\right)J\left(x_j,y_j\right)J\left(x_k,y_k\right)}.$$

Итак, площадь треугольника есть так называемый относительный инвариант. Это свойство используется для построения абсолютных проективных инвариантов, т.е.инвариантов, которые вообще не изменяют свое значение при проективном преобразовании.

Простейший абсолютный инвариант - двойное отношение пяти точек:

$$\rho = \{(1,2,3)(1,4,5)\}/\{(1,2,4)(1,3,5)\}.$$

Рассмотрим многоугольник с n вершинами, где каждая вершина задается координатами (x_i, y_i).

Для того чтобы гарантировать инвариантность относительно выбора начальной точки, используются следующие относительные проективные треугольные инварианты [11]:

$$R_{k1,k2,k3} = \prod_{i=1}^{n} \left(i, \left(i + k1 - 1\right) \bmod n + 1, \left(i + k1 + k2 - 1\right) \bmod n + 1\right),$$

где n = k1 +k2 +k3.

Абсолютным проективным инвариантом многоугольника, т.е. 2- клетки, является отношение двух относительных треугольных инвариантов, если каждая вершина появляется в числителе и знаменателе с одной частотой. После нормализации абсолютный проективный треугольный инвариант имеет вид

$$I_{k1,k2,k3} = R_{k1,k2,k3} / R_{1,1,n-2}.$$

Рассмотренные инварианты не зависят от выбора начальной точки. Однако они могут быть использованы для вершин многоугольников, а не для множества изолированных точек.

К топологическим инвариантам изображения относятся: число связных компонент на изображении, число дыр, эйлерова характеристика, размерность, группа гомологий, ориентируемость, фундаментальная группа [12].

Вычисление групп гомологий дает сведения об отверстиях в клеточном комплексе и о его кручении. Для произвольного клеточного комплекса K клеточная группа гомологий определяется как $H_n K = H_n (K^n, K^{n-1})$, где K^n, K^{n-1} - n- и n-1-мерные скелеты комплекса K.

Фундаментальная группа характеризует гомеоморфность двух сравниваемых комплексов. Если фундаментальные группы клеточных комплексов не совпадают, то анализируемые комплексы заведомо не гомеоморфны.

Топологический инвариант ориентируемость используется, чтобы исключить из рассмотрения поверхности, не имеющие физической реализации в R^3. Эйлерова характеристика клеточного комплекса является ключевым понятием при исследовании его связности. Эйлерова характеристика двумерного графического изображения P определяется следующим образом:

$\chi(P)$ = (количество черных компонент P) - (количество дыр в P).

Нами реализованы алгоритмы вычисления некоторых топологических признаков объектов на изображении.

Заключение

В работе в рамках нового подхода к исследованию структурного строения изображений на основе принципа симметрии рассмотрены регулярные структуры изображений и как их частные случаи - фрактальные и клеточные структуры. Отмечена связь между исследованием структурного строения объектов на изображении и существованием различных типов симметрии.

В качестве признаков распознавания объектов на изображении выделены зеркальная и косая симметрия. Для 2-мерной клетки на изображении предложены проективные и топологические инварианты.

Результаты исследований, изложенных в данной работе, вносят существенный вклад в развитие теории симметрии для обработки изображений.

Литература

1. Абламейко С.В., Берегов Б.С., Бокуть Л.В. и др. Клеточные комплексы как унифицированное средство представления графических изображений.- Минск ,1992. -26с. (Препринт/Ин-т техн. кибернетики АНБ; N 7).

2. K.Voss. Discrete Images, Objects and Functions in Z^n. Springer-Verlag,1993.

3. Чукин Ю.В. Структуры данных для представления изображений// Зарубежная радиоэлектроника.-1983.- № 8.- С. 85-107.

4. Chang S. K., Kunil T. L. Pictorial Data-Base Systems //Computer, v.14, p.13-21,1981.

5. Гренадер У. Лекции по теории образов. -М.:Мир, 1983.-т.1-3.

6. Александров В.В., Горский Н.Д. Представление и обработка изображений: Рекурсивный подход. - Л.:Наука, 1985.-192с.

7. Фракталы в физике/ Под ред. Пьетронеро Л.- М.: Мир, 1988.-562 с.

8. Шубников А.В., Копцик В.А. Симметрия в науке и искусстве.-М.: Наука, 1972.- 340с.

9. K.S.Yuen,W.W.Chan.Two Methods For Detecting Symmetries, Pattern Recognition Letters, v.15, p.279-286, 1994.

10. L.Van Gool, T.Moons. The Characterisation and Detection of Skewed Symmetry, Computer Vision and Image Understanding,v.61, p.138-150, 1995.

11. J.Flusser, T.Suk. Pattern recognition by affine moment invariants, Pattern Recognition, v.26, p.167-174,1993.

12. L.Bokut, S.Ablameyko, B.Beregov. Topological invariants of cellular image complexes /Мат. 3-й международной конф. "Распознавание образов и обработка информации".- Минск,1995.