УДК 512.55

В.М. ШИРЯЕВ

АНАЛОГ ДЛЯ *m*-КОЛЕЦ ЗАДАЧИ САЛЛИВАНА

The article deals with AE-*m*-rings, *i. e.* such *m*-rings (K, +, · , ○), in which every endomorphism of the ring (K, +, ·) has to be an endomorphism of the semigroup (K, ○). It is proved, that any AE-*m*-ring K is aperiodic and with some light condition of commutativity is a extention of a nilpotent *m*-ring with exponent ≤ 3 by an idempotent *m*-ring, satisfying the identity $a\circ b\circ c = a\circ c\circ b$. Under certain conditions on idempotents this extention will split.

Используется терминология и обозначения, введенные в [1–3], а также принятые в теории полугрупп [4–6], колец [7–9], универсальных алгебр [10]. Универсальная алгебра (K, +, ·, ○) называется *m*-кольцом, если алгебра (K, +, ·) является ассоциативным коммутативным кольцом с операциями сложения “+” и умножения “·” (редукт *m*-кольца K), алгебра (K, ○) – полугруппой с операцией суперпозиции “○” (*o*-полугруппа *m*-кольца K), которая дистрибутивна справа относительно кольцевых операций сложения и умножения.

Задача Салливана [11] для (ассоциативных) колец заключается в том, чтобы найти описание колец, у которых всякий эндоморфизм аддитивной группы является эндоморфизмом мультипликативной полугруппы. Такие кольца были названы AE-кольцами и привлекли внимание многих авторов [12–15]. Эти исследования привели к решению задачи Салливана для многих классов AE-колец (например, подпрямо и прямо неразложимых, алгебр над полями). По аналогии *m*-кольцо (K, +, ·, ○) названо AE-*m*-кольцом, если всякий эндоморфизм редукта (K, +, ·) является эндоморфизмом его *o*-полугруппы (K, ○). Аналогия для *m*-колец задачи Салливана заключается в вопросе о строении AE-*m*-колец. Решение позволит в какой-то мере выяснить, как строение редукта *m*-кольца влияет на строение самого *m*-кольца. В данной работе выделен класс AE-*m*-колец с некоторым слабым условием коммутативности и показано (теорема 3), что всякое AE-*m*-кольцо из этого класса является расширением трехступенно 0-нильпотентного *m*-кольца (где суперпозиция любых трех элементов равна нулю) при помощи идемпотентного слабо *c*-коммутативного *m*-кольца (последнее означает перестановочность внутренних правых сдвигов полугруппы (K, ○)). Это расширение расщепляется при некоторых дополнительных условиях на идемпотенты.

Перед формулировкой теорем приведем некоторые обозначения, определения и допущения. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_2 = \mathbb{N}\setminus\{1\}$. $X \sqcup Y$ – дизъюнктное объединение множеств X и Y. Полугруппа (K, ○) называется идемпотентной (левой связкой, прямоугольной связкой, коммутативной связкой (полурешеткой)), если выполняется соотношение $\forall a\in K(a = a^{[2]})$ (соответственно $\forall a, b\in K\ (a\circ b = a)$, соответственно $\forall a, b\in K\ (a\circ b\circ a = a)$, соответственно $\forall a, b\in K\ (a\circ b = b\circ a)$). Полугруппа (K, ○) называется полурешеткой левых связок, если существует ее гомоморфизм на полурешетку, причем прообраз каждого элемента этой полурешетки является левой связкой. Ассоциативное коммутативное кольцо (K, +, ·) называется хопфовым (сильно хопфовым (*strong Hopfian* [16])), если всякий его сюръективный эндоморфизм является автоморфизмом (соответственно всякий его ненулевой эндоморфизм является инъективным). Пусть теперь (K, +, ·, ○) есть *m*-кольцо. Из условий правой дистрибутивности суперпозиции относительно кольцевых операций, т. е.

$$\forall a, b, c\in K\ ((a + b)\circ c = a\circ c + b\circ c), \tag{1}$$

$$\forall a, b, c\in K\ ((a\cdot b)\circ c = (a\circ c)\cdot(b\circ c)), \tag{2}$$

следует, что преобразования ψ_c (правые сдвиги *o*-полугруппы *m*-кольца K): $x \mapsto x\circ c$ являются эндоморфизмами кольца (K, +, ·). Через $\operatorname{Im}\psi_c$ и $\operatorname{Ker}\psi_c$ обозначаются соответственно образ и ядро эндоморфизма ψ_c. Если $\operatorname{Ker}\psi_0 = K$, то *m*-кольцо K называется нуль-симметричным. В этом случае 0 является нулем полугруппы (K, ○). В данной работе все рассматриваемые *m*-кольца предполагаются нуль-симметричными. Для тождественного преобразования применяется обозначение ψ_1. Множество ненулевых элементов *m*-кольца K обозначается через $K^{\#}$. Если $x\in K$ и $n\in \mathbb{N}$, то элемент $\underbrace{x\circ\ldots\circ x}_{n \text{ раз}}$ обозначается через $x^{[n]}$. Как и в [3], пользуемся обозначениями: $\mathcal{N}(K) = \{a\in K \mid \exists n\in \mathbb{N}\,(a^{[n]} = 0)\}$ – множество всех нильпотентных элементов (ниль-элементов), $\mathcal{E}(K) =\{a\in K \mid a = a^{[2]}\}$ – множество всех идемпотентов *m*-кольца K. *m*-Кольцо K называется ниль-*m*-кольцом, если $\mathcal{N}(K) = K$; трехступенно 0-нильпотентным, если $K\circ K\circ K = \{0\}$; вполне полупростым (без нильпотентных элементов), если

$\mathcal{N}$(К) = {0}; вполне простым (без делителей нуля), если К $\neq$ {0} и $К^{\#}\circ К^{\#} \subseteq К^{\#}$; регулярным, если $\forall a\in К(a\in a\circ К\circ a)$; идемпотентным, если $\mathcal{E}$(К) = К; ортодоксальным, если $\mathcal{E}(К)\circ\mathcal{E}(К) = \mathcal{E}(К)$; мажоритарным справа, если $\mathcal{E}(К)\circ\mathcal{E}(К) = \mathcal{E}(К)$ и

$$\forall e, f\in \mathcal{E}(К)\ \exists h\in \mathcal{E}(К)\ (e\circ h= e \& f\circ h = f); \tag{3}$$

левосингулярным, если $\mathcal{E}(К)\circ\mathcal{E}(К) = \mathcal{E}(К)$ и полугруппа $(\mathcal{E}(К),\circ)$ разлагается в полурешетку левых связок; апериодическим, если $\forall a\in К\exists n\in \mathbb{N}\ (a^{[n]} = a^{[n+1]})$; c-коммутативным, если $\forall a, b\in К\ (a\circ b = b\circ a)$; слабо c-коммутативным, если

$$\forall a, b, c\in К\ (a\circ b\circ c = a\circ c\circ b); \tag{4}$$

0-коммутативным, если выполняется соотношение $\forall a, b\in К\ (a\circ b = 0 \Rightarrow b\circ a = 0)$; слабо 0-коммутативным, если

$$\forall e\in \mathcal{E}(К)\ \forall a\in \mathcal{N}(К)\ (e\circ a = 0 \Rightarrow a\circ e = 0); \tag{5}$$

латентным, если $\forall a, b, c\in К\ (a\circ b = 0 \Rightarrow a\circ c\circ b = 0)$; рефрактным, если

$$\forall a, b, c\in К\ (a\circ b\circ c = a\circ c\circ b\circ c). \tag{6}$$

Неодноэлементное m-кольцо К называется константным, если оно вполне просто и полугруппа $(К^{\#}, \circ)$ является левой связкой. То, что m-кольцо К разлагается в полупрямое произведение [2] под-m-кольца A и идеала B, обозначается как $К = A \rightthreetimes B$.

Ввиду (1) и (2) по определению АЕ-m-кольца сразу вытекает

Лемма 1. *Всякое* АЕ-*m-кольцо является рефрактным.* □

Основные результаты работы представлены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть* К – *неодноэлементное вполне полупростое рефрактное т-кольцо. Тогда оно идемпотентно, левосингулярно, слабо с-коммутативно и разлагается в подпрямое произведение константных т-колец.*

Теорема 2. *Если* К – *слабо* 0-*коммутативное рефрактное т-кольцо, то множество* $\mathcal{N}$(К) *есть идеал т-кольца* К, *являющийся трехступенно* 0-*нильпотентным т-кольцом, а факторкольцо* $L = К/\mathcal{N}(К)$ *является вполне полупростым рефрактным т-кольцом, что равносильно тому, что т-кольцо L идемпотентно и слабо с-коммутативно.*

Теорема 3. *Пусть* $(N, +, \cdot)$ – *коммутативное ассоциативное кольцо*, N_1 и N_2 – *непустые подмножества N такие, что* $0\in N_2$ и $N = N_1 \sqcup N_2$. *Далее, предположим, что задано семейство* $\{\psi_a\}_{a\in N}$ *эндоморфизмов кольца* $(N, +, \cdot)$, *удовлетворяющих следующим условиям*:

Н1) $\forall a\in N_2\ (\psi_a = \psi_0)$,

Н2) $N_2 = \bigcup\limits_{a\in N} \operatorname{Im}\psi_a \subseteq \bigcap\limits_{a\in N} \operatorname{Ker}\psi_a$,

Н3) *для любого эндоморфизма* ε *кольца* $(N, +, \cdot)$ и *для любого* $a\in N$

$$\varepsilon \circ \psi_a = \psi_{\varepsilon(a)}\circ \varepsilon.$$

Тогда если ввести суперпозицию “$\circ$” по правилу: для любых $a, b\in N$

$$a\circ b = \psi_b(a),$$

то универсальная алгебра $(N, +, \cdot, \circ)$ *становится трехступенно* 0-*нильпотентным* АЕ-*т-кольцом. Обратно, любое неодноэлементное* АЕ-*т-кольцо, являющееся ниль-кольцом, строится таким же образом.*

Теорема 4. *Пусть* $(К, +, \cdot, \circ)$ *есть слабо* 0-*коммутативное* АЕ-*т-кольцо. Тогда имеются три возможности:*

1) К *является трехступенно* 0-*нильпотентным* АЕ-*т-кольцом*;

2) К – *слабо с-коммутативное идемпотентное* АЕ-*т-кольцо*;

3) К *является расширением трехступенно* 0-*нильпотентного т-кольца при помощи слабо с-коммутативного идемпотентного т-кольца L, при этом* К *ортодоксально*, $К = \mathcal{E}(К) + \mathcal{N}(К)$, *и если* К – *мажоритарно справа, то* $К = \mathcal{E}(К) \rightthreetimes \mathcal{N}(К)$, *где* $\mathcal{E}$(К) – *слабо с-коммутативное идемпотентное* АЕ-*т-кольцо и* $\mathcal{N}$(К) – *трехступенно* 0-*нильпотентное т-кольцо.*

Теорема 5. *Пусть* К – *вполне простое* АЕ-*т-кольцо. Тогда его редукт является сильно хопфовым кольцом.*

Следующие примеры показывают нетривиальность понятия АЕ-m-кольца и существенность условия слабой 0-коммутативности для того, чтобы множество $\mathcal{N}$(К) было идеалом в АЕ-m-кольце К.

Пример 1. Пусть (К, +, ·, ○) есть *m*-кольцо с нулевой суперпозицией, т. е. К○К = {0}. Тогда очевидно, что К есть АЕ-*m*-кольцо. □

Пример 2. Пусть (К, +, ○) – (ассоциативное) АЕ-кольцо [14]. Определим операцию “ · ” умножения на К так, что К · К = {0}. Тогда (К, +, · , ○) – АЕ-*m*-кольцо. □

Пример 3. Пусть (К, +, ·) = ($\mathbb{Z}_8$, +, ·) – кольцо вычетов по модулю 8. Определим операцию суперпозиции “○” по правилу: для a, $b\in\mathbb{Z}_8$, если a, $b\in\{2, 6\}$, то $a\circ b = 4$, иначе $a\circ b = 0$. С использованием теоремы 3 проверяется, что (К, +, ·, ○) становится 0-нильпотентным ступени, не большей 3, *c*-коммутативным АЕ-*m*-кольцом с нетривиальными основными операциями. □

Пример 4. Пусть (К, +, ·) = ($\mathbb{Z}_{12}$, +, ·) – кольцо вычетов по модулю 12. Обозначим $X_0 = \{4, 8\}$, $Y_0 = \{0, 3, 4, 7, 8, 11\}$, $X_3 = \{3, 7, 11\}$, $Y_1 = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$, $X_6 =\{2, 6, 10\}$, $X_9 = \{1, 5, 9\}$. Определим операцию суперпозиции “○” по правилу: для a, $b\in\mathbb{Z}_{12}$ $a\circ b = 0$, если $a\in X_0$ или $b\in Y_0$; и $a\circ b = 3$, если $a\in X_3$, $b\in Y_1$; $a\circ b = 6$, если $a\in X_3$, $b\in Y_1$; и $a\circ b =9$, если $a\in X_9$, $b\in Y_1$. Непосредственно проверяется, что (К, +, ·, ○) есть АЕ-*m*-кольцо. При этом условие (5) нарушается ($9\circ 9 = 9\in\mathcal{E}$(К), $3\in\mathcal{N}$(К), $9\circ 3 = 0 \neq 3 = 3\circ 9$). Здесь $\mathcal{N}$(К) = Y_0 не является идеалом в К (к примеру, $3 + 7 = 10\notin Y_0$). □

Перед доказательством теорем приведем несколько свойств рефрактных *m*-колец. Например, при подстановке в тождество (6) элемента a вместо b и c получим

Следствие 1. Пусть К – рефрактное *m*-кольцо. Тогда оно апериодично. Для любого элемента $a\in$ К выполняется равенство

$$a^{[3]} = a^{[4]}.$$

Элемент $e_a = a^{[3]}$ является идемпотентом *m*-кольца К, при этом

$$e_a\circ a = a\circ e_a = e_a, \tag{7}$$

$$a\in \mathcal{N}(К) \Leftrightarrow e_a = 0.\ \square \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть* К *– рефрактное m-кольцо. Тогда*

$$К\circ\mathcal{N}(К) \cup \mathcal{N}(К)\circ К \subseteq \mathcal{N}(К).\ \square \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $a\in\mathcal{N}$(К), $b\in$ К. С использованием (6), (8) и (3) имеем $(a\circ b)^{[3]} = a\circ b\circ a\circ b\circ a\circ b = a^{[3]}\circ b = e_a\circ b = 0\circ b = 0$, так что $a\circ b\in\mathcal{N}$(К). Из этого выводим $(b\circ a)^{[4]} = b\circ a\circ b\circ a\circ b\circ a\circ b\circ a = b\circ e_a\circ a = 0$, так что $b\circ a\in \mathcal{N}$(К). □

Лемма 3. *Пусть* К *– слабо* 0*-коммутативное рефрактное m-кольцо. Тогда*

$$\mathcal{E}(К)\circ \mathcal{N}(К) = \mathcal{N}(К)\circ \mathcal{E}(К) = \{0\}.\ \square \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $a\in \mathcal{N}$(К), $e\in \mathcal{E}$(К). Тогда благодаря (6) и (8) имеем

$$e\circ a =e\circ e\circ a = e\circ a\circ e\circ a = e\circ a\circ a\circ e\circ a = e\circ a\circ a\circ a\circ e\circ a = e\circ e_a\circ e\circ a = 0.$$

Теперь, применяя (5), получим $a\circ e = 0$. □

Лемма 4. *Пусть* К *– рефрактное m-кольцо. Тогда*

$$\mathcal{E}(К)\circ К \subseteq \mathcal{E}(К).$$

Доказательство. Пусть $x\in$ К, $e\in\mathcal{E}$(К). Тогда благодаря (6) и (8) имеем $e\circ x = e\circ e\circ x = e\circ x\circ e\circ x$, откуда $e\circ x\in \mathcal{E}$(К) и

$$\mathcal{E}(К)\circ\mathcal{E}(К) = \mathcal{E}(К).\ \square$$

Лемма 5. *Пусть* К *– слабо* 0*-коммутативное рефрактное m-кольцо. Тогда множество* $\mathcal{N}$(К) *есть идеал m-кольца* К.

Доказательство. Принимая во внимание лемму 1 и лемму 2, достаточно доказать, что $\mathcal{N}$(К) является стабильным слева [1] идеалом кольца (К, +, ·), т. е.

$$\forall a\in \mathcal{N}(К)\ \forall x, y\in К\ (x\circ(y + a) - x\circ y\in \mathcal{N}(К)). \tag{11}$$

Сначала докажем, что $\mathcal{N}(К) \pm \mathcal{N}(К) \subseteq \mathcal{N}(К)$, $\mathcal{N}(К)\cdot \mathcal{N}(К) \subseteq \mathcal{N}(К)$. Пусть a, $b\in\mathcal{N}$(К) и x, $y\in$ К. Тогда согласно (7), (10) $e_a = e_b = 0$. Пользуясь формулами (1), (2) и леммой 3, получим $e_{a+b} = (a + b)\circ e_{a+b} = a\circ e_{a+b} + b\circ e_{a+b} = 0 + 0 = 0$, так что $a + b\in \mathcal{N}$(К). Аналогично $a - b\in \mathcal{N}$(К). Далее, $e_{a\cdot x} = (a\cdot x)\circ e_{a\cdot x} = (a\circ e_{a\cdot x})\cdot(x\circ e_{a\cdot x}) = 0\cdot(x\circ e_{a\cdot x}) = 0$, и, значит, $a\cdot x\in \mathcal{N}$(К). Теперь пусть $u = x\circ(y + a) - x\circ y$. Снова используем (1), (7), (10) и получаем $e_u = u\circ e_u = (x\circ(y + a) - x\circ y)\circ e_u = (x\circ(y + a\circ e_u) - x\circ y) = x\circ y - x\circ y = 0$. Таким образом, (11) выполняется и $\mathcal{N}$(К) является идеалом *m*-кольца К. □

Лемма 6. *Пусть* N *– рефрактное ниль-m-кольцо. Тогда* $N\circ N\circ N = \{0\}$.

Доказательство. Для a, b, $c\in N$ будет $c^{[3]} = 0$ согласно следствию 1. Теперь благодаря (6) имеем $a\circ b\circ c = a\circ c\circ b\circ c = a\circ c\circ c\circ b\circ c = a\circ c\circ c\circ c\circ b\circ c = 0$. □

Лемма 7. *Пусть* К – *вполне простое m-кольцо. Для того чтобы m-кольцо* К *было рефрактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было константным.*

Доказательство. Пусть $a \in К^{\#}$. Так как вполне простое m-кольцо вполне полупросто, то $e_a \neq 0$. Из соотношения (7) выводим $0 = a \circ e_a - e_a = a \circ e_a - e_a \circ e_a = (a - e_a) \circ e_a$, откуда $a - e_a = 0$ и $a = e_a$. Следовательно, К = $\mathcal{E}$(К). Теперь согласно следствию 2.5.12 гл. IV [3] полугруппа ($\mathcal{E}$(К), ○) есть левая связка с внешне присоединенным нулем, так что К – константное m-кольцо. Обратное очевидно. □

Лемма 8. *Пусть* (К, +, ·, ○) – *m-кольцо. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(i) К – *вполне полупростое рефрактное m-кольцо*;

(ii) К *разлагается в подпрямое произведение константных m-колец*;

(iii) К – *идемпотентное слабо с-коммутативное m-кольцо*;

(iv) К – *регулярное рефрактное m-кольцо.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Так как К вполне полупросто, то согласно следствию 2.5.6 гл. IV [3] m-кольцо К разлагается в подпрямое произведение вполне простых m-колец. Далее, так как рефрактные m-кольца составляют многообразие, то все компоненты будут рефрактны, поэтому согласно лемме 6 константны.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что К разлагается в подпрямое произведение константных m-колец. Так как тождества идемпотентности и слабой c-коммутативности (тождество (4)) выполняются для константных m-колец, то эти же тождества будут выполняться и для m-кольца К.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть К – идемпотентное слабо c-коммутативное m-кольцо. Регулярность непосредственно следует из идемпотентности m-кольца К. Соотношение (6) легко выводится из (4).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Пусть a – элемент регулярного рефрактного m-кольца К. Тогда для некоторого $b \in$ К будет $a = a \circ b \circ a$. С использованием (6) получим $a = a \circ (b \circ a) = a \circ a \circ b \circ a = a \circ b \circ a \circ b \circ a = a \circ b \circ a \circ a \circ b \circ a = a \circ a$. Отсюда следует, что К – идемпотентное и потому вполне полупростое m-кольцо. □

Следствие 3. Всякое вполне полупростое рефрактное m-кольцо является идемпотентным левосингулярным.

Доказательство. Пусть К – вполне полупростое рефрактное m-кольцо. Согласно лемме 8 m-кольцо К идемпотентно. Известно [4], [6], что полугруппа (К, ○) должна разлагаться в полурешетку прямоугольных связок. Допустим, что элементы $a, b \in$ К находятся в одной прямоугольной компоненте. Тогда $a \circ b \circ a = a$ и $b \circ a \circ b = b$. Отсюда с помощью (4) выводим $a \circ b = a \circ a \circ b = a \circ b \circ a = a$ и аналогично $b \circ a = b$. Значит, всякая прямоугольная компонента является левой связкой, что и требовалось. □

Из лемм 7 и 8 теорема 1 получается как непосредственное следствие.

Доказательство теоремы 2. Предполагаем, что К – слабо 0-коммутативное рефрактное m-кольцо. Согласно леммам 5 и 6 $\mathcal{N}$(К) является идеалом m-кольца К и $\mathcal{N}$(К) ○ $\mathcal{N}$(К) ○ $\mathcal{N}$(К) = {0}. Так как свойство (6) сохраняется при гомоморфизмах, то факторкольцо К/$\mathcal{N}$(К) вполне полупросто и рефрактно. □

Доказательство теоремы 3. Пусть сначала N – рефрактное ниль-m-кольцо. Согласно лемме 6 $N \circ N \circ N = \{0\}$. Если в качестве множества N_2 в формулировке теоремы взять $N \circ N$, а в качестве $\{\psi_a\}_{a \in N}$ – правые сдвиги o-полугруппы m-кольца К, то условия Н1) и Н2) легко проверяются. Обратно, если условия Н1) и Н2) выполняются для указанных подмножеств N_1 и N_1 кольца (N, +, ·), то построенная в теореме универсальная алгебра (N, +, ·, ○) будет рефрактным ниль-m-кольцом. Условие Н3) требуется, чтобы это m-кольцо было АЕ-m-кольцом. □

В следующих леммах предполагаем, что К – слабо 0-коммутативное рефрактное m-кольцо.

Лемма 9. Имеет место разложение

$$К = \mathcal{E}(К) + \mathcal{N}(К). \tag{12}$$

Доказательство. Обозначим фактор-m-кольцо К/$\mathcal{N}$(К) через L. Рассмотрим естественный гомоморфизм ν: К $\to$ L. Для каждого $x \in$ К ввиду идемпотентности L имеем $\nu(x) = \nu(x^{[3]}) = \nu(e_x)$, поэтому для некоторого $a \in \mathcal{N}$(К) будет $x = e_x + a$. Значит, равенство (12) выполняется. □

Лемма 10. *Если m-кольцо* К *мажоритарно справа, то оно левосингулярно и множество* $\mathcal{E}$(К) *есть под-m-кольцо m-кольца* К. *При этом* $\mathcal{E}$(К) *как m-кольцо изоморфно фактор-m-кольцу* L = К / $\mathcal{N}$(К).

Доказательство. Пусть $e, f \in \mathcal{E}$(К). Тогда $\nu(e - f) = \nu(e_{e-f})$. Значит, для некоторого $a \in \mathcal{N}$(К) $e_{e-f} = e - f + a$. Ввиду мажоритарности справа К должен существовать идемпотент h такой, что $e \circ h = e$ и $f \circ h = f$. Используя (7), (10), из приведенных равенств выводим $e_{e-f} = e_{e-f} \circ (e - f) = e_{e-f} \circ (e \circ h - f \circ h) = e_{e-f} \circ (e - f) \circ h = (e - f + a) \circ h = (e \circ h - f \circ h + a \circ h) = e - f$. Значит, $e - f \in \mathcal{E}$(К). Аналогично $e \cdot f \in \mathcal{E}$(К). Таким образом, $\mathcal{E}$(К) есть под-m-кольцо m-кольца К. Так как Kerν = $\mathcal{N}$(К) и

$\mathcal{N}(К) \cap \mathcal{E}(К) = \{0\}$, то отсюда следует, что ограничение гомоморфизма $\nu : К \to L$ на $\mathcal{E}(К)$ является изоморфизмом m-колец, и потому полугруппа ($\mathcal{E}(К)$, $\circ$), как и (L, $\circ$), разлагается в полурешетку левых связок. □

Доказательство теоремы 4. Пусть К является слабо 0-коммутативным АЕ-m-кольцом. Предположим сначала, что $К = \mathcal{N}(К)$. В этом случае условие (5) является лишним. Согласно теореме 3 К есть трехступенно 0-нильпотентное АЕ-m-кольцо. Рассмотрим далее случай $\mathcal{N}(К) = \{0\}$. Тогда К является вполне простым и рефрактным по лемме 1. Согласно теореме 2 К – слабо c-коммутативное идемпотентное АЕ-m-кольцо. Теперь предположим, что $К \neq \mathcal{N}(К) \neq \{0\}$. Согласно лемме 1 К – рефрактное m-кольцо. По теореме 2 и следствию 3 К является расширением трехступенно 0-нильпотентного m-кольца $\mathcal{N}(К)$ при помощи идемпотентного левосингулярного слабо c-коммутативного m-кольца $L = К / \mathcal{N}(К)$. Теперь предположим, что К мажоритарно справа. Согласно лемме 10 $\mathcal{E}(К)$ есть под-m-кольцо m-кольца К и так как $\mathcal{N}(К) \cap \mathcal{E}(К) = \{0\}$ и по лемме 9 $К = \mathcal{E}(К) + \mathcal{N}(К)$, т. е. $К = \mathcal{E}(К) \rightthreetimes \mathcal{N}(К)$. Покажем, что в этом случае $\mathcal{E}(К)$ является АЕ-m-кольцом. Действительно, если ε – эндоморфизм кольца ($\mathcal{E}(К)$, +, $\cdot$), то, положив для $e \in \mathcal{E}(К)$ и $a \in \mathcal{N}(К)$ $\varepsilon_1(e + a) = \varepsilon(e)$, нетрудно проверить, что ε_1 является эндоморфизмом кольца (К, +, $\cdot$) и, значит, эндоморфизмом полугруппы (К, $\circ$). Так как ε является ограничением ε_1 на $\mathcal{E}(К)$, то ε есть эндоморфизм полугруппы ($\mathcal{E}(К)$, $\circ$), что и требовалось. □

Доказательство теоремы 5. Пусть (К, +, $\cdot$, $\circ$) – вполне простое АЕ-m-кольцо. Согласно лемме 1 оно должно быть рефрактным, и тогда по лемме 7 оно константно. Предположим, что ε – ненулевой эндоморфизм кольца (К, +, $\cdot$). По определению АЕ-m-кольца ε является эндоморфизмом и полугруппы (К, $\circ$). Тогда для некоторого $a \in К^{\#}$ будет $\varepsilon(a) \neq 0$ и так как для любого $b \in К^{\#}$ $\varepsilon(a) = \varepsilon(a \circ b) = \varepsilon(a) \circ \varepsilon(b) \neq 0$, то $\varepsilon(b) \neq 0$. Следовательно, эндоморфизм ε инъективен. Отсюда вытекает, что кольцо (К, +, $\cdot$) сильно хопфово. □

Замечание 1. Сильно хопфовы и хопфовы кольца изучались рядом авторов [16–19]. В качестве необходимых условий для ассоциативного коммутативного кольца (К, +, $\cdot$) выделим следующие:

S1) кольцо К не имеет других идемпотентов, кроме нуля и единицы;

S2) кольцо К не разлагается в нетривиальное полупрямое или прямое произведение;

S3) кольцо К с единицей в случае простой характеристики должно быть редуцированным (т. е. не иметь ненулевых нильпотентов [9]).

Действительно, при наличии идемпотента $e \notin \{0, 1\}$ преобразование $x \mapsto ex$ является не инъективным не нулевым эндоморфизмом. В случае разложения кольца К в нетривиальное полупрямое произведение идеала A на подкольцо B имеется идемпотентный эндоморфизм с ядром A и образом B. Если кольцо К с единицей имеет простую характеристику p и ненулевой ниль-радикал, то эндоморфизм Фробениуса $x \mapsto x^p$ не нулевой и имеет ненулевое ядро.

В качестве характерного примера сильно хопфового кольца можно указать поле. Если К – сильно хопфово кольцо с условием минимальности для подколец и максимальности для идеалов, то оно должно быть либо ниль-кольцом, либо полем, либо локальным артиновым кольцом с условием минимальности для подколец. В самом деле, можно предположить, что $К \neq \{0\}$. Допустим, что $x \in К^{\#}$. Обозначим через φ_x эндоморфизм $a \mapsto a\,x$ группы (К, +). В этом случае для каждого $m \in \mathbb{N}$ множество $\operatorname{Im} \varphi_x^{[m]}$ будет подкольцом, а $\operatorname{Ker} \varphi_x^{[m]}$ – идеалом. Из указанных условий следует, что существует натуральное число n такое, что $К = \operatorname{Im}(\varphi_x^{[n]}) \rightthreetimes \operatorname{Ker} \varphi_x^{[n]}$. Ввиду свойства S2) тогда либо а) $\operatorname{Im}(\varphi_x^{[n]}) = \{0\}$, $\operatorname{Ker}(\varphi_x^{[n]}) = К$, либо б) $\operatorname{Im}(\varphi_x^{[n]}) = К$ и $\operatorname{Ker}(\varphi_x^{[n]}) = \{0\}$. Предположим сначала, что кольцо К не имеет единицы. При выполнении а) тогда $\varphi_x^{[n]}(x) = x^{n+1} = 0$ и x – нильпотент, а в случае б) φ_x биективен и для некоторого $y \in К$ будет $yx = x$. Но тогда $yx = y^2x$ и $(y - y^2)x = 0$, что приводит к равенству $y = y^2$ и в силу S1) должно быть $y = 0$ и $x = yx = 0$, противоречие. Далее предположим, что К имеет единицу 1. Тогда К становится артиновым кольцом с условием максимальности для подколец. Ввиду артиновости [7] кольцо К разлагается в конечное прямое произведение артиновых локальных колец и в силу S2) кольцо К локально. Аналогично, если сильно хопфово кольцо К периодично, то оно является либо ниль-кольцом, либо локальным, причем каждый элемент будет либо обратим, либо нильпотентен. Можно показать, что конечное сильно хопфово кольцо К либо нильпотентно, либо является полем, либо является кольцом Галуа, определенным ниже. В самом деле, предположим, что К – конечное сильно хопфово кольцо, не являющееся ниль-кольцом или полем. Тогда согласно [20, 21] из предыдущего следует, что порядок К равен p^{nr} для некоторого простого числа p и чисел $n, r \in \mathbb{N}$, больших 1. Также $J^m = \{0\}$ для некоторого $m \le n$ (J – радикал Джекобсона), фактор-кольцо К / J является конечным полем GF(p^r), и характеристика кольца К равна p^k для некоторого натурального $k \le m$. Если $n = k$, то К изоморфно кольцу Галуа GR(p^{kr}, p^k) – простому расширению кольца $\mathbb{Z}_{p^k}[x]$ степени r. Здесь надо отметить, что имеются примеры таких сильно хопфовых колец. Если $k < n$, то при $К_0$ = GR(p^{kr}, p^k) имеет место разложение $К = К_0 \oplus J$ как $К_0$-модуля. Нетрудно видеть, что это – полупрямое разложение в противоречие с S2).

Одно из достаточных условий сильной хопфовости: если кольцо К без делителей нуля хопфово и целое над любым своим ненулевым подкольцом. Действительно, пусть ε – ненулевой не биективный эндоморфизм такого кольца К. Положим A = Imε. Должно быть $A \neq$ К ввиду хопфовости К. Докажем, что A целозамкнуто в К. Для этого допустим, что $s \in$ К – корень унитарного многочлена $p(x) \in A[x]$, причем $p(x)$ имеет наименьшую степень среди аннулирующих s. Тогда $0 = \varepsilon(p(s)) = p(\varepsilon(s))$, поэтому $p(x) = (x - \varepsilon(s))\, q(x)$ для некоторого $q(x) \in A[x]$ степени, меньшей, чем у $p(x)$, поэтому $q(s) \neq 0$. Далее, $0 = p(s) = (s - \varepsilon(s))q(s)$, откуда $s - \varepsilon(s) = 0$ и $s = \varepsilon(s) \in A$. Так что A целозамкнуто в К. Но это противоречит тому, что К целое над A. Следовательно, К – сильно хопфово кольцо.

В качестве примеров колец, не сильно хопфовых, укажем следующие нетривиальные коммутативные кольца, не являющиеся полями: ассоциативные редуцированные конечномерные алгебры над полем и не поля (Вейерштрасс, Дедекинд); сепарабельные расширения ниль-алгебр (теорема Веддербарна [8]), кольца многочленов над полем, групповые алгебры над полем [22], ОЕ-кольца [23] (каждый идеал есть ядро эндоморфизма); регулярные и риккартовы кольца (куда входят бирегулярные и бэровские кольца [24], [25]) и пр.

1. Ширяев В.М. Кольца с дополнительной операцией суперпозиции. Мн., 2004.
2. Ширяев В.М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. Т. 1 [Электронный ресурс]. Мн., 2009. 280 с. Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200934.
3. Ширяев В.М. Нуль-симметричные мультиоператорные почтикольца: в 3 т. Т. 2 [Электронный ресурс]. Мн., 2009. 273 с. Деп. в БелИСА 27.10.09, № 200935.
4. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. М., 1972. Т. 1.
5. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. М., 1985.
6. Ляпин Е.С. Полугруппы. М., 1960.
7. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М., 1971.
8. Джекобсон Н. Теория колец. М., 1947.
9. Matsumura H. Commutative ring theory. Cambridge; New York; New Rochele; Melbourne; Sydney, 1986.
10. Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А. и др. Общая алгебра: в 2 т. М., 1991. Т. 2.
11. Sullivan R.P.H. // Period. Math. Hung. 1988. Vol. 8. P. 331.
12. Birkenmeier G., Heatherly H. // Bull. Austral Math. Soc. 1990. Vol. 42. P. 145.
13. Dhompongsa S., Sanwong S. // Studia Sci. Math. Hung. 1987. Vol. 22. P. 357.
14. Feigelstock S.M. // Arch. Math. 2002. Vol. 78. P. 124.
15. Feigelstock S.M. // Commun. in Algebra. 2006. Vol. 34. № 2. P. 743.
16. Pandeya B.M., Paramhans S.A., Koirala S.P. // India J. pure and appl. Math. 1989. Vol. 20. P. 786.
17. Tiwary A.K., Pandeya B.M. // Proc. of Sem. on Algebra and its Application. 1984. Lecture Notes № 91. P. 199.
18. Varadarujan K. // Publ. Math. 1992. Vol. 83. P. 293.
19. Varadarujan K. // Acta Math. Hung. 1999. Vol. 83. P. 17.
20. Chicunji C. // J. Math. J. Okayama Univ. 2005. Vol. 47. P. 39.
21. Chicunji C. // Ibid. 2008. Vol. 50. P. 149.
22. Маклейн С. Гомология. М., 1966.
23. Negger J. // Canad. Math. Bull. 1976. Vol. 19. № 2. P. 199.
24. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др. Общая алгебра: в 2 т. М., 1991. Т. 1.
25. Вечтомов В.А. Полугруппы и частичные группоиды. Л., 1987. С. 3.

Поступила в редакцию 23.02.11.

Владимир Михайлович Ширяев – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики.